Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Предельные теоремы для максимумов независимых случайных сумм, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 631–633

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:33:57

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1999 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МАКСИМУМОВ
НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ¹⁾

Рассматриваются экстремумы вида

$$Y_{mn} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad m, n \geq 1,$$

где X_{ij} , $i, j \geq 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины. Исследуется асимптотика Y_{mn} при $m, n \rightarrow \infty$. Показано, в частности, когда она совпадает с асимптотикой максимумов нормально распределенных величин при некоторой линейной нормировке.

Ключевые слова и фразы: максимумы, случайные суммы, предельные теоремы, асимптотическая нормальность, разложение Эджворта, нормы матриц.

Будем рассматривать экстремумы вида

$$Y_{mn} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad m, n \geq 1, \quad (1)$$

где X_{ij} , $i, j \geq 1$, — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины. Обозначим общую функцию распределения X_{ij} через F .

Предположим сначала, что $EX_{ij} = 0$, $DX_{ij} = 1$.

Заметим, что суммы $S_{in} = \sum_{j=1}^n X_{ij}$ асимптотически нормальны при $n \rightarrow \infty$; асимптотика же максимумов нормальных случайных величин известна [1, с. 25]. Получаем повторный предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P \{a_m(Y_{mn}n^{-1/2} - b_m) \leq x\} = \exp\{-e^{-x}\}, \quad (2)$$

где $a_m = (2 \ln m)^{1/2}$, $b_m = (2 \ln m)^{1/2} - (2 \ln m)^{-1/2} \ln(4\pi \ln m)^{1/2}$.

Возникают вопросы:

— при каких условиях можно перейти от повторного предела (2) к двойному (по $m, n \rightarrow \infty$) без изменения нормировки?

— при каких условиях можно перейти к двойному пределу, возможно, с изменением нормировки?

— при каких условиях возможна сходимость к невырожденному предельному распределению (при некоторой нормировке) независимо от порядка стремления m и n к бесконечности?

Будем обозначать $F_n(x) = P \{S_{in}n^{-1/2} \leq x\}$.

Заметим, что $P \{Y_{mn}n^{-1/2} \leq x\} = F_n^m(x)$.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: alebedev@nw.math.msu.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01092.

Обозначим через $f(z)$ характеристическую функцию F . Будем предполагать, что выполнено условие $\limsup_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \leq 1$ (верное для любого несингулярного распределения [2]).

Введем также обозначения для моментов $\mu_l = \mathbf{E} |X_{ij}|^l$, $l > 0$.

Теорема 1. Если существуют $\mu_3, \dots, \mu_r$, $r \geq 3$, и $m = O(n^{r/2-1})$, $m, n \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P} \left\{ a_m (Y_{mn} n^{-1/2} - b_m) \leq x \right\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}. \quad (3)$$

Доказательство. Воспользуемся разложением Эджворта [2, с. 607]:

$$F_n(u) = \Phi(u) + \sum_{k=3}^r R_k(u) \varphi(u) n^{1-k/2} + o(n^{1-r/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по u , где $R_k(u)$ — многочлены k -й степени (зависящие только от $\mu_3, \dots, \mu_r$), Φ — функция стандартного нормального распределения, φ — его плотность.

При $u = b_m + x/a_m \sim (2 \ln m)^{1/2}$, $m \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^r R_k(u) \varphi(u) &\rightarrow 0, \\ |F_n^m(u) - \Phi^m(u)| &\leq m |F_n(u) - \Phi(u)| = o(m n^{1-r/2}) \rightarrow 0, \\ \Phi^m(u) &\rightarrow \exp\{-e^{-x}\}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности нуля. Это предположение существенно ослабляет условия, налагаемые на рост m по сравнению с n .

Теорема 2. Если $\ln m = o(n^{1/3})$, $m, n \rightarrow \infty$, то верно (3).

Доказательство. Согласно [2, с. 615], имеем $(1 - F_n(u))/(1 - \Phi(u)) \rightarrow 1$ при $u = o(n^{1/6})$, $n \rightarrow \infty$. Для $u = b_m + x/a_m \sim (2 \ln m)^{1/2}$ это условие выполняется. Асимптотической эквивалентности хвостов достаточно для совпадения предельных распределений максимумов.

Теорема 3. Если $\ln m = o(n)$, $m, n \rightarrow \infty$, то существуют $\alpha_{mn} \sim \beta_{mn} \sim (2 \ln m)^{1/2}$ такие, что

$$\mathbf{P} \left\{ \alpha_{mn} (Y_{mn} n^{-1/2} - \beta_{mn}) \leq x \right\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}.$$

Доказательство. Воспользуемся асимптотическим соотношением [2, с. 619] при $u = o(n^{1/2})$, $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{1 - F_n(u)}{1 - \Phi(u)} = \exp \left\{ u^2 \lambda \left(\frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right\} \left(1 + O \left(\frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right),$$

где $\lambda(z)$ — функция, аналитичная в окрестности нуля, $\lambda(0) = 0$. С учетом асимптотики хвоста нормального распределения получаем:

$$1 - F_n(u) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \gamma \left(\frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right\}, \quad (4)$$

где функция $\gamma(z) = 1 - 2\lambda(z)$ аналитична в некоторой ε -окрестности нуля, $\gamma(0) = 1$. Обозначим правую часть (4) через $h(u)$. Имеем $h(u) \rightarrow +\infty$ при $u \rightarrow 0$ и

$$h(\varepsilon n^{1/2}) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2\pi}n} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2} \gamma(\varepsilon) n \right\} = o \left(\frac{1}{m} \right), \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Поскольку $h(u)$ непрерывна на $(0, \varepsilon n^{1/2})$, то при достаточно больших m, n существуют $\beta_{mn} \in (0, \varepsilon n^{1/2})$ такие, что $h(\beta_{mn}) = 1/m$. Имеем $\beta_{mn} \sim (2 \ln m)^{1/2} = o(n^{1/2})$, $m, n \rightarrow \infty$. Получаем $F_n^m(\beta_{mn}) \rightarrow e^{-1}$. Пусть $\alpha_{mn} \sim \beta_{mn}$, $u = \beta_{mn} + x/\alpha_{mn}$, тогда $F_n^m(u) \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}$.

Очевидно, более общий случай $EX_{ij} = \mu$, $DX_{ij} = \sigma^2$ сводится к предыдущему преобразованием

$$\bar{X}_{ij} = \frac{X_{ij} - a}{\sigma}, \quad \bar{Y}_{mn} = \frac{Y_{mn} - na}{\sigma}.$$

Откажемся теперь от любых предположений о распределении X_{ij} и порядке стремления m и n к бесконечности.

Теорема 4. Если

$$\lim_{u, n \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{*n}(u)}{1 - F^{*n}(u - 0)} = 1, \quad (5)$$

то для всех $\rho \in (0, +\infty)$ существуют $u_{mn}(\rho)$ такие, что

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} P\{Y_{mn} \leq u_{mn}(\rho)\} = e^{-\rho}.$$

Доказательство. Достаточно взять в качестве $u_{mn}(\rho)$ решения неравенств

$$1 - F^{*n}(u - 0) < \frac{\rho}{m} \leq 1 - F^{*n}(u),$$

тогда $m(1 - F^{*n}(u_{mn}(\rho))) \rightarrow \rho$ при $m, n \rightarrow \infty$, откуда и следует утверждение теоремы.

Условие (5) является обобщением известного условия существования невырожденного предельного распределения экстремумов [1], [3]:

$$\lim_{x \rightarrow x_F - 0} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x - 0)} = 1,$$

где $x_F = \sup\{x: F(x) < 1\}$.

Заметим, что (5) заведомо выполняется, когда F непрерывна.

Зависимость $u_{mn}(\rho)$ от m, n и ρ может быть весьма сложной в общем случае, но достаточно проста в некоторых частных случаях. Например, если X_{ij} имеют распределение Коши $F(x) = \frac{1}{2} + (1/\pi) \arctg x$, то

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} P\left\{\pi \frac{Y_{mn}}{mn} \leq x\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{x}\right\}, \quad x > 0.$$

Полученные результаты можно, в частности, применить к исследованию норм матриц $(n \times n)$ с н.о.р. случайными элементами. Действительно [4, с. 255],

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Очевидно, распределения обеих норм совпадают.

Если $E|a_{ij}| = \mu$, $D|a_{ij}| = \sigma^2$, то из теорем 1-3 следует, например, что

$$\frac{\|A\|_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{2n \ln n}} \xrightarrow{P} 1, \quad \frac{\|A\|_\infty - n\mu}{\sigma\sqrt{2n \ln n}} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидбеттер М., Линдгрэн Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989. 391 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 752 с.
3. Gnedenko B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. — Ann. Math., 1943, v. 44, № 3, p. 423-453.
4. Базвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.