Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Темпельман, Размерность случайных фракталов в метрических пространствах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 589–616

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:00:19

© 1999 г.

ТЕМПЕЛЬМАН А. А.*

**РАЗМЕРНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ФРАКТАЛОВ
В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ¹⁾**

Изучаются локальная и хаусдорфова размерности мер в пространствах функций и последовательностей и хаусдорфова размерность таких пространств относительно детерминированных и случайных «масштабных» метрик. Вычисление хаусдорфовой размерности пространства последовательностей относительно детерминированной масштабной метрики с конечной памятью сводится к вычислению локальной размерности ассоциированной цепи Маркова; обе размерности совпадают с решением обобщенного уравнения Морана, определяемого масштабной метрикой. При случайной масштабной метрике мы приходим к стохастическому аналогу уравнения Морана. Эти результаты применены к изучению хаусдорфовых размерностей детерминированных и случайных фракталов в метрических пространствах.

Ключевые слова и фразы: хаусдорфова размерность, хаусдорфова мера, локальная размерность, цепь Маркова, фрактал.

Введение

Основное внимание в этой статье уделено вычислению размерностей конечных мер в пространстве последовательностей и хаусдорфовой размерности самого этого пространства при заданной «масштабной» метрике; эти результаты применяются также для вычисления хаусдорфовой размерности фрактальных множеств в метрических пространствах, полученных с помощью детерминированных и случайных конструкций.

В § 1 рассматривается метрическое пространство функций со значениями в конечном множестве S , определенных на произвольном счетном множестве T ; определены различные понятия размерности мер и множеств в таком пространстве, и изучается связь между ними при различных масштабных условиях на метрику. Мы рассматриваем здесь два вида локальных размерностей мер — размерности, определяемые «по

*Department of Mathematics & Department of Statistics, The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA; e-mail: arkady@stat.psu.edu

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке NSF (грант DEB-9524722).

шарам», и размерности «по цилиндрическим множествам» — и устанавливаем условия их совпадения; этот результат существенно используется в дальнейшем. При этом основное внимание уделяется понятию локальной размерности, определяемой цилиндрическими множествами: это понятие является более естественным и удобным при изучении пространства S^T — в отличие от конечномерного случая, где широко используется локальная размерность, определяемая шарами; понятие «цилиндрической» локальной размерности меры широко использовалось в работах Биллингсли [6]–[8] и Фюрстенберга [15]. Теорема 1.5 устанавливает связь между локальными и «глобальными» размерностями; она представляет собой модифицированную форму теоремы Биллингсли, установленной им для «цилиндрической» локальной размерности в пространстве последовательностей со стандартной метрикой, и теоремы Янг [27] для «шаровой» локальной размерности в $\mathbf{R}^n$. Основной результат этого параграфа — теорема 1.6 — утверждает, что при сравнительно слабых «масштабных» ограничениях на метрику все рассматриваемые размерности совпадают. Это открывает широкие возможности для вычисления «глобальной» размерности множеств путем нахождения локальной размерности соответствующим образом подобранных мер. Этот метод восходит к цитированным выше работам Биллингсли и Фюрстенберга и широко использовался в работах других авторов.

Остальная часть работы посвящена вычислению хаусдорфовой размерности пространства последовательностей S^N (§ 2–4) и фракталов в метрических пространствах, определяемых детерминированными и случайными конструкциями (§ 5).

В § 2 введены понятия коэффициента масштаба и различных типов масштабных метрик с конечной «памятью» в пространстве S^N . Здесь же доказано существование локальной размерности любой эргодической трансляционно инвариантной вероятностной меры относительно «усреднимой» масштабной метрики; найдены формулы для вычисления локальной размерности такой меры в терминах удельной энтропии этой меры и «энтропии» коэффициентов масштаба. Этот подход обобщает идеи Биллингсли [6]–[8], Реньи [26] и Фюрстенберга [15]. Отметим также, что в различных ситуациях связь размерностных характеристик с энтропией изучалась позднее рядом авторов (см., например, [10], [14], [18], [19], [23], [25]).

В § 3 вычисляется хаусдорфова размерность пространства S^N относительно данной масштабной метрики с конечной памятью. С этой метрикой ассоциирована цепь Маркова, вероятности перехода которой определяются коэффициентами масштаба; фигурирующий в ее определении параметр является решением обобщенного аналога уравнения Морана, введенного в [22] при изучении хаусдорфовой размерности фракталов в $\mathbf{R}^n$. Показано, что этот параметр совпада-

ет с локальной размерностью цепи Маркова и с хаусдорфовой размерностью пространства S^N . Отметим, что в другой ситуации цепи Маркова использовались при вычислении размерности в работе [20].

В § 4 вычислена хаусдорфова размерность пространства S^N относительно случайной масштабной метрики без памяти. Эта размерность совпадает с решением стохастического варианта уравнения Морана.

Параграф 5 посвящен обобщению упомянутых результатов на фракталы в произвольных метрических пространствах. В первой части этого параграфа мы рассматриваем индуктивные конструкции фракталов, определяемые коэффициентами сжатия, зависящими, вообще говоря, от прошлых этапов конструкции. Вычисление размерности фрактала сводится к решению обобщенного уравнения Морана, в котором фигурирует спектральный радиус линейного оператора, определяемого коэффициентами масштаба и действующего в конечномерном пространстве (размерность этого пространства зависит от «памяти» масштаба). Во второй части § 5 результаты § 4 обобщаются на случайные конструкции фракталов в произвольных метрических пространствах. Хаусдорфова размерность случайных фракталов является решением найденного в § 4 стохастического аналога уравнения Морана (для случайных конструкций в $\mathbf{R}^n$ сходные результаты были получены другим методом в работах [18], [25]). Иной тип случайных конструкций был рассмотрен в работах [12] и [21]; при этом хаусдорфова размерность оказывается решением другого варианта стохастического уравнения Морана. Полученные здесь результаты в ряде аспектов обобщают результаты Кифера [18], Морана [22], Песина и Вайсса [25] и др. Например, теоремы 5.2 и 5.3 применимы в произвольных банаховых пространствах; теорема 5.4 и следствие 5.1 приложимы в метрических пространствах с некоторыми дополнительными свойствами; мы рассматриваем итеративные конструкции фракталов, в которых коэффициенты масштаба зависят от (конечного числа) предыдущих итераций.

Основные результаты работы были изложены в докладе автора на Конференции в честь юбилея проф. Александры Беллоу (Эванстон, США, 23–26 октября 1997 г.).

В заключение хочу выразить глубокую благодарность Б. М. Гуревичу за подробное обсуждение рукописи статьи; его замечания способствовали ее существенному улучшению (в частности, был улучшен первоначальный вариант теоремы 1.2). Я признателен также И. П. Корнфельду за полезное обсуждение затронутых здесь вопросов и В. А. Афраимовичу, обратившему мое внимание на интересный класс фракталов, которые названы здесь «иерархическими системами планет и спутников» (см. § 5).

§ 1. Размерности мер и множеств в пространствах функций

Пусть T — счетное множество и $T_n, n \in \mathbb{N}$, — последовательность его конечных подмножеств, причем $T_n \uparrow T$; пусть S — конечное множество; для любой функции $x \in S^T$ рассмотрим в S^T цилиндрические множества $C_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y: y \in S^T, y(t) = x(t), \text{ если } t \in T_n\}, n \in \mathbb{N}$; обозначим через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{T}$, соответственно, σ -алгебру и топологию в S^T , порожденные всеми цилиндрическими множествами. Фиксируем замкнутое множество $\Lambda \subset S^T$. Обозначим $\tilde{C}_n(x) = C_n(x) \cap \Lambda$; эти множества мы называем *цилиндрическими множествами в Λ* ; $\mathcal{T}_\Lambda$ — топология в Λ , порожденная этими множествами.

Фиксируем число $N_0 \in \mathbb{N}$ и последовательность положительных функций $\{\beta_n(\cdot), n \geq N_0\}$ на Λ такую, что

- 1) $\beta_n(x) \downarrow 0$ при любом $x \in \Lambda$;
- 2) каждая функция $\beta_n(x)$ постоянна на множестве $\tilde{C}_n(x)$.

Кроме того, по мере надобности мы будем налагать следующие ограничения на последовательность $\beta_n(\cdot)$.

Пусть μ — конечная мера на $\mathcal{A}^{(2)}$.

(μ -Р) μ -регулярность последовательности β_n : для μ -почти всех $x \in \Lambda$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[\beta_{n+1}(x)]}{\ln[\beta_n(x)]} = 1. \quad (1.1)$$

(СР) Сильная регулярность последовательности β_n : существует положительная постоянная $\gamma < 1$ такая, что при любых $n \geq N_0, x \in \Lambda$ имеем $\beta_{n+1}(x) > \gamma \beta_n(x)$.

Пусть $b > 0$. Если $b\beta_{N_0}(x) \geq r$, определим натуральное число $l(r, x, b) \geq N_0$ следующим образом: $b\beta_{l(r, x, b)+1}(x) < r \leq b\beta_{l(r, x, b)}(x)$; если $b\beta_{N_0}(x) < r$, мы полагаем $l(r, x, b) = N_0$.

З а м е ч а н и е 1.1. Пространство S^T компактно в топологии $\mathcal{T}$. Поскольку функции $\beta_n(x)$ непрерывны в этой топологии, то $\beta_n(x) \downarrow 0$ равномерно по x . Поэтому при любом r функция $l(r, \cdot, b)$ ограничена.

Рассмотрим в Λ метрику ρ ; обозначим через $B(x, r)$ шар радиуса r с центром x ; $|A|$ и $[A]$ — соответственно, диаметр и замыкание множества $A \subset \Lambda$. Определенное ниже понятие «индекса Морана» L было, по существу, введено Мораном при доказательстве теоремы III в [22]; там же доказано утверждение, аналогичное лемме 1.1. Наше изложение этого материала близко к [22] и [25].

Для любого натурального числа $n \geq N_0$ и любого $x \in \Lambda$ обозначим через $L_{n,x}(b)$ минимальное число $L = L(b)$, обладающее следующим свойством: существует не более чем $L_{n,x}(b)$ цилиндрических множеств

²⁾ Мы всюду рассматриваем ненулевые меры на $\mathcal{A}$.

$\tilde{C}_{l(b\beta_n(x), y^{(i)}, b)}(y^{(i)})$, $y^{(i)} \in \Lambda$, таких, что $B(x, b\beta_n(x)) \cap \tilde{C}_{l(b\beta_n(x), y^{(i)}, b)}(y^{(i)}) \neq \emptyset$ и $\tilde{C}_{l(b\beta_n(x), y^{(i)}, b)}(y^{(i)}) \cap \tilde{C}_{l(b\beta_n(x), y^{(j)}, b)}(y^{(j)}) = \emptyset$ при $i \neq j$. Величина

$$L(b) = \sup \{L_{n,x}(b): x \in \Lambda, n \geq N_0\}$$

называется *индексом Морана* (относительно последовательности функций β_n) при постоянной b .

Лемма 1.1. Для любого натурального числа $n > N_0$ и любого $x \in \Lambda$ существует семейство цилиндрических множеств $\tilde{C}_{l(b\beta_n(x), y^{(i)}, b)}(y^{(i)})$, $1 \leq i \leq K_{n,x}$, такое, что $K_{n,x} \leq L(b)$ и $B(x, b\beta_n(x)) \subset \bigcup_i \tilde{C}_{l(b\beta_n(x), y^{(i)}, b)}(y^{(i)})$.

Доказательство. Ясно, что при любых $n > 0$ и $x \in \Lambda$ семейство множеств $\mathcal{C}(n, x) = \{\tilde{C}_{l(b\beta_n(x), y, b)}(y), y \in B(x, b\beta_n(x))\}$ образует покрытие шара $B(x, b\beta_n(x))$. Поскольку при любом r функция $l(\cdot, r, b)$ ограничена и постоянна на цилиндрических множествах $C_m(y)$, $m \geq N_0$, $y \in S^T$, то это семейство конечно.

Пусть $y \in B(x, b\beta_n(x))$. Обозначим через $C(y)$ максимальное множество из семейства $\mathcal{C}(n, x)$, содержащее y . Заметим, что множества $C(y_1)$ и $C(y_2)$ либо не пересекаются, либо одно содержит другое; разумеется, последнее невозможно в силу определения множества $C(y)$. Ясно, что семейство $\{C(y), y \in B(x, b\beta_n(x))\}$ является покрытием шара $B(x, b\beta_n(x))$; в силу определения индекса $L(b)$ оно содержит не более чем $L(b)$ множеств. Лемма 1.1 доказана.

В дальнейшем, по мере надобности, будут рассматриваться следующие ограничения на метрику ρ .

(ССЦ) *Скорость сжатия цилиндрических множеств*: $|\tilde{C}_n(x)| \leq \beta_n(x)$, $n \geq N_0$, $x \in \Lambda$.

(КИМ) *Конечность индекса Морана*: $L(b) < \infty$ при некотором b .

(ЖЦ) *Жесткость цилиндрических множеств*: существует положительная постоянная c такая, что при любых $n \geq N_0$, $x \in \Lambda$ имеем $|\tilde{C}_n(x)| \geq c\beta_n(x)$.

Предложение 1.1. Если ρ удовлетворяет условию (ССЦ), то

1. Множество Λ компактно относительно топологии $\mathcal{T}$;
2. Шары $B(x, r)$ — открытые множества в топологии $\mathcal{T}_\Lambda$;
3. Множество Λ компактно относительно ρ -топологии пространства Λ ;

4. ρ -топология пространства Λ эквивалентна топологии $\mathcal{T}_\Lambda$;

5. Всякое ρ -борелевское множество в Λ принадлежит $\mathcal{A}$.

Доказательство. Утверждение 1 — следствие теоремы Тихонова. Утверждение 2 вытекает из условия (ССЦ). Отсюда следует, что $\mathcal{T}_\Lambda$ мажорирует ρ -топологию и поэтому тождественное отображение топологического пространства $(\Lambda, \mathcal{T})$ в метрическое пространство (Λ, ρ) непрерывно; следовательно, всякое $\mathcal{T}$ -замкнутое ($\mathcal{T}$ -компактное)

множество ρ -замкнуто; тем самым утверждение 3 доказано. Утверждения 4 и 5 являются простыми следствиями предыдущих утверждений.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс ρ -открытых множеств в Λ . Конечное или счетное покрытие множества $F \subset \Lambda$ множествами $A_i \subset \mathcal{K}$ называется δ -покрытием, если $|A_i| \leq \delta$. Пусть $\alpha > 0$. Обозначим:

$$H_{\delta, \mathcal{K}}^{\alpha}(F) = \inf \left\{ \sum_i |A_i|^{\alpha} : \{A_i\} \text{ есть } \delta\text{-покрытие множества } F \right\};$$

$$H_{\mathcal{K}}^{\alpha}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta, \mathcal{K}}^{\alpha}(F); \quad D_{\mathcal{K}}(F) = \inf \{ \alpha : H_{\mathcal{K}}^{\alpha}(F) = 0 \}.$$

В дальнейшем в качестве $\mathcal{K}$ мы рассмотрим классы $\mathcal{U}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, соответственно, всех открытых множеств, всех шаров с центрами в F и всех цилиндрических множеств $\tilde{C}_n(x)$, $n \geq N_0$, $x \in \Lambda$, в Λ . Известно, что при любом α мы имеем: $H_{\mathcal{U}}^{\alpha}(F) \leq H_{\mathcal{B}}^{\alpha}(F) \leq 2^{\alpha} H_{\mathcal{U}}^{\alpha}(F)$ (см., например, [11]). Число $D_H(F) \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathcal{U}}(F) = D_{\mathcal{B}}(F)$ называется *гаусдорфовой размерностью множества F* ; $H^{\alpha}(F) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\mathcal{U}}^{\alpha}(F)$ называется *гаусдорфовой мерой множества F* . Если $H^{\alpha_0}(F) > 0$ при $\alpha_0 = D_H(F)$, говорят, что размерность $D_H(F)$ *точна*.

Рассмотрим также функцию множеств

$$\hat{H}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{H}_{n, \mathcal{C}}^{\alpha}(F),$$

где при любом $n \geq N_0$

$$\hat{H}_{n, \mathcal{C}}^{\alpha}(F) = \inf \left\{ \sum_i (\beta_{n_i}(x^{(i)}))^{\alpha} : n_i \geq n, \right. \\ \left. \{C_{n_i}(x^{(i)})\} \text{ есть покрытие множества } F \right\},$$

и размерность $\hat{D}_{\mathcal{C}}(F) = \inf \{ \alpha : \hat{H}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F) = 0 \}$.

Теорема 1.1. *Функция $\hat{H}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$ является мерой на $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что в определении $H_{n, \mathcal{C}}^{\alpha}(F)$ можно ограничиться покрытиями, состоящими из непересекающихся цилиндрических множеств. Отсюда вытекает, что $\hat{H}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$ аддитивна на алгебре $\mathcal{C}_0$ всех объединений цилиндрических множеств. Поскольку цилиндрические множества открыты и Λ компактно в топологии $\mathcal{T}_{\Lambda}$, то функция $\hat{H}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$ σ -аддитивна на $\mathcal{C}_0$, а следовательно, и на $\mathcal{A}$. Теорема 1.1 доказана.

С помощью стандартных рассуждений (см., например, [11]) нетрудно показать, что 1) $\hat{D}_{\mathcal{C}}(F_1) \leq \hat{D}_{\mathcal{C}}(F_2)$, если $F_1 \subset F_2$, 2) $\hat{D}_{\mathcal{C}}(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \hat{D}_{\mathcal{C}}(F_i)$ и 3) $\hat{D}_{\mathcal{C}}(F_n) \uparrow \hat{D}_{\mathcal{C}}(F)$, если $F_n \uparrow F$; отсюда вытекает, что $\hat{D}_{\mathcal{C}}(F) = 0$ для всякого счетного множества F .

Теорема 1.2. Если выполнено условие (ССЦ), то $H_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F) \leq \hat{H}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$ для любого множества $F \subset \Lambda$ и для любого $\alpha > 0$, откуда следует, что $D_{\mathcal{C}}(F) \leq \hat{D}_{\mathcal{C}}(F)$; если, кроме (ССЦ), выполнено условие (ЖЦ), то $H_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F) = c^{\alpha} \hat{H}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$, $\alpha > 0$, и поэтому $D_{\mathcal{C}}(F) = \hat{D}_{\mathcal{C}}(F)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что функции $|\tilde{C}_n(x)|$ непрерывны относительно топологии $\mathcal{T}_{\Lambda}$ и поэтому, ввиду условия (ССЦ) и компактности пространства Λ , $|\tilde{C}_n(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $x \in \Lambda$. Таким образом, $|\tilde{C}_n(x)| \leq \delta$ при $n > N(\delta)$ для любых x и $\delta > 0$. Из условия (ССЦ) вытекает: $\hat{H}_{n,\mathcal{C}}^{\alpha}(F) \geq H_{\delta,\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$ при $n > N(\delta)$ и, таким образом, $H_{\delta,\mathcal{C}}^{\alpha}(F) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{H}_{n,\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$. Отсюда следует, что $H_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F) \leq \hat{H}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$. Рассмотрим функцию $n = \psi(x, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k: k \in \mathbb{N}, |\tilde{C}_k(x)| \leq \delta\}$. При любом δ функция $\psi(\cdot, \delta)$ постоянна на цилиндрических множествах и, следовательно, непрерывна в топологии $\mathcal{T}$. В силу компактности пространства S^T , $\psi(x, \delta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по $x \in S^T$. Поэтому для всякого $N \geq 1$ существует $\delta(N) > 0$ такое, что при любом $x \in \Lambda$ имеем: если $|\tilde{C}_n(x)| \leq \delta(N)$, то $n \geq N$; из условия (ЖЦ) вытекает, что $H_{\delta(N),\mathcal{C}}^{\alpha}(F) \geq c^{\alpha} \hat{H}_{N,\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$ и, следовательно, $c^{\alpha} \hat{H}_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F) \leq H_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$. Тем самым утверждение доказано.

Теорема 1.3. Предположим, что выполнены условия (ССЦ) и (СР). Тогда при любых $F \subset \Lambda$, $\alpha > 0$ и $b > 0$

$$H^{\alpha}(F) \leq H_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F) \leq L(b)(b\gamma)^{-\alpha} H^{\alpha}(F).$$

Поэтому $D_{\mathcal{C}}(F) = D_H(F)$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$, ясно, что $H_{\delta,\mathcal{U}}^{\alpha}(F) \leq H_{\delta,\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$ и поэтому

$$H_{\mathcal{U}}^{\alpha}(F) \leq H_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F). \quad (1.2)$$

Фиксируем $\delta > 0$; пусть $\{B(x^{(i)}, r_i)\}$ является δ -покрытием множества F шарами. Положим $n_i = l(r_i, x^{(i)}, b)$. Согласно лемме 1.1, существуют множества $\tilde{C}_{n_i,k}(x^{(i,k)})$, $1 \leq k \leq K_i$, такие, что $K_i \leq L(b)$, $B(x^{(i)}, b\beta_{n_i}(x^{(i)})) \subset \cup_k \tilde{C}_{n_i,k}(x^{(i,k)})$ и $b\beta_{n_i,k+1}(x^{(i,k)}) < r_i$. Поэтому, в силу условия (ССЦ), $|\tilde{C}_{n_i,k+1}(x^{(i,k)})| < \beta_{n_i,k+1}(x^{(i,k)}) < b^{-1}r_i$. Обозначим: $\psi = (2b\gamma)^{-1}$. Из условия (СР) вытекает:

$$|\tilde{C}_{n_i,k}(x^{(i,k)})| \leq \gamma^{-1} |\tilde{C}_{n_i,k+1}(x^{(i,k)})| \leq 2\psi r_i \leq \psi \delta.$$

Таким образом, $\{\tilde{C}_{n_i}(x^{(i,k)})\}$ является $\psi\delta$ -покрытием множества F и

$$\sum_{i,k} |\tilde{C}_{n_i,k}(x^{(i,k)})|^{\alpha} < L(b)\psi^{\alpha} \sum_i (2r_i)^{\alpha}.$$

Отсюда вытекает, что $H_{\psi\delta,\mathcal{C}}^{\alpha}(F) \leq L(b)\psi^{\alpha} H_{\delta,\mathcal{U}}^{\alpha}(F)$. Положим $\delta \rightarrow 0$; поскольку $H_{\mathcal{U}}^{\alpha}(F) \leq 2^{\alpha} H_{\mathcal{U}}^{\alpha}(F)$, мы получаем:

$$H_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F) \leq L(b)\psi^{\alpha} H_{\mathcal{U}}^{\alpha}(F) \leq 2^{\alpha} L(b)\psi^{\alpha} H_{\mathcal{U}}^{\alpha}(F). \quad (1.3)$$

Остается воспользоваться неравенствами (1.2) и (1.3). Теорема 1.3 доказана.

Пусть μ — конечная мера на $\mathcal{A}$. *Локальная размерность этой меры в точке $x \in \Lambda$ определяется следующей формулой (в предположении, что рассматриваемый предел существует и конечен):*

$$d_{\mathcal{B},\mu}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B(x, r))}{\ln r}.$$

Наряду с этой «шаровой» локальной размерностью мы рассмотрим «цилиндрическую» локальную размерность меры μ в точке $x \in \Lambda$, определяемую следующим образом (в предположении, что предел существует и конечен):

$$d_{\mathcal{C},\mu}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(C_n(x))}{\ln[\beta_n(x)]}. \quad (1.4)$$

Следующая теорема устанавливает связь между этими понятиями локальной размерности.

Теорема 1.4. Пусть $F \in \mathcal{A}$, $F \subset \Lambda$ и $\mu(F) = \mu(S^T)$. Предположим также, что выполнены условия (ССЦ), (КИМ) и $(\mu\text{-P})$. Если μ -п.в. на F существует $d_{\mathcal{C},\mu}(x)$, то μ -п.в. на F существует и $d_{\mathcal{B},\mu}(x)$, причем $d_{\mathcal{B},\mu}(x) = d_{\mathcal{C},\mu}(x)$ μ -п.в.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{F}$ подмножество множества F , на котором существует $d_{\mathcal{C},\mu}(x)$ и выполнено (1.1). Согласно нашему предположению, $\mu(\tilde{F}) = \mu(F)$. Фиксируем произвольную функцию $x(\cdot) \in \tilde{F}$. Обозначим $r_n = \beta_n(x)$. Согласно условию (ССЦ), $\tilde{C}_n(x) \subset B(x, r_n)$. Имеем:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(B(x, r_n))}{\ln r_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(\tilde{C}_n(x))}{\ln[\beta_n(x)]} = d_{\mathcal{C},\mu}(x).$$

Пусть $r_{n+1} \leq r \leq r_n$. Из условия $(\mu\text{-P})$ следует: $\ln r_n \sim \ln r_{n+1}$; при достаточно большом n

$$\frac{\ln \mu(B(x, r))}{\ln r} \leq \frac{\ln \mu(B(x, r))}{\ln r_n} \leq \frac{\ln r_{n+1}}{\ln r_n} \frac{\ln \mu(B(x, r_{n+1}))}{\ln r_{n+1}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B(x, r))}{\ln r} \leq d_{\mathcal{C},\mu}(x). \quad (1.5)$$

Положим теперь $r_n = b\beta_n(x)$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} l(r_n, y, b) = \infty$, для любого $y \in \tilde{F}$ имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln[\mu(C_{l(r_n, y, b)}(y))]/\ln[b\beta_{l(r_n, y, b)}(y)] = d_{\mathcal{C},\mu}$. Пусть $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$; обозначим через $\tilde{F}_N^\varepsilon$ множество, состоящее

функций $y \in \tilde{F}$ таких, что при $n \geq N$, $y \in \tilde{F}_N^\varepsilon$ выполнено соотношение $\ln[L(b)\mu(C_{l(r_n, y, b)}(y))]/\ln[b\beta_{l(r_n, y, b)}(y)] \geq d_{\mathcal{C}, \mu} - \varepsilon$. Согласно лемме 1.1, для любого шара $B(x, r_n)$ существуют цилиндрические множества $C_{l(r_n, x_{n,i}, b)}(x_{n,i})$, $1 \leq i \leq k_n \leq L(b)$ такие, что $B(x, r_n) \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} C_{l(r_n, x_{n,i}, b)}(x_{n,i})$. Из условия теоремы вытекает, что $\mu(C_n(x)) > 0$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \tilde{F}$. Очевидно, при любом $\varepsilon > 0$ мы имеем $\tilde{F}_N^\varepsilon \uparrow \tilde{F}$ и поэтому $\mu(\tilde{F}_N^\varepsilon) \uparrow \mu(\tilde{F}) = \mu(S^{\mathbb{N}})$. Далее, $\mu(C_{l(r_n, x_{n,i}, b)}(x_{n,i}) \cap \tilde{F}) - \mu(C_{l(r_n, x_{n,i}, b)}(x_{n,i}) \cap \tilde{F}_N^\varepsilon) \leq \mu(\tilde{F}) - \mu(\tilde{F}_N^\varepsilon)$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k_n$. Таким образом, если N достаточно велико, то при всех $n \in \mathbb{N}$, $i \leq k_n$ множества $\tilde{F}_N^\varepsilon \cap C_{l(r_n, x_{n,i}, b)}(x_{n,i})$ непусты, и мы можем считать, что $x_{n,i} \in \tilde{F}_N^\varepsilon$. Пусть $x_n^* \in \tilde{F}_N^\varepsilon$ и $\mu(C_{l(r_n, x_n^*, b)}(x_n^*)) = \max_{1 \leq i \leq k_n} \mu(C_{l(r_n, x_{n,i}, b)}(x_{n,i}))$. Заметим, что $b\beta_{l(r_n, x_n^*, b)+1}(x_n^*) < r_n$. Поскольку $x_n^* \in \tilde{F}_N^\varepsilon$, то при любом $n > N$

$$\frac{\ln \mu(B(x, r_n))}{\ln r_n} \geq \frac{\ln[L(b)\mu(C_{l(r_n, x_n^*, b)}(x_n^*))]}{\ln[b\beta_{l(r_n, x_n^*, b)+1}(x_n^*)]} \geq d_{\mathcal{C}, \mu} - \varepsilon.$$

Так как $\tilde{F}_{\varepsilon, N} \uparrow \tilde{F}$ при $N \rightarrow \infty$ и число ε выбрано произвольно, то $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\ln \mu(B(x, r_n))/\ln r_n) \geq d_{\mathcal{C}, \mu}$; рассуждая, как и при доказательстве формулы (1.5), убеждаемся, что $\liminf_{r \rightarrow 0} (\ln \mu(B(x, r))/\ln r) \geq d_{\mathcal{C}, \mu}$. Ввиду соотношения (1.5), теорема доказана.

Перейдем к изучению связи локальных размерностей с размерностями множеств.

Следующая теорема представляет собой модифицированную форму утверждений, доказанных Биллингсли [8] и Янг [27].

Теорема 1.5. *Предположим, что выполнено условие (ССЦ). Пусть μ — конечная мера на $\mathcal{A}$, $F \in \mathcal{A}$, $F \subset \Lambda$, причем $\mu(F) > 0$. Предположим, что существуют постоянные $\underline{d}$ и $\bar{d}$ такие, что $0 \leq \underline{d} \leq \bar{d} < \infty$ и при любом $x \in F$*

$$\underline{d} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(C_n(x))}{\ln[\beta_n(x)]} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(C_n(x))}{\ln[\beta_n(x)]} \leq \bar{d}. \quad (1.6)$$

Тогда $\underline{d} \leq \hat{D}_{\mathcal{C}}(F) \leq \bar{d}$. В частности, если локальная размерность $d_{\mathcal{C}, \mu}(x)$ существует всюду на F и постоянна: $d_{\mathcal{C}, \mu}(x) \equiv d_{\mathcal{C}, \mu}$, то $\hat{D}_{\mathcal{C}}(F) = d_{\mathcal{C}, \mu}$.

Доказательство. Пусть Δ — подмножество μ -атомов в F . Если $\Delta \neq \emptyset$, то $\underline{d} = 0$. Обозначим $F' = F \setminus \Delta$. Поскольку $\hat{D}_{\mathcal{C}}(\Delta) = 0$, то $\hat{D}_{\mathcal{C}}(F) = \hat{D}_{\mathcal{C}}(F')$. Таким образом, достаточно доказать теорему для множества F' . Мы сразу предполагаем, что мера μ неатомическая.

1. Пусть $G \in \mathcal{A}$, $G \subset \Lambda$ и $\mu(G) > 0$; предположим, что существуют вещественные числа $\underline{d}' \leq \bar{d}'$ и натуральное число N такие, что для любого $x \in G$ и для любого $n \geq N$

$$\underline{d}' \leq \frac{\ln \mu(C_n(x))}{\ln[\beta_n(x)]} \leq \bar{d}'. \quad (1.7)$$

Рассмотрим разбиение $S^T = \bigcup_{i=1}^{m_n} C_{n_i}(x^{(i)})$ с $n_i \geq n$, $1 \leq i \leq m_n$. При любом $\alpha > 1$

$$\sum_{i=1}^{m_n} [\mu(C_{n_i}(x^{(i)}))]^\alpha \leq \max_{1 \leq i \leq m_n} [\mu(C_{n_i}(x^{(i)}))]^{\alpha-1} \mu(S^T).$$

Поскольку пространство S^T компактно и при любом $n \geq 1$ функция $\mu(C_n(x))$ непрерывна, то $\mu(C_n(x)) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ равномерно по x . Поэтому мы имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i [\mu(C_{n_i}(x^{(i)}))]^\alpha = 0. \quad (1.8)$$

Из второго неравенства в формуле (1.7) вытекает: $(\beta_{n_i}(x^{(i)}))^{\bar{d}'} \leq \mu(C_{n_i}(x^{(i)}))$ и, ввиду (1.8), $\hat{H}_{\mathcal{C}}^{\bar{d}'}(G) = 0$. Таким образом, $\hat{D}_{\mathcal{C}}(G) \leq \bar{d}'\alpha$, и, поскольку $\alpha > 1$ выбрано произвольно, $\hat{D}_{\mathcal{C}}(G) \leq \bar{d}'$. В силу первого неравенства в (1.7), для любого покрытия $\{C_{n_i}(x^{(i)})\}$ множества G с индексами $n_i > N$

$$\sum_i (\beta_{n_i}(x^{(i)}))^{\bar{d}'} \geq \sum_i \mu(C_{n_i}(x^{(i)})) \geq \mu(G) > 0.$$

Из этого вытекает, что $\hat{H}_{\mathcal{C}}^{\bar{d}'}(G) > 0$ и, следовательно, $\underline{d}' \leq \hat{D}_{\mathcal{C}}(G)$. Таким образом, $\underline{d}' \leq \hat{D}_{\mathcal{C}}(G) \leq \bar{d}'$.

2. Для любого $N \in \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество

$$F_N^\varepsilon = \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x: x \in F, \underline{d} - \varepsilon \leq \frac{\ln \mu(C_n(x))}{\ln[\beta_n(x)]} \leq \bar{d} + \varepsilon \right\}.$$

Легко видеть, что $F = \uparrow \lim_{N \rightarrow \infty} F_N^\varepsilon$. Ясно также, что множества F_N^ε измеримы и $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(F_N^\varepsilon) = \mu(F)$. Выше мы доказали, что $\underline{d} - \varepsilon \leq \hat{D}_{\mathcal{C}}(F_N^\varepsilon) \leq \bar{d} + \varepsilon$, коль скоро $\mu(F_N^\varepsilon) > 0$. Из сказанного вытекает, что $\hat{D}_{\mathcal{C}}(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{D}_{\mathcal{C}}(F_N^\varepsilon)$ и, следовательно, $\underline{d} - \varepsilon \leq \hat{D}_{\mathcal{C}}(F) \leq \bar{d} + \varepsilon$. Поскольку ε — произвольное положительное число, наше утверждение доказано.

Пример 6.8 в работе [16] показывает, что, по крайней мере, второе неравенство в теореме 1.3 теряет силу даже в простейших случаях, если $\gamma = 0$. Тем не менее, равенства $D_{\mathcal{C}}(F) = \hat{D}_{\mathcal{C}}(F) = D_H(F)$ справедливы, при некоторых слабых ограничениях, и в этом случае. Следующая теорема — шаг в этом направлении.

Теорема 1.6. Пусть μ — конечная мера на $\mathcal{A}$, и пусть выполнены условия (ССЦ), (КИМ) и $(\mu\text{-P})$. Предположим, что $F \in \mathcal{A}$, $\mu(F) = \mu(S^T)$ и что всюду на F определена размерность $d_{\mathcal{C},\mu}(x) \equiv d$. Тогда $D_H(F) = D_{\mathcal{C}}(F) = \hat{D}_{\mathcal{C}}(F) = d$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1.3, имеем $H_{\mathcal{U}}^{\alpha}(F) \leq H_{\mathcal{C}}^{\alpha}(F)$, и поэтому

$$D_H(F) \leq D_{\mathcal{C}}(F). \quad (1.9)$$

Далее, согласно теореме 1.5, $d = \hat{D}_{\mathcal{C}}(F)$, а по теореме 1.4 $d_{\mathcal{B},\mu} = d$ на множестве $\tilde{F}$ с $\mu(\tilde{F}) = \mu(S^T)$. Фиксируем $N > N_0$. Рассмотрим множество $\tilde{F}_N^{\varepsilon} \subset \tilde{F}$, на котором $\ln[\mu(B(x, r))]/\ln|B(x, r)| \geq d - \varepsilon$ при любом $r \leq N^{-1}$. При $\delta < N^{-1}$ для любого δ -покрытия множества $\tilde{F}_N^{\varepsilon}$ шарами $\{B(x_i, r_i)\}$ с $x_i \in \tilde{F}_N^{\varepsilon}$ имеем: $\sum_i (|B(x_i, r_i)|)^{d-\varepsilon} \geq \sum_i \mu(B(x_i, r_i)) \geq \mu(\tilde{F}_N^{\varepsilon})$, где $\mu(\tilde{F}_N^{\varepsilon}) > 0$ при достаточно больших N . Отсюда следует, что для таких N $D_H(\tilde{F}_N^{\varepsilon}) \geq d - \varepsilon$. Очевидно, $\tilde{F} = \uparrow \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{F}_N^{\varepsilon}$, и поэтому $D_H(\tilde{F}) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_H(\tilde{F}_N^{\varepsilon}) \geq d - \varepsilon$. В силу произвольности выбора числа ε , $D_H(F) \geq D_H(\tilde{F}) \geq d = \hat{D}_{\mathcal{C}}(F)$; по теореме 1.2 $\hat{D}_{\mathcal{C}}(F) \geq D_{\mathcal{C}}(F)$. Отсюда и из (1.9) вытекает утверждение теоремы.

Хаусдорфова размерность $D_H(\mu)$ конечной борелевской меры μ на метрическом пространстве Λ определяется следующим образом:

$$D_H(\mu) = \inf \{D_H(Z): Z \subset \Lambda, \mu(Z) = \mu(\Lambda)\}.$$

Следующее предложение является аналогом теоремы Янг [27], в которой рассматривается связь «шаровой» локальной размерности и хаусдорфовой размерности мер в $\mathbf{R}^n$.

Следствие 1.1. Пусть μ — конечная ρ -борелевская мера на $\Lambda \subset S^T$, и пусть выполнены условия (ССЦ), (КИМ) и $(\mu\text{-P})$. Если $d_{\mathcal{C},\mu}(x) = d$ μ -почти всюду на Λ , то $D_H(\mu) = d$.

Доказательство. Пусть

$$G = \left\{x: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[\mu(C_n(x))]}{\ln[\beta_n(x)]} = d\right\}.$$

Используя теорему 1.6, получаем $D_H(\mu) \leq D_H(G) = d$. С другой стороны, пусть $\mu(Z) = \mu(\Lambda)$; тогда $\mu(Z \cap G) = \mu(\Lambda) > 0$, и, по той же теореме, $D_H(Z \cap G) = d$; поэтому $D_H(\mu) \geq \inf\{D_H(Z \cap G): Z \subset \Lambda, \mu(Z) = \mu(\Lambda)\} = d$. Тем самым следствие доказано.

§ 2. Масштабные метрики в пространстве последовательностей

Как и раньше, S — конечное множество; пусть N — число элементов этого множества (мы предполагаем, что $N > 1$; не умаляя общности, можно отождествить S с множеством $\{1, \dots, N\}$); $\mathbf{N}$ и $\mathbf{R}$ означают, соответственно, множества всех натуральных и вещественных чисел; $S^{\mathbf{N}}$ — пространство всех S -значных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$. Для любой последовательности $x \in S^{\mathbf{N}}$ мы рассматриваем цилиндрическое

множество $C_n(x) = \{y: y \in S^N, y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n\}$; $\mathcal{A}$ обозначает σ -алгебру в S^N , порожденную всеми цилиндрическими множествами; $\mathcal{T}$ обозначает топологию, порожденную этими множествами.

Фиксируем целое число $m \geq 0$; если $m = 0$, зададим функции $\lambda_n(s)$, $s \in S$, со значениями в $[0, 1]$, которые мы называем *функциями масштаба*; если $m \geq 1$, мы зададим *условные функции масштаба* $\lambda_n(s | s_1, \dots, s_m)$, $n \geq m + 1$, со значениями в $[0, 1]$ (здесь $s, s_k \in S$ ($1 \leq k \leq m$)). Мы будем называть значения функций $\lambda_n(s)$ *коэффициентами масштаба*, а значения функций $\lambda_n(s | s_1, \dots, s_m)$ — *условными коэффициентами масштаба* в состоянии s при условии, что до этого мы находились в состояниях $s_1, \dots, s_m$; m называется *памятью масштаба*; если $m = 0$, мы говорим, что у масштаба нет памяти. Для единообразия обозначений мы часто будем писать $\lambda_n(s | s_1, \dots, s_n)$ вместо $\lambda_n(s)$ в случае $m = 0$; надеемся, что это не вызовет затруднений.

Выберем также натуральное число $n_0 \geq m$. Если $n_0 = m = 0$, мы обозначим: $a_n(x) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(x_i)$ при $n \geq 1$; если $n_0 > 0$, то

$$a_n(x) = \prod_{i=n_0+1}^n \lambda_i(x_i | x_{i-m}, \dots, x_{i-1}), \quad n > n_0.$$

При $n_0 > 0$ мы рассмотрим некоторое множество $\tilde{\Lambda}_0 \subset S^{n_0}$ и цилиндрическое множество $\Lambda_0 = \{x: x \in S^N, (x_1, \dots, x_{n_0}) \in \tilde{\Lambda}_0\}$; обозначим

$$\Lambda = \{x \in S^N: \lambda_i(x_i | x_{i-m}, \dots, x_{i-1}) > 0, i > n_0\} \cup \Lambda_0,$$

$$\Lambda_n = \{x \in S^N: a_n(x) > 0\} \cup \Lambda_0, \quad n > n_0.$$

Ясно, что $\Lambda = \bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} \Lambda_n$ и $\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n$, $n > n_0$. Каждая функция $a_n(x)$ постоянна на цилиндрических множествах $C_n(x^{(i)})$. Поэтому Λ_n — открыто-замкнутые множества в топологии $\mathcal{T}$. Из сказанного вытекает, что множество Λ замкнуто и $\Lambda \in \mathcal{A}$.

Множество Λ можно интерпретировать как множество всех «допустимых», или «разрешенных», последовательностей. В дальнейшем мы предполагаем, что $\Lambda \neq \emptyset$, коль скоро $n_0 > 0$; если же $n_0 = m = 0$, то $\Lambda = \emptyset$.

Обозначим $\tilde{C}_n(x) = C_n(x) \cap \Lambda$.

Рассмотрим в Λ метрику ρ . Обозначим через $B(x, r)$ открытый шар в Λ радиуса r с центром в $x \in \Lambda$; $|A|$ означает диаметр множества $A \subset \Lambda$, $[A]$ — ρ -замыкание этого множества; $A' = S^N \setminus A$; $\mathcal{T}_\Lambda$ — сужение на Λ топологии $\mathcal{T}$.

1. *Масштабные метрики.* Мы будем говорить, что метрика ρ в множестве Λ есть *масштабная метрика с коэффициентами масштаба* $\lambda_n(s | s_1, \dots, s_m)$, если существуют положительные постоянные b и b_1 такие, что при $\beta_n(x) = b_1 a_n(x)$, $N_0 = n_0 + 1$ выполнены условия (ССЦ) и (КИМ) из § 1.

Иными словами, при любом $x \in \Lambda$ и при любом $n > n_0$ выполнены следующие условия:

(ССЦ) *Скорость сжатия цилиндрических множеств*:

$$|C_n(x)| \leq b_1 a_n(x); \quad (2.1)$$

(КИМ) *Конечность индекса Морана*: $L(b) < \infty$, где L — индекс Морана относительно функций $\beta_n(x) = b_1 a_n(x)$.

З а м е ч а н и е 2.1. Масштабные метрики, определяемые данным набором функций λ_n , могут быть не эквивалентны.

Пространство (Λ, ρ) называется *масштабным метрическим пространством*. Если при $n > n_0$ коэффициенты $\lambda_n(s \mid s_1, \dots, s_m)$ не зависят от n , мы говорим, что метрика ρ *стационарна*; в этом случае пространство (Λ, ρ) называется *стационарным масштабным метрическим пространством*.

2. Равномерно разделяющие масштабные метрики. Метрика ρ в Λ называется *равномерно разделяющей масштабной метрикой*, если выполнены условие (ССЦ) и следующее условие:

(РОЦ) *Равномерная отделимость цилиндрических множеств*: существует положительная постоянная b_2 такая, что при любых $x \in \Lambda$, $n \in \mathbb{N}$

$$\text{если } y \notin \tilde{C}_n(x), \text{ то } \rho(x, y) > b_2 a_n(x). \quad (2.2)$$

З а м е ч а н и е 2.2. В отличие от условия (КИМ), условия (ССЦ) и (РОЦ) можно сформулировать в эквивалентных наглядных «геометрических» терминах: при любом $x \in \Lambda$ и при любом $n > n_0$

$$\text{если } r > b_1 a_n(x), \text{ то } \tilde{C}_n(x) \subset B(x, r); \quad (2.1')$$

$$\text{если } r \leq b_2 a_n(x), \text{ то при любом } z \in \tilde{C}_n(x) \text{ шар } B(z, r) \subset \tilde{C}_n(x). \quad (2.2')$$

Таким образом, если условие (РОЦ) выполнено, то выполнены условия (ЖЦ) (см. § 1) и (КИМ), причем $L(b_2/b_1) = 1$.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим числа m и n_0 , функции $a_n(x)$, определенные выше, и положительное число c ; запись $x \sim^n y$ означает: $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n, x_{n+1} \neq y_{n+1}$. Легко убедиться, что

$$\rho(x, y) = \begin{cases} c, & \text{если } x_n \neq y_n \text{ при некотором } n \leq n_0, \\ c a_{n-n_0}(x) = c a_{n-n_0}(y), & \text{если } x \sim^n y \text{ при некотором } n > n_0, \\ 0, & \text{если } x = y, \end{cases}$$

является равномерно разделяющей масштабной метрикой в Λ (при этом мы можем положить $b_1 = b_2 = c$). Замечание 2.2 показывает, что в этом случае $\tilde{C}_n(x) = B(x, r)$, если $c a_n(x) < r < c a_{n-1}(x)$, $x \in \Lambda$.

Пример 2.2. Пусть $m = 0$, $N < \infty$, $\lambda(s) \equiv \lambda$ и пусть ϕ — метрика в S ; обозначим: $\alpha = \min_{x, y \in S, x \neq y} \phi(x, y)$; $\beta = \max_{x, y \in S} \phi(x, y)$. Если $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$, мы положим

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \phi(x_n, y_n).$$

Легко убедиться, что ρ — равномерно разделяющая масштабная метрика в пространстве S^N , причем $b_1 = \beta\lambda/(1 - \lambda)$, $b_2 = \alpha$.

Широкий класс масштабных метрик в Λ индуцируется фракталами в общих метрических пространствах (см. ниже § 5).

3. Масштабные метрики со свойством (CP). Пусть $\Lambda \subset S^N$ и ρ — масштабная метрика в Λ с коэффициентами $\lambda_k(\cdot | \cdot)$. Обозначим:

$$g = \inf \{ \lambda_k(s | s_1, \dots, s_m); s_1, \dots, s_m, s \in S, \lambda_k(s | s_2, \dots, s_m) > 0, k \in \mathbb{N} \}. \quad (2.3)$$

Условие (CP) выполнено, если $g > 0$, причем можно положить $\gamma = g$.

4. Усреднимые масштабные метрики. Обсудим, наконец, условие (μ -P) из § 1.

Будем говорить, что масштабная метрика ρ *усреднима относительно меры μ* (или *просто μ -усреднима*), если выполнено следующее условие:

(У) для μ -почти всех $x \in \Lambda$ существует конечный положительный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln a_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^n \ln \lambda_i(x_i | x_{i-m}, \dots, x_{i-1}) \stackrel{\text{def}}{=} -\bar{h}_\lambda(x) \quad (2.4)$$

(сходное условие было введено в работе [25]). Легко убедиться в том, что всякая усреднимая метрика удовлетворяет условию (μ -P). Как показывают приведенные ниже примеры, это понятие тесно связано с эргодической теоремой, законом больших чисел и теоремами о средних значениях.

Пример 2.3. Пусть ρ — стационарная масштабная метрика и μ — трансляционно инвариантная конечная мера на $\mathcal{A}$. Обозначим: $\tilde{\mu}$ — трансляционно инвариантная мера на S^Z , совпадающая с μ на S^N ;

$$h_\mu = - \int_{\Lambda} [\ln \mu\{x_1 | \dots, x_{-1}, x_0\}] \tilde{\mu}(dx);$$

$$h_{\lambda, \mu} = - \int_{\Lambda} [\ln \lambda(x_{m+1} | x_1, \dots, x_m)] \mu(dx).$$

Условие (У) выполнено в силу эргодической теоремы Биркгофа; поскольку коэффициенты масштаба $\lambda(x_{m+1} | x_1, \dots, x_m) < 1$, то μ -п.в. $\bar{h}_\lambda(x) > 0$.

Таким образом, любая стационарная масштабная метрика усреднима относительно всякой трансляционно инвариантной меры μ . Очевидно, если мера μ эргодична, то $\bar{h}_\lambda(x) \equiv h_{\lambda,\mu}$.

Пример 2.4. Если для любого $x \in \Lambda$ последовательность $\{-\ln \lambda_n(x_n | x_{n-m}, \dots, x_{n-1})\}$ почти периодически по Беликовичу и ее среднее значение $\bar{h}_\lambda(x) > 0$, то метрика ρ усреднима относительно любой конечной меры.

Пример 2.5. Пусть $m = 0$ и P — вероятностная мера на $\mathcal{A}$, относительно которой «координатные» случайные величины $X_1, X_2, \dots$ независимы; кроме того, пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n E[\ln \lambda_k(X_k)] = -\bar{h}_\lambda > 0$ и $\sum_{k=1}^\infty D[\ln \lambda_k(X_k)]/k^2 < \infty$. Согласно усиленному закону больших чисел Колмогорова, метрика ρ P -усреднима.

Еще один важный класс усреднимых нестационарных метрик — случайные масштабные метрики — будет рассмотрен в § 4.

5. Некоторые свойства масштабных метрических пространств. Для удобства ссылок мы переформулируем основной результат § 1 — теорему 1.6.

Теорема 2.1. Пусть $F \in \mathcal{A}$, μ — конечная мера на $\mathcal{A}$, $\mu(F) = \mu(S^N)$, и пусть ρ есть μ -усреднимая масштабная метрика в Λ . Предположим, что всюду на множестве $F \in \mathcal{A}$ определена размерность $d_{\mathcal{C},\mu}(x) \equiv d$. Тогда $D_H(F) = D_{\mathcal{C}}(F) = \hat{D}_{\mathcal{C}}(F) = d$.

Мы рассмотрим ниже условия существования локальных размерностей.

Обозначим через τ преобразование сдвига в S^N , определенное, как обычно: если $x = (x_1, x_2, \dots)$, то $(\tau x)_i = x_{i+1}$. Под трансляционной инвариантностью или эргодичностью меры мы понимаем соответствующее ее свойство относительно некоторой полугруппы сдвигов τ^k , $k \geq k_0$.

Теорема 2.2. Пусть μ — эргодическая трансляционно инвариантная конечная мера на $\mathcal{A}$, причем $\mu(S^N) = \mu(\Lambda)$, и ρ есть μ -усреднимая масштабная метрика. Тогда μ -п.в. определена локальная размерность $d_{\mathcal{C},\mu}$ и

$$d_{\mathcal{C},\mu}(x) = \frac{h_\mu}{\bar{h}_\lambda(x)}. \quad (2.5)$$

В частности, если ρ стационарна, то $d_{\mathcal{C},\mu}(x) = h_\mu/h_{\lambda,\mu}$.

Доказательство. Из «обращенного назад» варианта теоремы Шеннона–Макмиллана–Бреймана вытекает, что μ -п.в.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mu(C_n(x)) = -h_\mu. \quad (2.6)$$

Остается воспользоваться соотношениями (1.4) и (2.4).

Следующие предложения непосредственно вытекают из теорем 2.1, 2.2 и следствия 1.1.

Следствие 2.1. Если выполнены условия теоремы 2.1, причем мера μ трансляционно инвариантна и эргодична, то $D_H(F) = D_{\mathcal{E}}(F) = \hat{D}_{\mathcal{E}}(F) = h_{\mu}/h_{\lambda, \mu}$.

Следствие 2.2. Пусть μ — эргодическая трансляционно инвариантная мера в пространстве $S^{\mathbb{N}}$, оснащенном стационарной масштабной метрикой с функциями масштаба $\lambda(\cdot | \cdot)$; тогда $D_H(\mu) = h_{\mu}/h_{\lambda, \mu}$.

З а м е ч а н и е 2.3. Теорема 1.4 и теорема 2.10 в [24] показывают, что определенная в [24] насыщенная корреляционная размерность сдвигов в стационарном масштабном метрическом пространстве Λ , соответствующая эргодической трансляционно инвариантной мере μ , совпадает с $h_{\mu}/h_{\lambda, \mu}$.

З а м е ч а н и е 2.4. Отметим, что при фиксированных коэффициентах масштаба локальные размерности $d_{\mathcal{B}, \mu}$ и $d_{\mathcal{E}, \mu}$ не зависят от выбора масштабной метрики ρ .

П р и м е р 2.6. (Масштабные метрики без памяти.) Пусть $m = 0$. Рассмотрим произвольную масштабную метрику ρ с коэффициентами масштаба $\lambda(b)$, $b \in S$. Обозначим через α_0 (единственное) решение уравнения $\sum_{\alpha \in S} \lambda(b)^{\alpha} = 1$. Рассмотрим случайную последовательность Бернулли с маргинальным распределением $p(b) = \lambda(b)^{\alpha_0}$, $b \in S$; меру P в $S^{\mathbb{N}}$, соответствующую этой последовательности, мы называем *масштабной мерой Бернулли*. Метрика ρ P -усреднима (см. пример 2.3). Ясно, что $P(C_n(x)) = [a_n(x)]^{\alpha_0}$. Таким образом, всюду на $S^{\mathbb{N}}$ существует $d_{\mathcal{E}, P} = \alpha_0$. По теореме 2.1 $\alpha_0 = D_H(S^{\mathbb{N}})$. В силу теоремы 1.4, $d_{\mathcal{B}, P} = d_{\mathcal{E}, P}$. Мы имеем: $h_P = \alpha_0 \sum_{b \in S} \lambda(b)^{\alpha_0} \ln(1/\lambda(b))$; $h_{\lambda, P} = \sum_{b \in S} \lambda(b)^{\alpha_0} \ln(1/\lambda(b))$, и, таким образом, $D_H(S^{\mathbb{N}}) = d_{\mathcal{B}, P} = d_{\mathcal{E}, P} = \alpha_0 = h_P/h_{\lambda, P}$.

В § 3–5 результат, полученный в примере 2.6, обобщен в различных направлениях; примененный здесь метод нахождения хаусдорфовой размерности, основанный на построении адекватной «масштабной» меры и вычислении ее локальной размерности, использован и в дальнейшем.

§ 3. Масштабные меры и хаусдорфова размерность в $S^{\mathbb{N}}$

Мы используем здесь обозначения, введенные в § 2. Предположим, что ρ — стационарная масштабная метрика с коэффициентами $\lambda(s_{m+1} | s_1, \dots, s_m)$. Пусть $m > 0$; обозначим: $\Phi = \mathbf{R}^{S^m}$ (пространство всех N^m -мерных векторов $\{y(s_1, \dots, s_m), s_1, \dots, s_m \in S\}$). При любом $\alpha > 0$ мы рассматриваем в Φ оператор V_{α} : $y \mapsto V_{\alpha}y = z$, где

$$z(x_1, \dots, x_m) = \sum_{x_{m+1} \in S} \lambda^{\alpha}(x_{m+1} | x_1, \dots, x_m) y(x_2, \dots, x_m, x_{m+1}). \quad (3.1)$$

Очевидно, что V_α — неотрицательный линейный оператор. В дальнейшем мы предполагаем, что операторы V_α неразложимы, т.е. для любых $(d_1, \dots, d_m), (e_1, \dots, e_m) \in S^m$ мы имеем: $\lambda(t_{i+1} | t_{i-m+1}, \dots, t_i) > 0$, $m \leq i \leq n-1$, при некоторых $t_1, \dots, t_n$ (здесь $t_1 = d_1, \dots, t_m = d_m, t_{n-m+1} = e_1, \dots, t_n = e_m$).

Напомним, что спектральный радиус $r(\alpha)$ оператора V_α — это наибольший модуль его собственных значений; по теореме Перрона–Фробениуса (см., например, гл. 2, § 2 в [1]), $r(\alpha)$ является собственным значением оператора V_α . Рассмотрим обобщенное уравнение Морана:

$$r(\alpha) = 1. \quad (3.2)$$

Функция $r(\cdot)$ — непрерывная убывающая функция, причем $r(0) \geq 1$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} r(\alpha) = 0$; поэтому существует единственная точка α_0 такая, что $r(\alpha_0) = 1$ (единственность решения уравнения (3.2) вытекает также из теоремы 3.1, приведенной ниже).

Согласно теореме Перрона–Фробениуса, существует положительный инвариантный вектор $\{w(x_1, \dots, x_m), x_1, \dots, x_m \in S\}$ оператора V_{α_0} . Рассмотрим функцию

$$p(x_{m+1} | x_1, \dots, x_m) = \frac{\lambda^{\alpha_0}(x_{m+1} | x_1, \dots, x_m) w(x_2, \dots, x_{m+1})}{w(x_1, \dots, x_m)}.$$

Легко убедиться, что

$$\sum_{x_{m+1}} p(x_{m+1} | x_1, \dots, x_m) = \frac{w(x_1, \dots, x_m)}{w(x_1, \dots, x_m)} = 1.$$

Поэтому $p(x_{m+1} | x_1, \dots, x_m)$ является вероятностью перехода порядка m .

Мы полагаем здесь $\tilde{\Lambda}_0 = S^m$ при $n_0 = m$ и $\tilde{\Lambda}_0 = \{(x_1, \dots, x_{n_0}) : \lambda(x_i | x_{i-m}, \dots, x_{i-1}) > 0, m < i \leq n_0\}$ при $n_0 > m$. Согласно теореме Перрона–Фробениуса, оператор $V_{\alpha_0}^*$ обладает положительным инвариантным вектором $v(x_1, \dots, x_m)$; мы нормируем его условием $\sum_{x_i \in S} w(x_1, \dots, x_m) v(x_1, \dots, x_m) = 1$. Обозначим: $p_0(x_1, \dots, x_{n_0}) = w(x_{n_0-m+1}, \dots, x_{n_0}) v(x_{n_0-m+1}, \dots, x_{n_0})$ при $n_0 = m$ и $p_0(x_1, \dots, x_{n_0}) = w(x_{n_0-m+1}, \dots, x_{n_0}) v(x_{n_0-m+1}, \dots, x_{n_0}) \prod_{i=m+1}^{n_0} p(x_i | x_{i-m}, \dots, x_{i-1})$ при $n_0 > m$.

Масштабной мерой в S^N , определяемой функцией масштаба λ , мы называем марковскую (порядка m) меру μ в S^N с вероятностями перехода $p(x_{m+1} | x_1, \dots, x_m)$ и начальным распределением p_0 .

Таким образом, если $x \in \Lambda$ и $n > n_0$, то

$$\begin{aligned} \mu(C_n(x)) &= \prod_{i=n_0+1}^n p(x_i | x_{i-m}, \dots, x_{i-1}) p_0(x_1, \dots, x_{n_0}) \\ &= (a_{n-n_0}(x))^{\alpha_0} \frac{w(x_{n-m+1}, \dots, x_n)}{w(x_{n_0-m+1}, \dots, x_{n_0})} p_0(x_1, \dots, x_{n_0}). \end{aligned}$$

Хорошо известно, что мера μ трансляционно инвариантна и эргодична; следовательно, метрика ρ является μ -усреднимой.

Ясно, что $\psi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{p_0(x_1, \dots, x_{n_0}) : (x_1, \dots, x_{n_0}) \in \tilde{\Lambda}_0\} > 0$.

Легко убедиться, что $\mu(\Lambda_n) = \mu(\tilde{\Lambda}_0) > 0$ при любом $n > n_0$, и, поскольку $\Lambda_n \downarrow \Lambda$, мы имеем: $\mu(\Lambda) = \mu(\tilde{\Lambda}_0) > 0$. Далее, очевидно, что при $n > n_0$

$$\psi_0 t_0^{-1}(a_n(x))^{\alpha_0} \leq \mu(C_n(x)) \leq t_0(a_n(x))^{\alpha_0}, \quad (3.3)$$

где $t_0 = \max\{w(s_1, \dots, s_m)\} / \min\{w(s_1, \dots, s_m)\}$.

Если $t = 0$, то μ — масштабная мера Бернулли, определенная в примере 2.6. В этом случае $\mu(C_n(x)) = (a_n(x))^{\alpha_0}$.

Поскольку $a_n(x) \rightarrow 0$, то для любой последовательности $x \in \Lambda$ существует локальная размерность

$$d_{\epsilon, \mu}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(C_n(x))}{\ln[a_n(x)]} = \alpha_0. \quad (3.4)$$

Из теоремы 2.1 при $F = \Lambda$ и следствия 2.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1. Хаусдорфова размерность $D_H(\Lambda) = \alpha_0 = h_\mu / h_{\lambda, \mu}$.

Напомним, что $\Lambda = S^N$, если все коэффициенты масштаба положительны.

Пример 3.1. Пусть $S = \{1, \dots, N\}$. Рассмотрим в S^N масштаб без памяти с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_N$:

$$V_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1^\alpha & \lambda_2^\alpha & \dots & \lambda_N^\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^\alpha & \lambda_2^\alpha & \dots & \lambda_N^\alpha \end{pmatrix}.$$

В этом случае $r(\alpha) = \sum_i \lambda_i^\alpha$, и уравнение (3.2) сводится к уравнению Морана $\sum_i \lambda_i^\alpha = 1$ (см. [22]), причем $(w_1, \dots, w_N) = (1, \dots, 1)$; масштабная мера представляет собой меру Бернулли с $p(i) = \lambda_i^{\alpha_0}$; таким образом, $D_H(S^N) = \alpha_0$. Если $\lambda_i = \lambda$, $i = 1, \dots, N$, то $D_H(S^N) = \ln N / \ln(1/\lambda)$. Если масштаб имеет память 1, то

$$V_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda^\alpha(1|1) & \lambda^\alpha(2|1) & \dots & \lambda^\alpha(N|1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^\alpha(1|N) & \lambda^\alpha(2|N) & \dots & \lambda^\alpha(N|N) \end{pmatrix}.$$

Если при некотором α_0 матрица V_{α_0} — стохастическая, то $r(V_{\alpha_0}) = 1$, $(w_1, \dots, w_N) = (1, \dots, 1)$ и $D_H(S^N) = \alpha_0$.

Следующее утверждение является уточнением предыдущей теоремы для равномерно разделяющих метрик.

Теорема 3.2. Пусть ρ — равномерно разделяющая метрика. Для любого борелевского множества $F \subset \Lambda$ и для любой масштабной меры μ

$$m_0^{-1}(2b_2)^{\alpha_0} \mu(F) \leq H_{\mathcal{C}}^{\alpha_0}(F) \leq \psi_0^{-1} m_0(b_1)^{\alpha_0} \mu(F),$$

$$b_1^{-\alpha_0} b_2^{2\alpha_0} g^{\alpha_0} m_0^{-1} \mu(F) \leq H^{\alpha_0}(F) \leq \psi_0^{-1} m_0(b_1)^{\alpha_0} \mu(F),$$

где постоянная g определена соотношением (2.3). Следовательно, хаусдорфова размерность точна.

Доказательство. Из свойств равномерно разделяющих метрик следует, что

$$(2b_2)^{\alpha_0} \sum_i (a_{n_i}(x^{(i)}))^{\alpha_0} \leq \sum_i |\tilde{C}_{n_i}(x^{(i)})|^{\alpha_0} \leq (b_1)^{\alpha_0} \sum_i (a_{n_i}(x^{(i)}))^{\alpha_0}.$$

Из этих неравенств и соотношения (3.3) вытекает, что

$$H_{n,\mathcal{C}}^{\alpha_0}(F) \leq \psi_0^{-1} m_0(b_1)^{\alpha_0} \inf \left\{ \sum_i \mu(C_{n_i}(x^{(i)})) \right\},$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям $\{C_{n_i}(x^{(i)})\}$ множества F цилиндрическими множествами с номерами $n_i \geq n$. По теореме об аппроксимации мер, $\inf \sum_i \mu(C_{n_i}(x^{(i)})) = \mu(F)$, и, следовательно, $\hat{H}_{n,\mathcal{C}}^{\alpha_0}(F) \leq \psi_0^{-1} m_0(b_1)^{\alpha_0} \mu(F)$. Кроме того, $\sum_i (a_{n_i}(x^{(i)}))^{\alpha_0} \geq m_0^{-1} \sum_i \mu(C_{n_i}(x^{(i)})) \geq m_0^{-1} \mu(\cup_i C_{n_i}(x^{(i)})) \geq m_0^{-1} \mu(F)$, и поэтому $H_{n,\mathcal{C}}^{\alpha_0}(F) \geq m_0^{-1} (2b_2)^{\alpha_0} \mu(F)$. Остается сослаться на теорему 1.3 и теорему 1.2.

З а м е ч а н и е 3.1. Из теоремы 3.2 и соотношения (3.4) вытекает, что локальная размерность хаусдорфовой меры H^{α_0} тождественно равна α_0 . Таким образом, согласно следствию 1.1, *хаусдорфова размерность меры H^{α_0} равна хаусдорфовой размерности множества Λ .*

З а м е ч а н и е 3.2. Теоремы 2.2 и 1.5 показывают, что для любой масштабной метрики с коэффициентами λ и для любой эргодической трансляционно инвариантной меры μ существует множество $\Gamma \subset S^N$ такое, что $D_H(\Gamma) = h_\mu/h_{\lambda,\mu}$, и поэтому $\alpha_0 \geq h_\mu/h_{\lambda,\mu}$ для любой такой меры μ ; равенство достигается, например, если μ — масштабная мера с коэффициентами λ .

§ 4. Хаусдорфова размерность в S^N относительно случайной масштабной метрики

Наряду с пространством S^N мы рассмотрим пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ — произведение счетного множества копий измеримого пространства $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$. Обозначим элементы пространства Ω через $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, где $\omega_i \in \Omega_0$. Пусть Q — эргодическая трансляционно инвариантная вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Обозначим через τ и σ сдвиги влево в пространствах S^N и Ω соответственно.

Рассмотрим случайные коэффициенты масштаба без памяти, т.е. функции $\lambda(s; \omega_0)$, $s \in S$, $\omega_0 \in \Omega_0$, со значениями в $[0, 1]$; предположим, что при каждом выборе состояния s эти коэффициенты являются измеримыми функциями от ω_0 и что $\sum_{s \in S} \lambda(s; \omega_0) > 0$ при любом $\omega_0 \in \Omega_0$. Обозначим $a_n(x; \omega) = a_n(x_1, \dots, x_n; \omega) = \prod_{i=1}^n \lambda(x_i; \omega_i)$; $\Lambda_\omega = \{x \in S^N: \lambda(x_i; \omega_i) > 0, i \in N\}$.

Мы будем говорить, что семейство функций $\{\rho_\omega(x, y), \omega \in \Omega\}$ есть случайная масштабная метрика с коэффициентами масштаба $\lambda(s; \omega_0)$, если для Q -почти каждого $\omega \in \Omega$ функция $\rho_\omega(x, y)$ является масштабной метрикой в Λ_ω с коэффициентами масштаба $\lambda_k(s) = \lambda(s; \omega_k)$.

Если Ω_0 состоит из одной точки, это понятие сводится к понятию стационарной масштабной метрики без памяти (см. § 2).

Вычислим хаусдорфову размерность множества Λ_ω относительно случайной масштабной метрики ρ_ω . При любом $\alpha > 0$ и любом $\omega \in \Omega$ мы определим значения функции множеств $\mu_\omega^{(\alpha)}$ на цилиндрических множествах следующим образом: $\mu_\omega^{(\alpha)}(C_n(x)) = [Z_n(\omega)]^{-1} \prod_{i=1}^n \lambda^\alpha(x_i; \omega_i)$, $n \geq 1$, где $Z_n(\omega) = \prod_{i=1}^n [\sum_{x_i \in S} \lambda^\alpha(x_i; \omega_i)]$.

Легко видеть, что при любом ω эти соотношения определяют вероятностную продукт-меру с маргинальными распределениями $\rho_{\omega, i}^{(\alpha)}(x_i) = \lambda^\alpha(x_i; \omega_i) / \sum_{x_i \in S} \lambda^\alpha(x_i; \omega_i)$; мы называем ее случайной масштабной мерой.

Заметим, что $\mu_\omega^{(\alpha)}(C_n(x)) = 0$, если $a_n(x; \omega) = 0$. Отсюда легко вывести следующее утверждение.

Лемма 4.1. C Q -вероятностью 1 $\mu_\omega^{(\alpha)}(\Lambda_\omega) = 1$.

Рассмотрим вероятностную меру $R^{(\alpha)}$ на $\mathcal{A} \times \mathcal{F}$, заданную соотношением $R^{(\alpha)}(C) = \int_C \mu_\omega^{(\alpha)}(dx) Q(d\omega)$, $C \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}$.

Лемма 4.2. Мера $R^{(\alpha)}$ инвариантна относительно сдвига $\tau \times \sigma$.

Доказательство. Поскольку

$$\tau^{-1}(C_n(x_1, x_2, \dots)) = \cup_{x_0 \in S} C_{n+1}(x_0, x_1, x_2, \dots),$$

мы имеем:

$$\begin{aligned} \mu_\omega^{(\alpha)}(\tau^{-1}[C_n(x)]) &= \sum_{x_0 \in S} \frac{\prod_{i=1}^{n+1} \lambda^\alpha(x_{i-1}; \omega_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} [\sum_{x_{i-1} \in S} \lambda^\alpha(x_{i-1}; \omega_i)]} \\ &= \frac{\prod_{i=2}^{n+1} \lambda^\alpha(x_{i-1}; \omega_i)}{\prod_{i=2}^{n+1} [\sum_{x_{i-1} \in S} \lambda^\alpha(x_{i-1}; \omega_i)]} = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda^\alpha(x_i; \omega_{i+1})}{\prod_{i=1}^n [\sum_{x_i \in S} \lambda^\alpha(x_i; \omega_{i+1})]} \\ &= \mu_{\sigma(\omega)}^{(\alpha)}(C_n(x)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при любых $\omega \in \Omega$ и $A \in \mathcal{A}$ имеем: $\mu_\omega^{(\alpha)}(\tau^{-1}A) =$

$\mu_{\sigma(\omega)}^{(\alpha)}(A)$. Поэтому при любых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{F}$: $R^{(\alpha)}(\tau^{-1}A \times \sigma^{-1}B) = \int_{\sigma^{-1}B} \mu_{\omega}^{(\alpha)}(\tau^{-1}A) Q(d\omega) = \int_{\sigma^{-1}B} \mu_{\sigma(\omega)}^{(\alpha)}(A) Q(d\omega) = R^{(\alpha)}(A \times B)$. Отсюда вытекает наше утверждение.

Обозначим: $\ln^- x = \ln x$, если $0 < x < 1$, и $\ln^- x = 0$, если $x = 0$; $h_{\lambda, Q}(s) = -E[\ln^- \lambda(s; \omega_1)]$, $s \in S$. В дальнейшем мы предполагаем, что выполнено следующее условие:

$$h_{\lambda, Q}(s) < \infty, \quad s \in S. \quad (4.1)$$

Лемма 4.3. *С Q -вероятностью 1 метрика ρ_{ω} является $\mu_{\omega}^{(\alpha)}$ -усреднимой.*

Доказательство. Из эргодической теоремы Биркгофа вытекает, что с $R^{(\alpha)}$ -вероятностью 1 существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \lambda(x_i; \omega_i) = -\bar{h}_{\lambda}(x, \omega).$$

Поскольку все коэффициенты масштаба $\lambda(x_i; \omega_i) < 1$, то с Q -вероятностью 1 $\bar{h}_{\lambda}(x, \omega) > 0$ для $\mu_{\omega}^{(\alpha)}$ -почти всех $x \in S^{\mathbb{N}}$. Следовательно, метрика ρ_{ω} является $\mu_{\omega}^{(\alpha)}$ -усреднимой.

Лемма 4.4. 1. *С Q -вероятностью 1 существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln Z_n(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} P(\alpha)$.*

$$2. P(\alpha) = E[\ln \sum_{s \in S} \lambda^{\alpha}(s; \omega_0)].$$

Доказательство. При любых $s_0 \in S$, $\omega_0 \in \Omega_0$ имеем: $\alpha \ln[\lambda(s_0; \omega_0)] \leq \ln[\sum_{s \in S} \lambda^{\alpha}(s; \omega_0)] \leq \sum_{s \in S} \lambda^{\alpha}(s; \omega_0) \leq N$; в силу (4.1), $E[|\ln[\sum_{s \in S} \lambda^{\alpha}(s; \omega_0)]|] < \infty$. Поэтому, в силу эргодической теоремы Биркгофа, с Q -вероятностью 1 существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln Z_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln[\sum_{s \in S} \lambda^{\alpha}(s; \omega_i)]$; утверждение 2 справедливо в силу эргодичности меры Q .

Замечание 4.1. При любом $\omega \in \Omega$ меру $\mu_{\omega}^{(\alpha)}$ можно трактовать как гиббсовское случайное поле на $\mathbb{N}$, определяемое одночастичным потенциалом $U_{\omega}(x_i) = -\ln \lambda(x_i; \omega_i)$ и температурой α^{-1} ; величина $P(\alpha)$ представляет собой давление, соответствующее этому полю.

Лемма 4.5. *Уравнение*

$$P(\alpha) = 0 \quad (4.2)$$

имеет одно и только одно решение.

Доказательство. Из утверждения 2 леммы 4.4 вытекает, что $P(\cdot)$ — непрерывная убывающая функция; остается заметить, что $P(0) = \ln N > 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P(\alpha) = 0$ (здесь N — число элементов множества S).

Замечание 4.2. Единственность решения уравнения (4.2) вытекает также из приведенной ниже теоремы 4.1.

Обозначим через $D_H(F, \omega)$ хаусдорфову размерность множества $F \subset S^N$ относительно метрики ρ_ω ; $\hat{D}_\mathcal{C}(F, \omega)$ и $d_{\mathcal{C}, \mu_\omega}(x, \omega)$ — случайные аналогии величин $\hat{D}_\mathcal{C}(F)$ и $d_{\mathcal{C}, \mu}(x)$, определенных в § 1.

Лемма 4.6. *Предположим, что с Q -вероятностью 1*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda(x_n; \omega_0) < 1, \quad x \in \Lambda_\omega. \quad (4.3)$$

Пусть α_0 — решение уравнения (4.2); тогда с Q -вероятностью 1

$$d_{\mathcal{C}, \mu_\omega^{(\alpha_0)}}(x, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[\mu_\omega^{(\alpha_0)}(C_n(x))]}{\ln[a_n(x; \omega)]} = \alpha_0$$

для любого $x \in \Lambda$.

Доказательство. Из условия (4.3) вытекает, что с Q -вероятностью 1 при любом $x \in \Lambda_\omega$ имеем $\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln[a_n(x; \omega)] < 0$, и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[\mu_\omega^{(\alpha_0)}(C_n(x))]}{\ln[a_n(x; \omega)]} = \alpha_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1} \ln[Z_n^{(\alpha_0)}(\omega)]}{n^{-1} \ln[a_n(x; \omega)]} = \alpha_0.$$

Лемма доказана.

Разумеется, условие (4.3) выполнено, если $\text{ess sup}_{\omega_0 \in \Omega_0} \lambda(s; \omega_0) < 1$ при всех $s \in S$.

Из теоремы 2.1 и лемм 4.1 и 4.6 вытекает следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть ρ_ω — случайная масштабная метрика; α_0 — решение уравнения (4.2). Если выполнены условия (4.1) и (4.3), то с Q -вероятностью 1 $D_H(\Lambda_\omega, \omega) = \hat{D}_\mathcal{C}(\Lambda_\omega, \omega) = D_\mathcal{C}(\Lambda_\omega, \omega) = \alpha_0$.*

З а м е ч а н и е 4.3. В случае, когда $\lambda(s; \omega_1) \equiv \lambda(s)$, $s \in S$, уравнение (4.2) превращается в уравнение Морана $\sum_{s \in S} \lambda^\alpha(s) = 1$.

§ 5. Хаусдорфова размерность фракталов в общих метрических пространствах

В этом параграфе мы обобщим результаты § 3 и § 4 на общие метрические пространства. В первой части рассматриваются фракталы, определяемые детерминированными конструкциями с конечной памятью; во второй части — фракталы, определяемые случайными конструкциями без памяти.

5.1. Детерминированные фракталы. Пусть (M, ρ) — полное метрическое пространство; обозначим через $|A|$ — диаметр множества A и через $[A]$ — его замыкание. Пусть $S = \{1, \dots, N\}$ ($N \in \mathbb{N}$); $S^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$. Если дана последовательность $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n, \dots) \in S^N$, то $\mathbf{i}_n \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \dots, i_n)$. Очевидно, $\mathbf{i}_n \in S^n$ и, наоборот, любой вектор $\mathbf{i}^* \in S^n$ совпадает с сужением $\mathbf{i}_n$ некоторой последовательности $\mathbf{i} \in S^N$; поэтому мы иногда обозначаем через $\mathbf{i}_n$ или через $\mathbf{j}_n$ любой произвольно фиксированный вектор из S^n ; надеемся, что это не вызовет недоразумений.

Рассмотрим в S^* частичное упорядочение: для любого $i \in S^N$ положим $i_k < i_n$, если $k < n$.

Пусть дано семейство множеств $\{A_{i^*}, i^* \in S^*\}$. Обозначим $\tilde{A}_{i^*} = \bigcup_{j^* > i^*} A_{j^*}$. Ясно, что при любом $i \in S^N$ последовательность $\{\tilde{A}_{i_n}, n \in \mathbb{N}\}$ убывает. Семейство множеств $\{A_{i^*}, i^* \in S^*\}$ называется *конструкцией*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{A}_{i_n}| = 0$ при любом $i \in S^N$.

Рассмотрим произвольную конструкцию $\{A_{i^*}, i^* \in S^*\}$. При любой фиксированной последовательности $i \in S^N$ мы выберем элементы $x_{i_n} \in \tilde{A}_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку пространство (M, ρ) полно, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n}$ существует и не зависит от выбора элементов x_{i_n} в множестве $\tilde{A}_{i_n}$, поэтому он полностью определяется последовательностью i ; мы обозначим этот элемент через x_i . В результате этой процедуры мы получаем «фрактал» $F_{\{A\}}$, определяемый конструкцией $\{A_{i^*}\}$: это множество всех элементов x_i , $i \in S^N$. Легко убедиться, что множество $F_{\{A\}}$ замкнуто и $F_{\{A\}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i_n \in S^n} [\tilde{A}_{i_n}]$.

Будем говорить, что конструкции $\{A_{i^*}\}$ и $\{D_{i^*}\}$ *конъюнктивны*, если $A_{i^*} \cap D_{i^*} \neq \emptyset$ при любом $i^* \in S^*$. Ясно, что *конъюнктивные конструкции определяют один и тот же фрактал*.

Как и в § 3, фиксируем натуральные числа m и $n_0 \geq m$ и рассмотрим в S^N множество Λ_0 и функции масштаба $\lambda(i)$ при $m = 0$ и $\lambda(i | i_1, \dots, i_m)$ при $m > 0$ со значениями в интервале $[0, 1]$; при любом $i = (i_1, \dots, i_n, \dots)$ обозначим:

$$a_n(i) = \prod_{j=n_0+1}^n \lambda(i_j), \quad \text{если } n > n_0, m = 0;$$

$$a_n(i) = \prod_{j=n_0+1}^n \lambda(i_j | i_{j-m}, \dots, i_{j-1}), \quad \text{если } n > n_0, m > 0;$$

$$\Lambda = \{i: a_n(i) > 0, n \in \mathbb{N}\} \cap \Lambda_0; \quad \Lambda_n = \{i: a_n(i) > 0\} \cap \Lambda_0, \quad n > n_0.$$

Предположим, что $A_{i_n} = \emptyset$, коль скоро $i \notin \Lambda_n$; иными словами, если $i \notin \Lambda_n$, то множество A_{i_n} исключается из конструкции.

Для любого $n > n_0$ и для любого вектора $i \in \Lambda_n$ мы рассмотрим в $F_{\{A\}}$ множество $\Gamma_n(i) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j: j_n = i_n\}$; рассмотрим также «кодирующее» отображение $\kappa: F \rightarrow \Lambda \subset S^N$, определенное следующим образом: $\kappa(x_i) = (i_1, i_2, \dots)$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 5.1. *Предположим, что конструкция $\{A_{i^*}\}$ удовлетворяет следующему условию:*

(СЛО) *Слабая отделимость: при любом $n > n_0$ $[\tilde{A}_{i_n}] \cap [\tilde{A}_{j_n}] \cap F_{\{A\}} = ([\tilde{A}_{i_n}] \cap F_{\{A\}}) \cap ([\tilde{A}_{j_n}] \cap F_{\{A\}}) = \emptyset$, коль скоро $i, j \in \Lambda_n$ и $i_n \neq j_n$.*

Тогда:

1) отображение κ взаимно однозначно; при любых $n > n_0$ и $i, j \in \Lambda_n$;

2) $\Gamma_n(i) = F_{\{A\}} \cap [\tilde{A}_{i_n}]$;

3) если $i_n \neq j_n$, то $\Gamma_n(i) \cap \Gamma_n(j) = \emptyset$;

4) $F_{\{A\}} = \bigcup_{i \in S^N} \Gamma_n(i)$;

5) $C_n(i) \cap \Lambda = \kappa(\Gamma_n(i))$.

З а м е ч а н и е 5.1. Любое из следующих условий влечет условие (СлО):

(О-1) *Отделимость порядка 1:* при любом $n > n_0$ $[\tilde{A}_{i_n}] \cap [\tilde{A}_{j_n}] = \emptyset$, коль скоро $i, j \in \Lambda_n$ и $i_n \neq j_n$;

(О-2) *Отделимость порядка 2:* при любом $n > n_0$ $[\tilde{A}_{i_{n+1}}] \cap [\tilde{A}_{j_{n+1}}] = \emptyset$, коль скоро $i, j \in \Lambda_n$ и $i_n \neq j_n$.

Вообще, при любом $l \geq 2$ следующее условие влечет условие (СлО):

(О- l) *Отделимость порядка l :* при любом n $[\tilde{A}_{i_{n+l-1}}] \cap [\tilde{A}_{j_{n+l-1}}] = \emptyset$, коль скоро $i, j \in \Lambda_n$ и $i_n \neq j_n$.

Обозначим через ρ^* сужение метрики ρ на $F_{\{A\}}$. Ясно, что $\tilde{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \rho^* \circ \kappa^{-1}$ — метрика в Λ .

Лемма 5.2. $D_H(F_{\{A\}}) = D_H(\Lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение κ пространства $(F_{\{A\}}, \rho^*)$ на пространство $(\Lambda, \tilde{\rho})$ изометрично.

Лемма 5.3. Пусть выполнены условия (СлО) и

(СС) *Скорость сжатия множеств $\tilde{A}_{i_n}$:* если $n > n_0$, $i \in \Lambda_n$ и $r > b_1 a_n(i)$, то $\tilde{A}_{i_n} \subset B(z, r)$ при любом $z \in \tilde{A}_{i_n}$.

Тогда метрика $\tilde{\rho}$ в Λ удовлетворяет условию (ССЦ) из § 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (СС) вытекает, что конструкция $\{\Gamma_{i^*}\}$ в метрическом пространстве $(F_{\{A\}}, \rho^*)$ обладает следующим свойством: (СС') если $n \geq n_0$, $i \in \Lambda_n$ и $r > b_1 a_n(i)$, то $\Gamma_n(i) \subset B(x_i, r)$ при любом $x_i \in \Gamma_n(i)$.

Остается вспомнить, что κ есть изометрия из $(F_{\{A\}}, \rho^*)$ на $(\Lambda, \tilde{\rho})$ и что $\tilde{C}_n(i) = \kappa(\Gamma_n(i))$.

Теорема 5.1. Если выполнены условия (СлО) и (СС), то множество $F_{\{A\}}$ компактно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Наше утверждение вытекает из леммы 5.3 и предложения 1.1.

При других условиях компактность фракталов в $\mathbb{R}^n$ была установлена разными авторами (см., например, [12]).

Обобщим понятие индекса Морана, введенное в § 1 (см. [22], [25]). Рассмотрим последовательность $i \in S^N$ и положительные числа r и b . Если $b a_{n_0+1}(i) \geq r$, определим натуральное число $l(r, i, b) > n_0$ следующим образом: $b a_{l(r, i, b)+1}(i) < r \leq b a_{l(r, i, b)}(i)$; если $b a_{n_0+1}(i) < r$, мы полагаем $l(r, i, b) = n_0 + 1$.

Индексом Морана конструкции $\{A_{i^*}\}$, соответствующим постоянной b , называется минимальное число $L_{\{A_{i^*}\}}(b)$, обладающее следующим свойством: для любого $x \in M$, любого $i \in \Lambda$ и $n > n_0$ существует не более чем $L_{\{A_{i^*}\}}(b)$ попарно непересекающихся множеств $\tilde{A}_{i^{(k)}}^{(b)}$ таких, что $B(x, ba_n(i)) \cap [\tilde{A}_{i^{(k)}}^{(b)}] \neq \emptyset$; если такое $L_{\{A_{i^*}\}}(b)$ не существует, мы полагаем $L_{\{A_{i^*}\}}(b) = \infty$.

Обозначим через $D_H(F_{\{A\}})$ хаусдорфову размерность множества $F_{\{A\}}$. Пусть α_0 — решение обобщенного уравнения Морана (3.2).

Теорема 5.2. Пусть существуют положительные числа b_1 и b_2 такие, что конструкция $\{A_{i^*}, i^* \in S^*\}$ или какая-либо конъюнктивная ей конструкция удовлетворяет условиям (СЛО), (СС) и

(КИМ) Конечность индекса Морана: $L_{\{A_{i^*}\}}(b_2) < \infty$.

Тогда $D_H(F_{\{A\}}) = \alpha_0$.

Доказательство. Поскольку $\Gamma_n(i) = [\tilde{A}_{i_n}] \cap F_{\{A\}}$, то при любых $x^* \in F_{\{A\}}$ и $r > 0$ из $B(x^*, r) \cap F_{\{A\}} \cap \Gamma_n(i) \neq \emptyset$ вытекает $B(x^*, r) \cap [\tilde{A}_{i_n}] \neq \emptyset$. Поэтому индекс Морана конструкции $\Gamma_n(i)$ в $(F_{\{A\}}, \rho^*)$ не больше индекса конструкции $\{A_{i^*}\}$. Из этого и из леммы 5.3 вытекает, что метрика $\tilde{\rho}$ является масштабной метрикой в Λ . Остается применить лемму 5.2 и теорему 3.1.

Разумеется, условие (КИМ) не отличается особенной наглядностью; обсудим варианты более сильных, но зато и более наглядных условий.

Теорема 5.3. Предположим, что конструкция $\{A_{i^*}, i^* \in S^*\}$ или какая-либо конъюнктивная ей конструкция удовлетворяет условию (СС) и существует положительная константа b_2 такая, что выполнено условие:

(СЛРО) Слабая равномерная отделимость множеств $\tilde{A}_{i_n}$: при $n > n_0$

$$\phi(\tilde{A}_{i_n} \cap F_{\{A\}}, \tilde{A}_{j_n} \cup F_{\{A\}}) > b_2 \max(a_n(i), a_n(j)),$$

коль скоро $i, j \in \Lambda_n$ и $i_n \neq j_n$ (здесь $\phi(A, B) = \inf\{\rho(x, y): x \in A, y \in B\}$).

Тогда $D_H(F_{\{A\}}) = \alpha_0$.

Доказательство. Из условий (СС) и (СЛРО) вытекает, что $\tilde{\rho}$ — масштабная метрика в Λ . Остается применить лемму 5.2 и теорему 3.1.

Замечание 5.2. При любом $l \geq 1$ следующее условие (РО- l) влечет условие (СЛРО):

(РО- l) Равномерная отделимость порядка l : при любом $n > n_0$ $\phi(\tilde{A}_{i_{n+l-1}}, \tilde{A}_{j_{n+l-1}}) > b_2 \max(a_n(i), a_n(j))$, коль скоро $i, j \in \Lambda_n$ и $i_n \neq j_n$.

Эти условия становятся слабее с увеличением l ; они гораздо нагляднее, чем условие (СЛРО), особенно при $l = 1$ или 2 (см. ниже пример 5.3).

Пусть (M, ρ) — метрическое пространство; мы говорим, что ρ удовлетворяет условию *равномерной ограниченности упаковок шаров* (РОУШ), если для каждого $a > 1$ существует конечная постоянная $K(a)$ такая, что при любом $r > 0$ всякий шар радиуса ar содержит не более чем $K(a)$ непересекающихся шаров радиуса r .

Пример 5.1. Пусть M — нильпотентная группа Ли (например, $\mathbb{R}^m$); ρ — инвариантная метрика и μ — мера Хаара на M . Тогда для любого $a > 1$ существует постоянная C_a такая, что $\mu(B(x, ar)) \leq C_a \mu(B(x, r))$ при любом $r > 0$ (см. [17]). Метрика ρ удовлетворяет условию (РОУШ). Действительно, пусть шар $B(x, ar)$ содержит k непересекающихся шаров $B(x^{(i)}, r)$; тогда при любом x имеем: $k\mu(B(x, r)) = \mu(\cup_i B(x^{(i)}, r)) \leq \mu(B(x, ar)) \leq C_a \mu(B(x, r))$, и, следовательно, $K(a) \leq C_a$.

Теорема 5.4. Предположим, что метрика ρ удовлетворяет условию (РОУШ). Пусть конструкция $\{A_{i^*}\}$ удовлетворяет условию (СС) с постоянной b_1 , и пусть существует конъюнктивная конструкция $\{D_{i^*}, i^* \in S^*\}$, состоящая из замкнутых шаров $D_{i_n} = [B(x_{i_n}, b_2 a_n(i))]$ ($b_2 > 0$) и удовлетворяющая условию (СЛО). Тогда $D_H(F_{\{A\}}) = \alpha_0$.

Доказательство. Конструкция $\{D_{i^*}\}$ удовлетворяет условию (СС) с постоянной $b'_1 = b_1 + 4b_2$. Фиксируем постоянную $b > 0$. Предположим, что при некотором $n > n_0$ существуют $x \in M$ и попарно непересекающиеся множества $\tilde{D}_{i^{(k)}}^{(b)}$, $1 \leq k \leq L$, такие, что $B(x, b a_n(i)) \cap \tilde{D}_{i^{(k)}}^{(b)} \neq \emptyset$. Ясно, что $\cup_{k=1}^L \tilde{D}_{i^{(k)}}^{(b)} \subset B(x, (2b'_1 + b)a_n(i))$. Поскольку $b a_n(i) \leq l(b a_n(i), i^{(k)}, b)$, то каждое множество $\tilde{D}_{i^{(k)}}^{(b)}$ содержит шар радиуса $b a_n(i)$. В силу условия (РОУШ), $L_{\{D\}}(b) \leq K((2b'_1 + b)/b)$. Наше утверждение следует из теоремы 5.2.

Следствие 5.1. Предположим, что метрика ρ удовлетворяет условию (РОУШ). Пусть конструкция $\{A_{i^*}\}$ удовлетворяет условиям (СЛО) и (СС), и пусть при некотором $b_2 > 0$ существуют шары $B(x_{i_n}, b_2 a_n(i)) \subset \tilde{A}_{i_n}$, $i \in S^N$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $D_H(F_{\{A\}}) = \alpha_0$.

Это следствие обобщает и усиливает некоторые результаты из работ [22] и [25], относящиеся к фракталам в евклидовом пространстве при $k = 0$, $m = 0$.

Пример 5.2. Классическое канторово множество в $[0, 1]$ представляет собой простейший пример фрактала, определяемого монотонной конструкцией, удовлетворяющей условиям (СС) и (РО-1).

Пример 5.3. (Иерархическая система «планет» и «спутников».) Предположим, что все множества A_{i_n} попарно не пересекаются. Мы можем представить себе, что при $j_n = i_n$ каждое множество $A_{j_{n+1}}$ является «спутником» «планеты» A_{i_n} . Грубо говоря, условие (СС) означает, что

на любом уровне n нашей иерархии каждая «планета» A_{i_n} должна быть достаточно мала, а ее «спутники» должны быть близки к «планете» и на «порядок» меньше; условие (PO-2) запрещает, на любом уровне иерархии, «спутникам» разных «планет» приближаться слишком близко друг к другу; условие (O-2) запрещает «слипание» «спутников» разных «планет». Разумеется, мы можем выбрать точку x_{i_n} в множестве A_{i_n} . Такие фракталы тесно связаны с орбитами интересных динамических систем (см. [4] и [5]).

5.2. Случайные фракталы. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — произведение счетного множества копий пространства $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$, и пусть Q — эргодическая трансляционно инвариантная вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Рассмотрим множество M , оснащенное семейством метрик $\{\rho_\omega(x, y), \omega \in \Omega\}$; предположим, что для Q -почти всех $\omega \in \Omega$ метрическое пространство (M, ρ_ω) полно. Пусть любому $\omega \in \Omega$ соответствует конструкция $\{A_{i^*}(\omega), i^* \in S^*\}$; обозначим через $F_{\{A\}}(\omega)$ порожденный ею фрактал.

Как и в § 4, рассмотрим случайные функции масштаба $\lambda(i; \omega_1)$ со значениями в интервале $[0, 1]$; при любом $\omega \in \Omega$ обозначим: $\Lambda_\omega = \{i = (i_1, i_2, \dots): \lambda(i_n; \omega_{i_n}) > 0, n \in \mathbb{N}\}$.

Пусть κ_ω — кодирующее отображение множества $F_{\{A\}}(\omega)$ на Λ_ω ; ρ_ω^* — сужение метрики ρ_ω на множество $F_{\{A\}}(\omega)$; рассмотрим также метрику $\tilde{\rho}_\omega = \rho_\omega^* \circ \kappa_\omega^{-1}$ в Λ_ω . Разумеется, κ_ω — изометрический изоморфизм пространства $(F_{\{A\}}(\omega), \rho_\omega^*)$ на $(\Lambda_\omega, \tilde{\rho}_\omega)$. Этот изоморфизм позволяет свести изучение размерности фрактала $F_{\{A\}}(\omega)$ к фактам, установленным в § 4 (см. лемму 5.2). Заметим, наконец, что если при любом $\omega \in \Omega$ конструкция $\{A_{i^*}(\omega), i^* \in S^*\}$ удовлетворяет условиям какой-либо из теорем 5.2, 5.3, 5.4 или следствия 5.1, то $\tilde{\rho}_\omega$ является случайной масштабной метрикой в Λ_ω . Используя теорему 4.1, мы приходим к следующему результату.

Теорема 5.5. Пусть выполнены условия (4.1) и (4.3), и пусть при любом ω метрика ρ_ω и множества $A_{i_n}(\omega)$ удовлетворяют условиям какой-либо из теорем 5.2, 5.3, 5.4 или следствия 5.1. Тогда с Q -вероятностью 1 хаусдорфова размерность множества $F_{\{A\}}(\omega)$ относительно метрики ρ_ω равна α_0 — решению уравнения (4.2).

При $M = \mathbb{R}^n$ сходные результаты были получены другим методом в работах [18] и [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: ГИТТЛ, 1953.
2. Корнфельд И. П., Синяй Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
3. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953, 292 с.

4. *Afraimovich V., Zaslavsky G. M.* Fractal and multifractal properties of exit times and Poincaré recurrences. — *Phys. Rev. E*(3), 1997, v. 55, № 5, part A, p. 5418–5426.
5. *Afraimovich V., Zaslavsky G. M.* Sticky orbits of chaotic Hamiltonian dynamics. — *Lecture Notes in Phys.*, 1998, v. 511, p. 59–82.
6. *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory. — *Illinois J. Math.*, 1960, v. 4, p. 187–209.
7. *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II. — *Illinois J. Math.*, 1961, v. 5, p. 291–298.
8. *Билингслей П.* Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969, 238 с.
9. *Billingsley P.* Probability and Measure. New York: Wiley, 1986.
10. *Brin M., Katok A.* On local entropy. — *Lecture Notes in Math.*, 1981, v. 1007, p. 30–38.
11. *Falconer K.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Chichester: Wiley, 1990, 288 p.
12. *Falconer K.* Random fractals. — *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1986, v. 100, p. 559–582.
13. *Falconer K.* A subadditive thermodynamic formalism for mixing repellers. — *J. Phys. A*, 1988, v. 21, p. L737–L742.
14. *Friedland Sh.* Discrete Liapunov exponents and Hausdorff dimension. Preprint. Chicago: Univ. of Illinois, 1997.
15. *Furstenberg H.* Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation. — *Math. Systems Theory*, 1967, v. 1, p. 1–49.
16. *Graf S., Mauldin R. D., Williams S. C.* The Exact Hausdorff Dimension in Random Recursive Constructions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988, 121 p.
17. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps. — *Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci.*, 1981, № 53, p. 53–78.
18. *Kifer Yu.* Fractals via random iterated function systems and random geometric constructions. — *Fractal Geometry and Stochastics*. Ed. by Ch. Bandt et al. Basel: Birkhäuser, 1995, p. 145–164.
19. *Kifer Yu.* Fractal dimensions and random transformations. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1996, v. 348, № 5, p. 2003–2038.
20. *Mauldin R., Edgar G.* Multifractal decomposition of digraph recursive fractals. — *Proc. London Math. Soc.*, 1992, v. 65, № 3, p. 604–628.
21. *Mauldin R., Williams S.* Random recursive constructions: Asymptotic geometric and topological properties. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1986, v. 295, p. 325–346.
22. *Moran P.* Additive functions of intervals and Hausdorff measure. — *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1946, v. 42, p. 15–23.
23. *Pesin Ya. B.* Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications. Chicago/London: Univ. of Chicago Press, 1997.
24. *Pesin Ya., Tempelman A.* Correlation dimension of measures invariant under group actions. — *Random Comput. Dynam.*, 1995, v. 3, p. 137–156.
25. *Pesin Ya., Weiss H.* On the dimension of deterministic and random Cantor-like sets, symbolic dynamics, and the Eckmann–Ruelle conjecture. — *Comm. Math. Phys.*, 1996, v. 182, № 1, p. 105–153.
26. *Rényi A.* Dimension, entropy and information. — *Trans. of the 2nd Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes (Liblice, 1959)*. New York: Academic Press, 1960, p. 545–556.
27. *Young L. S.* Dimension, entropy, and Lyapunov exponents. — *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1982, v. 2, p. 109–124.

Поступила в редакцию
30.V.1997

Переработанный вариант
14.II.1998