Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Новак, Обобщенная ядерная оценка плотности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 634–645

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp808>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:11:05

© 1999 г.

НОВАК С. Ю.*

ОБОБЩЕННАЯ ЯДЕРНАЯ ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ

Предлагается новый класс оценок плотности неизвестного вероятностного распределения. Наша оценка является обобщением как классической ядерной оценки плотности, так и популярной оценки Абрамсона. Найдена асимптотика среднеквадратичной функции потерь данной оценки, оптимальные (в определенном смысле) ядро и параметр сглаживания.

Ключевые слова и фразы: ядерная оценка плотности, квадратичная функция потерь, оптимальное ядро, оптимальный параметр сглаживания.

1. Введение. Пусть дана выборка $X_1, \dots, X_n$ независимых наблюдений над распределением случайной величины (с.в.) X с плотностью f . Требуется оценить $f(x)$ в предположении, что $f(x) > 0$.

Классическая ядерная оценка $f(x)$ (см. [1], [2]) имеет вид

$$\hat{f}_n(x) \equiv \hat{f}_n(x, h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_\gamma((X_i - x)h^{-1})h^{-1}, \quad (1.1)$$

где f_γ есть плотность распределения некоторой симметричной с.в. γ ; параметр сглаживания $h = h(n)$ и ядро f_γ выбираются статистиком.

В дальнейшем символ f_ξ обозначает плотность распределения с.в. ξ и D означает дисперсию. В свете этих соглашений равенство (1.1) удобно переписать следующим образом:

$$\hat{f}_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{x+h\gamma}(X_i). \quad (1.1^*)$$

Обозначим $\nu = Ef_\gamma(\gamma)$. Из (1.1*) и тождеств $Ef_\xi(\eta) = Ef_\eta(\xi)$, $Ef_\xi^2(\eta) = Ef_\xi(\xi)f_\eta(\xi)$ выводим:

$$E\hat{f}_n(x) - f(x) = O(h^2), \quad D\hat{f}_n(x) \sim \frac{\nu f(x)}{nh} \quad (1.2)$$

при $h \rightarrow 0$, если функция f имеет ограниченную вторую производную и с.в. γ ограничена.

Из (1.2) следует, что

$$\text{MSE}[\hat{f}_n(x)] \equiv E(\hat{f}_n(x) - f(x))^2 = O_x(h^4 + (nh)^{-1}). \quad (1.3)$$

Следовательно, среднеквадратичная погрешность (MSE) оценки (1.1) не может быть лучше, чем $O(n^{-4/5})$.

Более высокая точность аппроксимации может быть достигнута, если в качестве f_γ взять плотность обобщенного распределения (единичной меры). А именно, если функция f_γ такова, что

$$E\gamma^i \equiv \int x^i f_\gamma(x) dx = 0 \quad (1 \leq i < k), \quad E\gamma^k \neq 0 \quad (1.4)$$

для некоторого натурального $k > 2$, и плотность f является достаточно гладкой функцией, то $E(\hat{f}_n(x) - f(x))^2 = O(n^{-2k/(2k+1)})$ с ростом n и $h \asymp n^{-1/(2k+1)}$ (см. [3]–[5]). В этом случае говорят, что f_γ является ядром k -го порядка. Отметим, что подобные оценки могут принимать отрицательные значения.

Естественным представляется желание построить улучшенную неотрицательную оценку плотности (УНОП) $f_n(x, k)$ такую, что

$$\text{MSE}[f_n(x, k)] = O_x(n^{-2k/(2k+1)}) \quad (1.5)$$

* e-mail: s.novak@sussex.ac.uk

при $n \rightarrow \infty$ (или по крайней мере оценку $f_n(x)$, удовлетворяющую соотношению $E(f_n(x) - f(x))^2 = o_x(n^{-4/5})$ при $n \rightarrow \infty$). Поскольку дисперсии всех известных оценок плотности убывают как $O(1/nh)$ при $nh \rightarrow \infty$, усилия ряда исследователей были направлены на построение неотрицательной оценки плотности f_n такой, что

$$Ef_n(x) - f(x) = o_x(h^2). \quad (1.6)$$

На данный момент проблема решена для $k = 4$ (см., к примеру, [6]–[8]). Наиболее популярна оценка, предложенная Абрамсоном:

$$f_n^A(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{h\gamma} \left((x - X_i) \sqrt{\bar{f}(X_i)} \right) \sqrt{\bar{f}(X_i)}, \quad (1.7)$$

где $\bar{f}(y) = \max\{f(y); f(x)/10\}$, а также ее модификации. Холл и Марон [9], [10] изучали следующую версию оценки (1.7):

$$f_n^H(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{h\gamma} \left((x - X_i) \sqrt{f(X_i)} \right) \sqrt{f(X_i)} 1_{xi}^H, \quad (1.8)$$

где $1_{xi}^H = 1\{|x - X_i| \leq (1 + |x|) \ln h^{-1}\}$. Другая модификация оценки (1.8) предложена в [11]. Статистика

$$f_n^*(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{h\gamma} \left((x - X_i) \sqrt{f(X_i)} \right) \sqrt{f(X_i)} \quad (1.9)$$

может быть названа базовой версией оценки Абрамсона.

Абрамсон [7] установил (1.6) для оценки (1.7) и показал, что $MSE[f_n^A(x)] = o_x(n^{-4/5})$, если $f \in C_2$ и сумма $\|f\| + \|f'\| + \|f''\|$ ограничена известной постоянной, причем f в (1.7) может быть заменена ее состоятельной оценкой, построенной по независимой выборке объемом $N(n) = o(n)$.

Холл и Марон [10] показали, что $MSE[f_n^H(x)] = O_x(n^{-8/9})$, если f_γ ограничена, $E\gamma^4 < \infty$, а функции f и f_γ достаточно гладки; это соотношение останется справедливым, если плотность f в правой части (1.8) заменить ее состоятельной оценкой.

Террел и Скотт [12] утверждают, что $MSE[f_n^*(x)] = O_x(n^{-8/9})$, если $(u-x)\sqrt{f(u)}$ есть «монотонно возрастающая функция переменной u на всей числовой оси» и f достаточно гладкая (при этом неявно предполагается, что плотность f имеет аналитическое продолжение в комплексной окрестности начала координат).

В настоящей работе предлагается новый класс оценок $f_{n,\alpha}(x)$ плотности неизвестного вероятностного распределения, который включает как классическую ядерную оценку плотности, так и статистику Абрамсона.

Показано, что (1.6) имеет место не только для оценки Абрамсона. Найдены асимптотика функции потерь $E(f_{n,\alpha}(x) - f(x))^2$, оптимальные ядро f_γ и параметр сглаживания h .

2. Основные результаты. Всюду ниже мы предполагаем, что $f(x) > 0$, плотность f непрерывна в точке x ; функция f_γ равна нулю вне интервала $[-T; T]$, симметрична, ограничена и имеет конечное число точек разрыва.

Положим

$$f_{n,\alpha}(x) \equiv f_{n,\alpha}(x, h) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{h\gamma} \left((X_i - x) f^\alpha(X_i) \right) f^\alpha(X_i) 1_i, \quad (2.1)$$

где $1_i = 1\{|x - X_i| f^\alpha(x) < hT_+\}$, T_+ — любая константа такая, что $T_+ > T$; числа T_+ , $\alpha \in \mathbf{R}$, параметр сглаживания h и ядро f_γ выбираются статистиком.

Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то при всех достаточно малых h оценка (2.1) совпадает со статистиками (1.7), (1.8). Очевидно также, что $f_{n,0} = \hat{f}_n$.

Наша цель — показать, что оценка (2.1) состоятельна, асимптотически не смещена, и что при определенных дополнительных ограничениях

$$E(f_{n,\alpha}(x) - f(x))^2 = O_x(n^{-8/9}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.2)$$

Родственной статистике (2.1) является оценка

$$f_{n,\alpha}^*(x) \equiv f_{n,\alpha}^*(x, h) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{h\gamma}((X_i - x)f^\alpha(X_i)) f^\alpha(X_i). \quad (2.3)$$

Преимущество статистики (2.3) в том, что она интегрируется к единице:

$$\int f_{n,\alpha}^*(x) dx = 1.$$

Недостаток ее в том, что асимптотика $E(f_{n,\alpha}^*(x) - f(x))^2$ может существенно зависеть от скорости убывания «хвостов» неизвестного распределения с.в. X . Структура оценки (2.1) позволяет устранить вклад «хвостов» распределения с.в. X в асимптотику $E(f_{n,\alpha}(x) - f(x))^2$. Отметим также, что $f_{n,\alpha}$ интегрируется к единице для широкого класса плотностей f .

Положим $f_* = \inf\{f(t): f(t) > 0\}$.

Предложение 1. Если $\|f\| \equiv \sup_t f(t) < \infty$ и $f_* > 0$, то при всех достаточно малых h оценка $f_{n,\alpha}$ совпадает п.н. с $f_{n,\alpha}^*$.

Отметим, что оценки (1.7), (1.8), (2.1), (2.3) являются «теоретическими» — на практике следует плотность f в их правых частях заменить ее состоятельной оценкой $\tilde{f}_n$, получая таким образом «адаптивный» вариант соответствующих статистик:

$$\tilde{f}_{n,\alpha}(x) \equiv \tilde{f}_{n,\alpha}(x, \tilde{f}_n) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{h\gamma}((X_i - x)\tilde{f}_n^\alpha(X_i)) \tilde{f}_n^\alpha(X_i) \tilde{1}_i,$$

$$\tilde{f}_{n,\alpha}^*(x) \equiv \tilde{f}_{n,\alpha}^*(x, \tilde{f}_n) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{h\gamma}((X_i - x)\tilde{f}_n^\alpha(X_i)) \tilde{f}_n^\alpha(X_i),$$

и т.д., где $\tilde{1}_i = 1\{|x - X_i| \tilde{f}_n^\alpha(x) < hT_+\}$. Более того, оптимальный (в определенном смысле) параметр h — даже в случае классической оценки (1.1*) — может зависеть от функции $f(x)$ и ее производных, которые также должны быть заменены соответствующими состоятельными оценками.

Изучение «теоретических» оценок тем не менее продуктивно, поскольку позволяет выявить, какие особенности асимптотического поведения следует ожидать у соответствующих «адаптивных» статистик. Кроме того, выбор оптимальных параметров h и f_γ , как правило, делается на основании сведений об асимптотике «теоретических» оценок.

Лемма 1. Пусть $\nu = Ef_\gamma(\gamma)$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ при $h \rightarrow 0$

$$Ef_{n,\alpha}(x) \rightarrow f(x), \quad (2.4)$$

$$nhDf_{n,\alpha}(x) \rightarrow \nu f^{\alpha+1}(x). \quad (2.5)$$

Если $f_* > 0$ и $\|f\| < \infty$, то

$$Ef_{n,\alpha}^*(x) \rightarrow f(x), \quad nhDf_{n,\alpha}^*(x) \rightarrow \nu f^{\alpha+1}(x). \quad (2.6)$$

Если, кроме того, f и f_γ равномерно непрерывны в $\mathbb{R}$, то сходимость в (2.4)–(2.6) является равномерной по x .

Из (2.4), (2.5) и (2.6) следует, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$E(f_{n,\alpha}(x) - f(x))^2 \rightarrow 0, \quad E(f_{n,\alpha}^*(x) - f(x))^2 \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

при $h \rightarrow 0$, $nh \rightarrow \infty$. Следовательно, оценки (2.1) и (2.3) состоятельны.

Лемма 2. Предположим, что f'' существует и непрерывна в окрестности точки x , производная f_γ' существует и абсолютно непрерывна в $\mathbb{R}$. Тогда

$$Ef_{n,\alpha}(x) - f(x) = h^2 E\gamma^2 L_\alpha(x) + o_x(h^2) \quad (2.8)$$

при $h \rightarrow 0$, где

$$L_\alpha(x) f^{\alpha+1}(x) = 2\alpha^2 f^{\alpha+1}(x) - \frac{\alpha[f^2(x)]''}{2} + \frac{f(x)f''(x)}{2}. \quad (2.9)$$

Заметим, что

$$2L_{\alpha}(x)f^{2\alpha+1}(x) = (2\alpha-1)(2\alpha f'^2(x) - f(x)f''(x)), \quad 2L_{\alpha} = [f^{1-2\alpha}]'' \quad (2.10)$$

Обозначим $f_n^* = f_{n,1/2}$. Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то первое слагаемое в правой части (2.8) равно нулю. Следовательно, f_n^* удовлетворяет (1.6).

Ниже будет показано, что при дополнительных ограничениях

$$Ef_{n,\alpha}(x) - f(x) = O_x(h^4) \quad (2.11)$$

при $h \rightarrow 0$, что вместе с (2.5) влечет (2.2).

В [7] утверждалось, что соотношение (1.6) достижимо только при $\alpha = \frac{1}{2}$. Однако если $f'(x) \neq 0$, то уравнение

$$L_{\alpha}(x) = 0 \quad (2.12)$$

имеет решения $\alpha = 0.5$ и

$$\alpha = \frac{ff''}{2f'^2} \quad (*)$$

Следовательно, $\alpha = 0.5$ не является единственным возможным решением.

Соотношение (2.11) может не выполняться для f_n^* . Как показано в [12],

$$Ef_n^*(0) - f(0) \sim c \left[\frac{h}{\ln h^{-1}} \right]^2,$$

если f — плотность нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ и f_{γ} — плотность равномерного распределения $\mathcal{U}(-1, 1)$.

Предположим теперь, что функции f и f_{γ} четырежды дифференцируемы. Определим функцию G равенством

$$Gf^3 = f^{-2}f'^4 - \frac{3}{2}f^{-1}f'^2f'' + \frac{1}{4}f''^2 + \frac{1}{3}f'f''' - \frac{1}{24}ff^{(4)}. \quad (2.13)$$

Согласно теореме 2.2 работы [10], если $f_{\gamma}^{(5)}$ существует, то

$$Ef_n^*(x) - f(x) \sim h^4 G(x) E\gamma^4 \quad (2.14)$$

при $h \rightarrow 0$. Обозначим

$$G_{\alpha} = \frac{(4\alpha-1)G_{\alpha}^*(x)}{24f^{4\alpha}(x)}, \quad (2.15)$$

где $G_{\alpha}^* = 8\alpha(4\alpha+1)(2\alpha+1)f^{-3}f'^4 - 24\alpha(4\alpha+1)f^{-2}f'^2f'' + 12\alpha f^{-1}f''^2 + 16\alpha f^{-1}f'f''' - f^{(4)}$.

Теорема 1. Если функция $f^{(4)}$ существует и непрерывна в точке x , а производная f_{γ}''' существует и абсолютно непрерывна в $\mathbb{R}$, то при $h \rightarrow 0$

$$Ef_{n,\alpha}(x) - f(x) = h^2 E\gamma^2 L_{\alpha}(x) + h^4 G_{\alpha}(x) E\gamma^4 + o_x(h^4). \quad (2.16)$$

В предположениях теоремы 1,

$$f_{\gamma}^{(i)}(T) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (2.17)$$

Требованию (2.17) ранее не уделялось должного внимания. Отметим, что для популярного ядра Епанечникова $f_{\gamma}(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)1\{|x| < 1\}$ (см. [13]) оно не выполнено.

Соотношение (2.14) вытекает из (2.16) с $\alpha = \frac{1}{2}$. Как уже отмечалось, равенство $L_{\alpha}(x) = 0$ может иметь место не только при $\alpha = \frac{1}{2}$.

Среди ядер, не являющихся гладкими в смысле (2.17), особый интерес вызывает плотность равномерного распределения. В отличие от ситуации с f_n^* (см. [12]), соотношение (2.11) остается справедливым и в этом случае. Что более удивительно, (2.8) и (2.16) также имеют место в случае равномерного ядра (доказательство существенно отличается от рассуждений при выводе леммы 2 и теоремы 1).

Теорема 2. Предположим, что f_{γ} есть плотность равномерного распределения $\mathcal{U}(-T; T)$. Если функция f имеет непрерывную в точке x вторую производную, то справедливо (2.8). Если $f^{(4)}$ непрерывна в точке x , то (2.16) также имеет место.

Из (2.5) и (2.16) выводим, что в предположениях теоремы 1

$$\mathbb{E}[f_n^*(x) - f(x)]^2 \sim (nh)^{-1} \nu f^{3/2}(x) + [h^4 G(x) \mathbb{E}\gamma^4]^2 \quad (2.18)$$

при $h \rightarrow 0$, $nh \rightarrow \infty$. Минимум в правой части соотношения (2.18) достигается на $h = h(n, x)$, где

$$nh^9 = \frac{\nu f^{3/2}(x)}{8[G(x)\mathbb{E}\gamma^4]^2} \quad (2.19)$$

(если $G(x) \neq 0$). Согласно такому выбору параметра сглаживания,

$$\mathbb{E}[f_n^*(x) - f(x)]^2 = 9[G(x)\mathbb{E}\gamma^4]^{2/9} \left[\frac{\nu f^{3/2}(x)}{8n} \right]^{8/9} + o(n^{-8/9}), \quad (2.20)$$

$$\sqrt{\frac{nh}{\nu f^{3/2}(x)}} (f_n^*(x) - f(x)) \Rightarrow \mathcal{N}\left(\sqrt{\frac{1}{8}}, 1\right) \quad (*)$$

при $n \rightarrow \infty$. Порядок $\text{MSE}[f_n^*(x)]$ останется тем же, если $h = h(n) \sim cn^{-1/9}$, где c — константа.

Если (2.18) выполняется равномерно по x , то можно предложить выбирать $h = h_t(n)$ так, что

$$(nh_t)^{-1} \nu_t + h_t^8 [\mathbb{E}\gamma^4]^2 \kappa = \min_h \left\{ (nh)^{-1} \nu_t + h^8 [\mathbb{E}\gamma^4]^2 \kappa \right\}, \quad (2.21)$$

где $\kappa = \int G^2(x) f^t(x) dx$, $\nu_t = \nu \int f^{t+3/2}(x) dx$ (мы проинтегрировали правую часть (2.18) по x с весовой функцией $f^t(x)$). Очевидно, что $h_t(n) = (\nu_t/8n\kappa[\mathbb{E}\gamma^4]^2)^{1/9}$ и

$$\int \mathbb{E}[f_n^*(x) - f(x)]^2 f^t(x) dx \sim 9(\kappa[\mathbb{E}\gamma^4]^2)^{1/9} \left(\frac{\nu_t}{8n} \right)^{8/9}.$$

Если f_γ является плотностью единичной меры, удовлетворяющей соотношениям (1.4) с $k = 4$, то первое слагаемое в правой части (2.16) равно нулю для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, и стандартные рассуждения показывают, что

$$\mathbb{E}[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 \sim (nh)^{-1} \nu f(x) + h^8 [G_0(x) \mathbb{E}\gamma^4]^2, \quad (2.22)$$

где $G_0(x) = f^{(4)}(x)/24$. Очевидно, что $h = (\nu f(x)/8n[G_0(x)\mathbb{E}\gamma^4]^2)^{1/9}$ минимизирует главный член MSE для $\hat{f}_n(x)$. Тем самым,

$$\mathbb{E}[\hat{f}_n(x) - f(x)]^2 = 9[G_0(x)\mathbb{E}\gamma^4]^{2/9} \left[\frac{\nu f(x)}{8n} \right]^{8/9} + o(n^{-8/9}). \quad (2.23)$$

Сравнение главных членов в правых частях выражений вида (2.20) и (2.23) (где производные $f^{(i)}(x)$ следует заменить их состоятельными оценками) позволяет сделать выбор между $\hat{f}_n(x)$ и $f_{n,\alpha}(x)$. Так, если $G^2(x) f^4(x) < G_0^2(x)$, то статистика $f_n^*(x)$ предпочтительнее $\hat{f}_n(x)$ при любом (обобщенном) ядре f_γ .

К примеру, если $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, то $G^2(x) f^4(x) = G_0^2(x)$, и мы выбираем классическую оценку как самую простую. Если $f(x) = cx^{-b}$, $x > x_0 > 0$, то $24 G_0(x) = cb(b+1)(b+2)(b+3)x^{-b-4}$ и $24 f^2(x) G(x) = cb(b-1)(b-2)(b-3)x^{-b-4} < 24 G_0(x)$, т.е. f_n^* предпочтительнее. В частности, если $b = 4$, $c = \frac{1}{3}$ и $x_0 = 1$, то $|G(x)| f^2(x)$ в 35 раз меньше, чем $|G_0(x)|$. В случае нормального закона, напротив, $0 < G_0(x) < f^2(x) G(x)$ для любого x , и предпочтение следует отдать классической оценке. Таким образом, если скорость убывания хвоста распределения медленнее экспоненциальной, то оценка (2.1) может оказаться предпочтительнее.

В свете (2.20) и (2.23) встает задача минимизации функционала

$$R(\gamma) = \nu^4 \mathbb{E}\gamma^4 \quad (2.24)$$

по множеству $\mathscr{D}$ всех симметричных распределений с плотностями f_γ , равными нулю вне некоторого интервала вида $[-T; T]$ и обладающими абсолютно непрерывной в $\mathbb{R}$ третьей производной.

Лемма 3. Пусть

$$f_{\xi}(x) = \frac{5}{8} (1 - x^4) 1\{|x| < 1\}. \quad (2.25)$$

Тогда

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{D}} R(\gamma) = R(\xi) = \frac{5^4}{9^5}. \quad (2.26)$$

Таким образом, распределение, доставляющее минимум функционалу $R(\gamma)$ в классе $\mathcal{D}$, не принадлежит множеству $\mathcal{D}$. Вопрос вкуса — какое из ядер f_{γ} выбрать так, чтобы $\gamma \in \mathcal{D}$ и $R(\gamma)$ было «близко» к $R(\xi)$. К примеру, пусть $f_{\eta}(x) = (1 - x^4)^4 1\{|x| < 1\} / 2a_4$, где $a_k = \int_0^1 (1 - x^4)^k dx = 4^k k! / (4k + 1)!!!!$ (функция $m!!!!$ определяется аналогично $m!!$). Тогда

$$R(\eta) = \frac{1}{21} \left[\frac{13 \cdot 17}{11 \cdot 29} \right]^4 \approx 0.01097.$$

Таким образом, $R(\eta)$ всего на 3.64% больше $R(\xi)$, что позволяет считать ядро f_{η} пригодным для практического использования.

3. Замечание об оценивании функции регрессии. Предположим, что требуется оценить неизвестную функцию регрессии

$$m(x) = E\{Y \mid X = x\}$$

по выборке $\{(X_i, Y_i), 1 \leq i \leq n\}$ независимых наблюдений над распределением пары случайных величин (X, Y) .

Классическая ядерная оценка функции $m(x)$ была предложена Розенблатом [1]:

$$m_n(x) = \sum_{i=1}^n Y_i f_{x+h\gamma}(X_i) \left(\sum_{i=1}^n f_{x+h\gamma}(X_i) \right)^{-1} \quad (3.1)$$

(ср. с (1.1*)). Использование обобщенных ядер f_{γ} , удовлетворяющих соотношению (1.4) позволяет $MSE[m_n(x)]$ достигать скорости $O(n^{-2k/(2k+1)})$. При этом $m_n(x)$ может принимать отрицательные значения.

Однако подчас известно априори, что функция $EY = Em(X) > 0$ (к примеру, зависимость веса человека от роста, зависимость кровяного давления от возраста, и т.д.). Следовательно, имеет смысл использовать также обобщенные «знакопостоянные» оценки функции регрессии вида

$$m_n(x) \equiv m_n(x, \alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i f_{h\gamma}((X_i - x) q^{\alpha}(X_i)) q^{\alpha}(X_i) 1_i^*}{\sum_{i=1}^n f_{h\gamma}((X_i - x) f^{\beta}(X_i)) f^{\beta}(X_i) 1_i}, \quad (3.2)$$

где $q = mf$, $1_i^* = 1\{|x - X_i| q^{\alpha}(x) < hT_+\}$, а также их адаптивные аналоги.

Как следует из [14], [15],

$$\begin{aligned} MSE[m_n(x)] &= \left(m(x) - \frac{a_n}{b_n} \right)^2 + E \left(m_n(x) - \frac{a_n}{b_n} \right)^2 + o \left(\frac{1}{nh} \right) \\ &= \left(m(x) - \frac{a_n}{b_n} \right)^2 + O \left(\frac{1}{nh} \right), \end{aligned}$$

где $a_n = E m(X) q^{\alpha}(X) f([X - x] q^{\alpha}(X)) 1\{|x - X| q^{\alpha}(x) < hT_+\}$, $b_n = E f_{n,\beta}(x)$.

Пусть $f^{(4)}$ и $m^{(4)}$ непрерывны в точке x , $f_{\gamma}^{(4)}$ непрерывна в $\mathbf{R}$. Тогда, согласно теореме 1, $b_n - f(x) = h^4 G_{\beta}(x) E \gamma^4 + o(h^4)$ при $\beta = \frac{1}{2}$ или $\beta = f(x) f''(x) / 2f'^2(x)$. Заметим, что $f_{\star} = mf/EY$ есть плотность вероятностного распределения. Поэтому при $\alpha = \frac{1}{2}$ или $\alpha = f_{\star}(x) f_{\star}''(x) / 2f_{\star}'^2(x)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} c^{-1} a_n &= \int f_{\star}^{\alpha+1}(x + hc^{-\alpha}w) f_{\gamma}(wf_{\star}^{\alpha}(x + hc^{-\alpha}w)) 1\{|w| f_{\star}^{\alpha}(x) < T_+\} dw \\ &= f_{\star}(x) + h^4 H_{\alpha}(x) E \gamma^4 + o_x(h^4) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

где $c = EY$, функция H_α определяется аналогично G_α с заменой f на f_* . Таким образом, $a_n - m(x)f(x) = O_x(h^4)$ и, следовательно,

$$MSE[m_n(x)] = O_x(n^{-8/9}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

при $h \asymp n^{-1/9}$ и $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ либо $\alpha = f_*(x)f''(x)/2f_*^2(x)$, $\beta = f(x)f''(x)/2f^2(x)$.

З а м е ч а н и е 1. По аналогии с (2.1), (2.3) можно предложить также следующие состоятельные непараметрические оценки числа $m(x)$:

$$\hat{m}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i f_{h\gamma}((X_i - x)f^\alpha(X_i)) f^\alpha(X_i) 1_i}{\sum_{i=1}^n f_{h\gamma}((X_i - x)f^\beta(X_i)) f^\beta(X_i) 1_i} \quad (3.3)$$

и $\hat{m}_n^*(x)$ (определяемые аналогично, но без 1_i).

Согласно результатам [14], [15],

$$MSE[\hat{m}_n(x)] = \left(m(x) - \frac{\hat{a}_n}{b_n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{nh}\right), \quad (3.4)$$

где $b_n = E f_{n,\beta}(x)$ и $\hat{a}_n = E m(X) f^\alpha(X) f([X - x] f^\alpha(X)) 1\{|x - X| f^\alpha(x) < hT_+\}$. Как отмечено выше, $b_n = o(h^2)$ при $\beta = \frac{1}{2}$ или $\beta = f(x)f''(x)/2f^2(x)$ (и гладких f и f_γ). Поэтому $MSE[\hat{m}_n(x)] = o(n^{-4/5})$, лишь если $\hat{a}_n - m(x)f(x) = o(h^2)$.

Для $\alpha = \frac{1}{2}$ последнее соотношение в общем случае не верно.

Действительно, если повторить приведенные выше выкладки с функцией $g(t) = m(x+t)f^{\alpha+1}(x+t)f_\gamma(v_t)$, то получим:

$$\begin{aligned} \int g(0) 1_{x,w} dw &= m(x)f(x), & \int wg'(0) 1_{x,w} dw &= 0, \\ \int w^2 g''(0) 1_{x,w} dw &= [2L_\alpha(x)m(x) + 2(1-2\alpha)f^{-2\alpha}(x)f'(x)m'(x) \\ &\quad + f^{1-2\alpha}(x)m''(x)] E\gamma^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, статистика (3.2) предпочтительнее оценки (3.3).

4. Доказательства. Наш подход отличается от предложенных в [7], [10], [12], что позволило сделать доказательства более краткими (ср. с [10], где доказательство теорем 2.1, 2.2 опущено ввиду громоздкости).

Доказательство предложения 1. Заметим, что

$$f_{h\gamma}((X_i - x)f^\alpha(X_i)) f^\alpha(X_i) 1_i = f_{h\gamma}((X_i - x)f^\alpha(X_i)) f^\alpha(X_i) 1_i 1\{A_i\},$$

где $1_i = 1\{|x - X_i| f^\alpha(x) < hT_+\}$, $A_i = \{x: |x - X_i| f^\alpha(X_i) < hT\}$. Очевидно, что $|x - X_i| < hT \max\{f_*^{-\alpha}; \|f\|^{-\alpha}\}$, если $x \in A_i$. Учитывая, что плотность f непрерывна в точке x и $T_+ > T$, заключаем, что $|x - X_i| f^{-\alpha}(x) < hT_+$, если $|x - X_i| f^{-\alpha}(X_i) < hT$ и h мало. Поэтому $1_i 1\{A_i\} = 1\{A_i\}$ и $f_{n,\alpha} = f_{n,\alpha}^*$ для всех достаточно малых h .

Отметим, что условием $\|f\| < \infty$ мы пользуемся, если $\alpha < 0$, а условием $f_* > 0$, если $\alpha > 0$ (оба упомянутых условия могут быть опущены, если $\alpha = 0$).

Доказательство леммы 1. В свете (2.1)

$$\begin{aligned} E f_{n,\alpha}(x) &= \int f^{\alpha+1}(y) f_{h\gamma}([y - x] f^\alpha(y)) 1\{|y - x| f^\alpha(x) < hT_+\} dy \\ &= \int f^{\alpha+1}(x + hw) f_\gamma(w f^\alpha(x + hw)) 1\{|w| f^\alpha(x) < T_+\} dw. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из этого равенства и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. [16, гл. 5, § 5]) выводим:

$$E f_{n,\alpha}(x) \longrightarrow f^{\alpha+1}(x) \int f_\gamma(w f^\alpha(x)) 1_{x,w} dw = f(x) \quad (4.2)$$

при $h \rightarrow 0$, где $1_{x,w} = 1\{|w| f^\alpha(x) < T_+\}$. Аналогично заключаем, что

$$\begin{aligned} nh D f_{n,\alpha}(x) &= \int f^{2\alpha+1}(x + hw) f_\gamma^2(w f^\alpha(x + hw)) 1_{x,w} dw + O(h) \\ &\longrightarrow \nu f^{\alpha+1}(x) \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Заметим, что

$$E f_{n,\alpha}^*(x) = \int f^{\alpha+1}(x+hw) f_\gamma(w f^\alpha(x+hw)) 1\{|w| f^\alpha(x+hw) < T\} dw. \quad (4.4)$$

Интервал интегрирования конечен вследствие наших предположений. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, влекут (2.6). Последнее утверждение леммы 1 вытекает из (4.2)–(4.4) и определения равномерной сходимости.

З а м е ч а н и е 2. Утверждение леммы 1 останется справедливым и в случае, если T_+ в определении оценки $f_{n,\alpha}$ заменить на T .

Вычисления в [10], [12] также начинаются с выражения типа (4.1). Пусть $x = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$. В отличие от нашего подхода, авторы [10], [12] начинают с замены переменных

$$z = w\sqrt{f(w)} \quad (4.5)$$

(или $z = w\sqrt{f(hw)}$), получая $f_\gamma(z)$ вместо $f_\gamma(w f^\alpha(x+hw))$ в интеграле типа (4.1). Это позволяет минимизировать требования к ядру f_γ (ср. [12]). Недостаток этого подхода в том, что функция (4.5), вообще говоря, не имеет обратной (к примеру, в случае нормального или экспоненциального распределений). Тем самым, приведенные в [10], [11] доказательства не могут быть признаны корректными.

Чтобы обойти указанную проблему, Террел и Скотт [12] требуют, чтобы $u\sqrt{f(u)}$ была «монотонно возрастающей функцией переменной u на всей числовой оси». Данное условие нам представляется чрезмерно жестким. Оно не выполнено; в частности, для нормального и экспоненциального распределений.

Мы не делаем замены переменных типа (4.5). Это приводит к более жестким ограничениям на ядро f_γ , что, впрочем, представляется нам меньшим злом, так как в нашей власти выбирать ядра.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Обозначим

$$v_t = w f^\alpha(x+t), \quad g(t) = f^{\alpha+1}(x+t) f_\gamma(v_t).$$

Тогда

$$E f_{n,\alpha}(x) = \int g(hw) 1_{x,w} dw \quad (4.6)$$

для всех достаточно малых h .

Мы планируем применить формулу Тейлора, которую нам удобно записать в следующем виде: если функция $g \in C_{k-1}$ и $g^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна, то

$$g(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{i!} g^{(i)}(0) + \frac{t^k}{k!} E g^{(k)}(\tau_k t), \quad (4.7)$$

где случайная величина τ_k имеет распределение

$$F_k(u) \equiv P\{\tau_k < u\} = 1 - (1-u)^k, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Справедливость (4.7) при $k=1$ хорошо известна (см. [16, гл. 6, § 4]), а для $k>1$ (4.7) нетрудно получить по индукции.

Применяя (4.7) к $g(hw)$ в формуле (4.6), получим:

$$E f_{n,\alpha}(x) = \int \left[g(0) + hw g'(0) + \frac{1}{2} (hw)^2 E g''(hw\tau_2) \right] 1_{x,w} dw. \quad (4.8)$$

Заметим, что

$$g'(t) = f^\alpha(x+t) f'(x+t) \{(\alpha+1) f_\gamma(v_t) + \alpha v_t f'_\gamma(v_t)\}$$

($f'_\gamma(v_t)$ есть значение функции f'_γ в точке v_t) и

$$g''(t) = (\alpha+1) f_\gamma(v_t) \{\alpha f^{\alpha-1} f'^2 + f^\alpha f''\} + \alpha v_t f'_\gamma(v_t) \{f^\alpha f'' + (3\alpha+1) f^{\alpha-1} f'^2\} + (\alpha v_t)^2 f''_\gamma(v_t) f^{\alpha-1} f'^2, \quad (4.9)$$

где, чтобы не загромождать выкладки, аргумент $(x+t)$ опущен. С помощью интегрирования по частям убеждаемся, что

$$\int w g'(0) 1_{x,w} dw = 0. \quad (4.10)$$

Далее, (4.9) влечет

$$\int w^2 g''(0) 1_{x,w} dw = 2L_\alpha(x) E\gamma^2. \quad (4.11)$$

Очевидно, что $\int g(0) 1_{x,w} dw = f(x)$. Объединяя (4.8)–(4.11) и применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получим (2.8).

З а м е ч а н и е 3. Просматривая доказательство леммы 2, заключаем, что (2.8) справедливо равномерно по x , если, в дополнение к предположениям леммы 2, f'' и f_γ'' равномерно непрерывны.

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что условие на ядро f_γ может быть ослаблено до следующего: функция f_γ непрерывно дифференцируема в $\mathbf{R}$, f_γ'' существует п.в. в $\mathbf{R}$, не имеет разрывов второго рода, а число разрывов первого рода конечно (действительно, в этом случае f_γ'' ограничена, и с помощью теоремы Лагранжа [17, п.118] нетрудно убедиться, что f_γ' абсолютно непрерывна; тем самым применимы формула Тейлора (4.7) и теорема Лебега о мажорируемой сходимости).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Ввиду (4.6) и (4.7),

$$\begin{aligned} Ef_{n,\alpha}(x) &= \int \left[g(0) + hwg'(0) + \frac{1}{2}(hw)^2 g''(0) + \frac{1}{6}(hw)^3 g'''(0) \right] 1_{x,w} dw \\ &\quad + \frac{1}{24} \int (hw)^4 E g^{(4)}(hw\tau_4) 1_{x,w} dw. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Обозначим

$$r(t) = f^{\alpha+1}(x+t), \quad z(t) = f^\alpha(x+t), \quad s(t) = wz(t),$$

и пусть $r_i = r^{(i)}$, $s_i = s^{(i)}$. Вычислим производные $g''', g^{(4)}$ с помощью тождества $g = rf_\gamma(s)$:

$$\begin{aligned} g''' &= r_3 f_\gamma + (3r_2 s_1 + 3r_1 s_2 + r s_3) f_\gamma' + 3(r_1 s_1^2 + r s_1 s_2) f_\gamma'' + r s_1^3 f_\gamma''', \\ g^{(4)} &= r_4 f_\gamma + (4r_3 s_1 + 6r_2 s_2 + 4r_1 s_3 + r s_4) f_\gamma' \\ &\quad + (6r_2 s_1^2 + 12r_1 s_1 s_2 + 4r_1 s_1 s_3 + 3r s_2^2) f_\gamma'' \\ &\quad + (4r_1 s_1^3 + 6r s_1^2 s_2) f_\gamma''' + r s_1^4 f_\gamma^{(4)}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, нетрудно убедиться, что в предположениях теоремы 1

$$\begin{aligned} \int g(0) 1_{x,w} dw &= f(x), \quad \int w^3 g'''(0) 1_{x,w} dw = 0, \\ \int w^4 g^{(4)}(0) 1_{x,w} dw &= 24G_\alpha(x) E\gamma^4. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, находим, что

$$\int w^4 E g^{(4)}(hw\tau_4) 1_{x,w} dw \longrightarrow 24G_\alpha(x) E\gamma^4 \quad (h \rightarrow 0). \quad (4.14)$$

Объединяя (4.10)–(4.14), получим (2.16). Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что условие на f_γ может быть ослаблено до следующего: функция f_γ трижды непрерывно дифференцируема в $\mathbf{R}$, $f_\gamma^{(4)}$ существует п.в. в $\mathbf{R}$, не имеет разрывов второго рода, а число разрывов первого рода конечно.

Отметим, что $24G_\alpha = [f^{1-4\alpha}]^{(4)}$ (в этом можно убедиться с помощью программы «Maple» или программы «Математика»).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. При всех достаточно малых h имеем:

$$Ef_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{2T} \int_A f^{\alpha+1}(x+hw) dw,$$

где $A = \{w: |w|f^\alpha(x+hw) < T\}$ (поскольку $Tf^{-\alpha}(x+hw) < T_+f^{-\alpha}(x)$). Заметим, что при достаточно малых h функция $w \rightarrow wf^\alpha(x+hw)$ не убывает на A . Следовательно, решения w_+ и w_- уравнения $wf^\alpha(x+hw) = \pm T$ существуют, $A = (w_-; w_+)$ и

$$Ef_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{2T} \int_{w_-}^{w_+} \sum_{i=0}^k [f^{\alpha+1}]^{(i)}(x) \frac{(hw)^i}{i!} dw + o(h^k), \quad (4.15)$$

если $f \in C_k$. Применяя приводимую ниже лемму 4, заключаем, что

$$w_{\pm} = \pm T \sum_{i=0}^k [f^{-\alpha(i+1)}]^{(i)}(x) \frac{(hT)^i}{(i+1)!} + o(h^k). \quad (4.16)$$

Из (4.16) выводим, что

$$\begin{aligned} \frac{w_+ - w_-}{2T} &= \psi + \frac{1}{6} [\psi^3]'' (hT)^2 + o(h^2), \\ \frac{w_+^2 - w_-^2}{2T^2} &= \psi [\psi^2]' hT + o(h^2), \\ \frac{w_+^3 - w_-^3}{2T^3} &= \psi^3 + O(h^2), \end{aligned}$$

где $\psi = f^{-\alpha}(x)$. Обозначим $Q = f^{\alpha+1}(x)$. Согласно (4.15),

$$\begin{aligned} Ef_{n,\alpha}(x) &= Q \frac{w_+ - w_-}{2T} + Q' \frac{w_+^2 - w_-^2}{2T^2} \frac{hT}{2} + Q'' \frac{w_+^3 - w_-^3}{2T^3} \frac{(hT)^2}{6} + o(h^2) \\ &= Q \left(\psi + \frac{1}{6} [\psi^3]'' (hT)^2 \right) + \frac{1}{2} Q' \psi [\psi^2]' (hT)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} Q'' \psi^3 (hT)^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Заметим, что $E\gamma^2 = T^2/3$ и $Q\psi = f$, $Q[\psi^3]'' + 3Q'\psi[\psi^2]' + Q''\psi^3 = [Q\psi^3]''$. Таким образом, соотношения (4.15), (4.16) при $k=2$ влекут (2.8).

Если функция $f^{(4)}$ непрерывна в точке x , применим формулы (4.15) и (4.16) с $k=4$. Из (4.16) выводим:

$$\begin{aligned} \frac{w_+^2 - w_-^2}{2T^2} &= hT \psi [\psi^2]' + \frac{1}{12} (hT)^3 \left\{ \psi [\psi^4]''' + \frac{1}{6} [\psi^2]' [\psi^3]'' \right\} + o(h^4), \\ \frac{w_+^3 - w_-^3}{2T^3} &= \psi^3 + (hT)^2 \left\{ \frac{1}{2} \psi^2 [\psi^3]'' + 3\psi^3 (\psi')^2 \right\} + O(h^4), \\ \frac{w_+^4 - w_-^4}{2T^4} &= 2hT \psi^3 [\psi^2]' + O(h^3), \\ \frac{w_+^5 - w_-^5}{2T^5} &= \psi^5 + O(h^2). \end{aligned}$$

Подставим эти соотношения в (4.15) и заметим, что $E\gamma^4 = T^4/5$. Непосредственные (хотя и утомительные) вычисления влекут (2.16).

Лемма 4. *Предположим, что функция ψ $k \geq 1$ раз дифференцируема в окрестности нуля, $\psi^{(k)}$ непрерывна в нуле и $\psi(0) \neq 0$. Тогда уравнение*

$$w = \psi(hw) \quad (4.17)$$

имеет единственное решение в окрестности нуля, допускающее следующее представление:

$$w(h) = \sum_{i=0}^k [\psi^{i+1}]^{(i)}(0) \frac{h^i}{(i+1)!} + o(h^k). \quad (4.18)$$

Доказательство. Эквивалентное утверждение состоит в том, что уравнение

$$y = h\psi(y) \quad (4.19)$$

имеет единственное решение $y(h)$ в окрестности нуля такое, что

$$y(h) = \sum_{i=0}^k [\psi^{i+1}]^{(i)}(0) \frac{h^{i+1}}{(i+1)!} + o(h^{k+1}) \quad (4.20)$$

при $h \rightarrow 0$. Мы будем доказывать последнее утверждение.

Очевидно, что если функция ψ непрерывна в нуле, то уравнение (4.19) имеет решение в окрестности нуля, удовлетворяющее (4.20) с $k = 0$:

$$y(h) = h\psi(0) + o(h). \quad (4.21)$$

Поскольку ψ имеет непрерывную в нуле производную, функция $(d/dy)[y/\psi(y)]|_{y=y(h)} = 1/\psi(0) + o(1)$ отделена от нуля. Следовательно, $y(h)$ есть единственное решение уравнения (4.19) в окрестности нуля.

Используя формулу Тейлора и (4.21), заключаем:

$$y(h) = h(\psi(0) + y\psi'(0) + o(y)) = h\psi(0) + h^2\psi(0)\psi'(0) + o(h^2).$$

Следовательно, утверждение леммы 4 справедливо при $k = 1$. Оставшуюся часть доказательства проведем в два этапа.

1. Предположим, что функция ψ имеет аналитическое продолжение в комплексной окрестности начала координат. Заметим, что $y' = \psi(y)/(1 - h\psi'(y))$. Вследствие формулы Коши,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\psi(z) dz}{z - h\psi(z)} = \frac{\psi(y(h))}{1 - h\psi'(y(h))} = y'(h), \quad (4.22)$$

где интегрирование ведется по окружности фиксированного радиуса с центром в начале координат. Поскольку левая часть (4.22) равна

$$\sum_{j=0}^k \frac{h^j}{2\pi i} \oint \frac{\psi^{j+1}(z) dz}{z^{j+1}} + \frac{h^{k+1}}{2\pi i} \oint \frac{\psi^{k+2}(z) dz}{z^{k+1}(z - h\psi(z))},$$

из теоремы о вычетах выводим: $y'(h) = \sum_{j=0}^k h^j \{\psi^{j+1}\}^{(j)}(0)/j! + O(h^{k+1})$, что влечет (4.20).

2. Покажем теперь, что дополнительные предположения о ψ могут быть опущены.

Предположим, согласно методу индукции, что утверждение леммы 4 справедливо при некотором $k = k_0$. Обозначим $[x] = \min\{m \in \mathbb{N}: m \geq x\}$. Тогда

$$\begin{aligned} y(h) &= h \sum_{j=0}^{k_0+1} \psi^{(j)}(0) \frac{y^j}{j!} + o(h^{k_0+2}) = h\psi(0) + h \sum_{j=1}^{k_0+1} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \left[\sum_{l=0}^{[k_0/j]} \frac{\{\psi^{l+1}\}^{(l)}(0)}{(l+1)!} h^{l+1} \right]^j \\ &+ o(h^{k_0+2}) = \sum_{j=0}^{k_0+1} P_j h^{j+1} + o(h^{k_0+2}). \end{aligned}$$

Заметим, что P_j есть полином от $\{\psi(0), \psi'(0), \dots, \psi^{(j)}(0)\}$. Наши рассуждения на предыдущем этапе показывают, что этот полином равен $[\psi^{j+1}]^{(j)}(0)/(j+1)!$. Следовательно, утверждение леммы 4 справедливо также при $k = k_0 + 1$. Лемма 4 доказана.

З а м е ч а н и е 6. Аналогичные приведенным на этапе 1 аргументы были применены в [12] при доказательстве теоремы 2, чтобы разложить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{z - h\sqrt{f(z)}}$$

по степеням h (при этом предположение, что плотность f имеет аналитическое продолжение в комплексной окрестности вещественной прямой, по-видимому, было пропущено).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3. Заметим, что функционал $R(\gamma)$ инвариантен относительно замены γ на $c\gamma$. Следовательно, достаточно доказать лемму 3 в предположении, что $T = \text{const}$ (либо что $E\gamma^4 = \text{const}$).

Хорошо известно, что в отсутствие условий (2.17) функционал $R(\gamma)$ достигает своего минимума на распределении с плотностью (2.25) и равен $R(\xi) = \frac{5^4}{9^5} \approx 0.010584$ (см. [3, гл. 5 раздел 7]).

Пусть с.в. τ независима от ξ , плотность f_τ равна нулю вне интервала $[-1; 1]$, производная f_τ''' существует, ограничена и непрерывна на всей вещественной прямой. Тогда плотность $f_{\xi+\varepsilon\tau}(x) = E f_{\varepsilon\tau}(x - \xi)$ трижды дифференцируема и удовлетворяет условиям (2.17), где $T = 1 + \varepsilon$. Очевидно, что

$$R(\xi + \varepsilon\tau) \rightarrow R(\xi)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Лемма 3 доказана.

Автор признателен рецензентам за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rosenblatt M.* Remarks on some nonparametric estimators of a density function. — Ann. Math. Statist., 1956, v. 27, p. 832–835.
2. *Parzen E.* On estimation of a probability density and mode. — Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, p. 1065–1076.
3. *Devroye L., Györfi L.* Nonparametric Density Estimation: The L_1 -View. New York: Wiley, 1985.
4. *Надарая Э. А.* Об интегральной среднеквадратичной ошибке некоторых непараметрических оценок плотностей вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. XIX, в. 1, с. 131–139.
5. *Schucany W. R., Sommers J. P.* Improvement of kernel type density estimation. — J. Amer. Statist. Assoc., 1977, v. 72, p. 420–423.
6. *Terrel G. R., Scott D. W.* On improving convergence rates for nonnegative kernel density estimator. — Ann. Statist., 1980, v. 8, p. 1160–1163.
7. *Abramson I. S.* On bandwidth variation in kernel estimates — a squareroot law. — Ann. Statist., 1982, v. 10, № 4, p. 1217–1223.
8. *Кошкин Г. М.* Улучшенная неотрицательная ядерная оценка плотности. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. XXXIII, в. 4, с. 817–822.
9. *Hall P.* On global properties of variable bandwidth density estimators. — Ann. Statist., 1992, v. 20, № 2, p. 762–778.
10. *Hall P., Marron J. S.* Variable window width kernel estimates of probability densities. — Probab. Theory Relat. Fields, 1988, v. 80, p. 37–49.
11. *Hall P., Hu T. C., Marron J. S.* Improved variable window kernel estimates of probability densities. — Ann. Statist., 1995, v. 23, № 1, p. 1–10.
12. *Terrel G. R., Scott D. W.* Variable kernel density estimation. — Ann. Statist., 1992, v. 20, № 3, p. 1236–1265.
13. *Епанечников В. А.* Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. XIV, в. 1, с. 156–161.
14. *Новак С. Ю., Утев С. А.* Об асимптотике распределения отношения сумм случайных величин. — Сиб. матем. журн., 1990, т. XXXI, № 5, с. 92–101.
15. *Новак С. Ю.* О распределении отношения сумм случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 533–560.
16. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981, 544 с.
17. *Фиттенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.–Л.: ОГИЗ, 1947, 690 с.

Поступила в редакцию
12.V.1996