Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Одно экстремальное свойство равномерного распределения и некоторые его следствия, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 646–650

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp809>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 10:28:48

© 1999 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

ОДНО ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО СЛЕДСТВИЯ¹⁾

В работе установлено одно экстремальное свойство математического ожидания от монотонной функции случайных величин с равномерно ограниченными плотностями. В качестве следствий получены оптимальные оценки сверху для характеристических функций случайных величин такого типа.

Ключевые слова и фразы: равномерное распределение, плотность распределения, моментные неравенства, оценки сверху, характеристические функции.

1. О свойстве равномерного распределения. Рассмотрим класс $\mathcal{B}_c$ случайных величин, имеющих вероятностные плотности, ограниченные постоянной c .

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, монотонная на $(0, \infty)$. Тогда

$$\text{если } f(x) \text{ не убывает, то } \inf_{X \in \mathcal{B}_c} \mathbf{E}f(|X|) = \mathbf{E}f(|X_c|), \quad (1a)$$

$$\text{если } f(x) \text{ не возрастает, то } \sup_{X \in \mathcal{B}_c} \mathbf{E}f(|X|) = \mathbf{E}f(|X_c|), \quad (1b)$$

где X_c — равномерно распределенная на $[-1/(2c), 1/(2c)]$ случайная величина. При этом, если функция $f(x)$ не является постоянной в некоторой окрестности точки $1/(2c)$ и для некоторой случайной величины $X \in \mathcal{B}_c$ равенства (1a) или (1b) достигаются, то $X \stackrel{P}{=} X_c$.

Отметим, что соотношения (1a), (1b) вытекают одно из другого при замене $f(x)$ на $-f(x)$. Сама теорема 1 следует из равенства

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(|x|) p(x) dx - c \int_{|x| \leq 1/(2c)} f(|x|) dx &= \int_{|x| > 1/(2c)} \left(f(|x|) - f\left(\frac{1}{2c}\right) \right) p(x) dx \\ &+ \int_{|x| \leq 1/(2c)} \left(f\left(\frac{1}{2c}\right) - f(|x|) \right) (c - p(x)) dx. \end{aligned}$$

Заметим, что доказательство теоремы 1 можно получить как следствие более общих утверждений (см., например, [1, лемма 5]), однако формулировка теоремы 1 является, по-видимому, новой.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение справедливо в $\mathbf{R}_k$, если под X_c понимать случайную величину, равномерно распределенную в k -мерном шаре с радиусом $(a_k c)^{1/k}$, где a_k — объем единичного шара, а $|\cdot|$ — норма в $\mathbf{R}_k$.

Следствие 1. Пусть постоянная $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$; $X \in \mathcal{B}_c$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_\alpha &= \mathbf{E}|X|^\alpha = \mathbf{E}|X_c|^\alpha = \frac{1}{(1+\alpha)(2c)^\alpha} \iff X \stackrel{P}{=} X_c; \\ (1+\alpha)(2c)^\alpha \beta_\alpha &\geq 1, \quad \alpha > 0, \\ (1+\alpha)(2c)^\alpha \beta_\alpha &\leq 1, \quad -1 < \alpha < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При $\alpha = 2$ неравенство (2) совпадает с одним утверждением Ю. В. Прохорова из [2]. Заметим также, что из (2) следует оценка $\liminf_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\beta_k} \geq 1/(2c)$.

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00724) и гранта ведущих научных школ № 96-15-96199.

С помощью неравенства (2) можно установить ряд нетривиальных соотношений, подобных нижеследующему: при любом $\alpha \geq 0$ и $0 < a \leq \infty$

$$\nu_0(a) \leq 2 \left(\frac{1+\alpha}{2} \right)^{1/(1+\alpha)} \nu(a)^{\alpha/(1+\alpha)} \nu_\alpha(a)^{1/(1+\alpha)}, \quad (3)$$

где $\nu_\alpha(a) = \int_{|x|<a} |x|^\alpha u(x) dx$, $\nu(a) = \sup_{|x|<a} u(x)$, а $u(x)$ — некоторая неотрицательная интегрируемая при $|x| < a$ функция.

Соотношение (3) вытекает из (2), если в следствии 1 использовать случайную величину X с плотностью распределения $p(x) = u(x)/\nu_0(a)$.

Последующие следствия теоремы 1 особенно полезны для оценивания поведения модуля характеристической функции случайной величины из класса $\mathcal{B}_c$ при достаточно больших значениях аргумента.

Положим $\langle x \rangle = \{r \in \mathbb{N}: r-1 < x \leq r\}$. Очевидно,

$$x \leq \langle x \rangle < x+1. \quad (4)$$

Следствие 2. Пусть Δ и $|\Delta|$ обозначают некоторый интервал и его длину соответственно; $p(x)$ — плотность распределения, $p_\Delta = \int_\Delta p(x) dx$, $c_\Delta = \sup_\Delta p(x)$, $r_\Delta = \langle |\Delta| \rangle$. Положим $I_\Delta(a) = \int_\Delta \cos(2\pi x + a) p(x) dx$, $\tau(y) = \sin y/y$. Тогда

$$\sup_a I_\Delta(a) \leq p_\Delta \tau \left(\frac{\pi p_\Delta}{r_\Delta c_\Delta} \right). \quad (5)$$

Доказательство. Будем считать, что r_Δ и c_Δ конечны, поскольку в противном случае оценка (5) справедлива. Имея в виду (4), представим интервал Δ как $[l + \frac{1}{2} - \alpha, m + \frac{1}{2} + \beta]$, где $l, m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha, \beta$, $\alpha + \beta < 1$. Положим $q_\Delta(x) = \sum_{k=l+1}^m p(x+k) + \bar{p}(x)$, $|x| \leq \frac{1}{2}$, где

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} p(x+l), & \frac{1}{2} - \alpha \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ p(x+m+1), & -\frac{1}{2} \leq x \leq \beta - \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $I_\Delta(0) = \int_{|x| \leq 1/2} \cos 2\pi x q_\Delta(x) dx$, причем $\int_{|x| \leq 1/2} q_\Delta(x) dx = p_\Delta$ и $0 \leq q_\Delta(x) \leq r_\Delta c_\Delta$. Воспользовавшись теоремой 1 (соотношение (16)) при $f(x) = \cos 2\pi x$ и $c = r_\Delta c_\Delta/p_\Delta$, получим

$$\frac{1}{p_\Delta} I_\Delta(0) \leq c \int_{|x| \leq 1/(2c)} \cos 2\pi x dx = \tau \left(\frac{\pi}{c} \right). \quad (6)$$

Если $a \neq 0$, то $I_\Delta(a) = \int_{\Delta_a} \cos 2\pi x p_a(x) dx$, где $\Delta_a = \Delta + a/(2\pi)$, $p_a(x) = p(x - a/(2\pi))$, причем $\int_{\Delta_a} p_a(x) dx = p_\Delta$, $\langle |\Delta_a| \rangle = r_\Delta$ и $c_{\Delta_a} = \sup_{x \in \Delta_a} p_a(x) = c_\Delta$.

Отсюда заключаем, что оценка (6) сохраняет справедливость, если $I_\Delta(0)$ в ней заменить на $I_\Delta(a)$, и, следовательно, имеет место неравенство (5).

Следствие 3. Обозначим через $\{x\}$ расстояние от x до ближайшего целого и положим $J_\Delta(a) = \int_\Delta \{x+a\}^2 p(x) dx$, (обозначения здесь и далее заимствованы из следствия 2). Тогда

$$\inf_a J_\Delta(a) \geq \frac{1}{12} \frac{p_\Delta^3}{(r_\Delta c_\Delta)^2}. \quad (7)$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве оценки (5), получим $J_\Delta(0) = \int_{|x| \leq 1/2} x^2 q_\Delta(x) dx$. Воспользовавшись теоремой 1 (соотношение (1a)) при $f(x) = x^2$, имеем так же, как ранее в (6),

$$\frac{1}{p_\Delta} J_\Delta(0) \geq c \int_{|x| \leq 1/2c} x^2 dx = (2c)^{-2}/3 = \frac{1}{12} \left(\frac{p_\Delta}{r_\Delta c_\Delta} \right)^2.$$

Оценка при $a \neq 0$ получается аналогично заменой Δ на Δ_a и $p(x)$ на $p_a(x)$.

2. Оценки для характеристических функций. Пусть всюду в дальнейшем $f(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины X с плотностью $p(x)$.

Теорема 2. Пусть $\{\Delta_i\}$ — непересекающиеся отрезки длиной $|\Delta_i|$, $\cup_i \Delta_i = R$, $p_i = \int_{\Delta_i} p(x) dx$, $c_i = \sup_{\Delta_i} p(x)$, $r_i(t) = \langle |t| |\Delta_i| / (2\pi) \rangle$ (см. (4)). Тогда при любом t

$$|f(t)| \leq \sum_i p_i \tau \left(\frac{|t| p_i}{2 r_i(t) c_i} \right). \quad (8)$$

Доказательство. Поскольку $f(t) = e^{-ia} |f(t)|$, то

$$|f(t)| = e^{ia} f(t) = \operatorname{Re} (e^{ia} f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx + a) p(x) dx \leq \sum_i \sup_a \int_{\Delta_i} \cos(tx + a) p(x) dx.$$

Остается оценить каждое слагаемое, используя следствие 2.

Неравенство (8) уточняет оценки В. А. Статулявичуса [3], а также их усовершенствования, сделанные Н. Г. Ушаковым ([1, теоремы 2, 4 и 5]).

Следствие 1. Обозначим Δ некоторый отрезок длиной $|\Delta| = 2l$. Если $\int_{\Delta} p(x) dx = 1$ и $\sup_x p(x) \leq c$, то при каждом $r = 1, 2, \dots$

$$|f(t)| \leq \tau \left(\frac{|t|}{2cr} \right), \quad (r-1) \frac{\pi}{l} \leq |t| \leq r \frac{\pi}{l}. \quad (9)$$

В частности, при всех t

$$|f(t)| \leq \tau \left(\frac{1}{2c} \min \left(|t|, \frac{\pi}{2l} \right) \right). \quad (10)$$

Неравенство (9) при $|t| > \pi/(2l)$ заметно уточняет теорему 2 из [1], равносильную соотношению (10).

Оценка (10) вытекает из (9), поскольку функция $\tau(x)$ убывает на $[0, \pi]$. В самом деле, $\tau(x) = \int_0^1 \cos tx dt$, откуда $\tau'(x) = -\int_0^1 t \sin tx dt < 0$ при $x \in [0, \pi]$.

Аналогичным образом можно доказать, что функция $\nu(x) = (1 - \tau(x))/x^2 = \int_0^1 \int_0^u \int_0^v \cos tx dt dv du$ также убывает на $[0, \pi]$, и, следовательно, справедливо следующее утверждение: при любых $0 \leq x, x_0 \leq \pi$

$$1 - \frac{x^2}{6} \leq \tau(x) \leq 1 - \nu(x_0) (\min(x, x_0))^2. \quad (11)$$

Заметим, что из (11) при $x_0 = \pi/2$, (10) и неравенства $2lc \geq 1$, имеющего место в условиях следствия 1, вытекает оценка

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{\pi - 2}{2\pi^2 c^2} \left(\min \left(|t|, \frac{\pi}{2l} \right) \right)^2,$$

уточняющая постоянный множитель в аналогичном утверждении из [1].

Следствие 2. В обозначениях теоремы 2

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{4\pi^2} \sum_i \frac{p_i^3}{(c_i r_i(t))^2} \leq 1 - t^2 \sum_i \frac{p_i^3}{(c_i (2\pi + |t| |\Delta_i|))^2}. \quad (12)$$

В частности, если

$$|\Delta_i| = 2l \quad \forall i, \quad (13)$$

то, обозначив $\sum_i p_i^3 / c_i^2$ через A , получим

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{A}{4\pi^2} t^2 r^2, \quad (r-1) \frac{\pi}{l} \leq |t| \leq r \frac{\pi}{l}, \quad r = 1, 2, \dots; \quad (14)$$

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{A}{4} \frac{t^2}{(\pi + l|t|)^2} \quad \forall t. \quad (15)$$

Соотношение (12) есть следствие неравенств (8), (11) (при $x_0 = \pi$) и (4). При этом надо иметь в виду, что $|t|p_i \leq 2\pi c_i r_i(t) \forall i$.

З а м е ч а н и е. Если $c_i \leq c \forall i$, то сомножитель A в (14) и (15) можно, очевидно, заменить на $Q_X^3(2l)/c^2$, где $Q_X(z) = \sup_a P\{a \leq X \leq a+z\}$. Когда $DX = \sigma^2 < \infty$, откуда и из (15) при $l = 2\sigma$ с учетом неравенства $Q_X(4\sigma) \geq 1 - P\{|X - EX| \geq 2\sigma\} \geq \frac{3}{4}$ следует оценка

$$|f(t)| \leq 1 - A_0 \frac{t^2}{c^2(\pi + 2\sigma|t|)^2}, \quad A_0 = \frac{27}{256}, \quad (16)$$

заметно уточняющая соответствующие неравенства из [3] ($A_0 = \frac{1}{96}$) и [1] ($A_0 = \frac{1}{57}$).

Отметим, что (16) представляет интерес в основном при $|t| > \pi/l$, поскольку из (14) следует, что

$$|f(t)| \leq 1 - A_0 \frac{t^2}{c^2\pi^2}, \quad |t| \leq \frac{\pi}{l}. \quad (17)$$

При $|t| < \pi/l$ оценки (14) и (17) можно дополнить.

Следствие 3. Пусть выполняется условие (13) и $A = \sum_i p_i^3/c_i^2$, $0 < \delta \leq 1$. Тогда (см. (11))

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq 1 - \frac{A}{4} \nu(\delta\pi) t^2, & |t| &\leq \delta \frac{\pi}{l}, \\ |f(t)| &\leq 1 - \left(\min\left(\frac{1}{2}, \delta\right) \right)^2 \nu(\delta\pi) A \frac{\pi^2}{4l^2}, & |t| &> \delta \frac{\pi}{l}. \end{aligned} \quad (18)$$

В частности, при $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{1}{4} \nu(\delta\pi) A \left(\min\left(|t|, \delta \frac{\pi}{l}\right) \right)^2 \quad \forall t. \quad (19)$$

Разумеется, в (18), (19) при $c_i \leq c$ так же, как ранее в (14), (15), множитель A можно заменить на $Q_X^3(2l)/c^2$.

Оценка (19) при $\delta = \frac{1}{2}$ уточняет теорему 5 из [1], в которой при условии $c_i = c \forall i$ показано, что

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{1}{3\pi^2 c^2} \left(\min\left(|t|, \frac{\pi}{2l}\right) \right)^2 \sum_i p_i^3.$$

Действительно, $\frac{1}{4} \nu(\pi/2) = (\pi/2 - 1)/\pi^2 > 1/(3\pi^2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 3. Для проверки (18) воспользуемся вытекающим из (8) и (11) неравенством

$$|f(t)| \leq 1 - \pi^2 \nu(\delta\pi) \sum_i \frac{p_i^3}{(c_i |\Delta_i|)^2} \left(\min\left(\delta, \frac{|t| |\Delta_i|}{2\pi r_i(t)}\right) \right)^2$$

и тем, что $\min(\delta, |t|l/(\pi r(t)))$, где $r(t) = \langle |t|l/\pi \rangle$, не менее $\min(\delta, \frac{1}{2})$ при $r(t) \geq 2$ или $|t| > \pi/l$ (см. (4)) и равняется $\min(\delta, |t|l/\pi)$ при $r(t) = 1$ или $|t| \leq \pi/l$.

В заключение приведем еще одну теорему, доказывающуюся с помощью следствия 3 п. 1 аналогично теореме 2.

Теорема 3. Пусть $H(t) = \inf_a \int_{-\infty}^{\infty} \{tx + a\}^2 p(x) dx$, где $\{y\}$ обозначает расстояние от точки y до ближайшего целого. Тогда (см. обозначения в теореме 2)

$$H(t) \geq \frac{t^2}{12} \sum_i \frac{p_i^3}{(c_i \langle |t| \Delta_i \rangle)^2}. \quad (20)$$

В частности, при условии (13)

$$H(t) \geq \frac{t^2}{12} \frac{A}{r^2}, \quad \frac{(r-1)}{2l} \leq |t| \leq \frac{r}{2l}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

где $A = \sum_i p_i^3/c_i^2$.

Теорема 3 позволяет уточнить некоторые оценки из [4]. Разумеется, к ней в полной мере относится замечание, сделанное после следствия 2 теоремы 2.

Отметим, что функция $H(t)$ используется для оценки $|f(t)|$: так же, как в [5, лемма 3], используя рассуждения из теоремы 2, можно показать, что $|f(t)| \leq 1 - 8H(t/2\pi)$ и, следовательно (см. (20)),

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{2}{3} \frac{t^2}{4\pi^2} \sum_i \frac{p_i^3}{(c_i \tau_i(t))^2}.$$

Последняя оценка, впрочем, хуже оценки (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ushakov N. G. Lower and upper bounds for characteristic functions. — J. Math. Sci., 1997, v. 84, № 3, p. 1179–1189.
2. Проторов Ю. В. Об одной локальной теореме. — В сб.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 75–80.
3. Статулявичус В. А. Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 4, с. 645–659.
4. Мушин А. Б. Аппроксимация локальных вероятностей сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 715–730.
5. Мушин А. Б. Локальные предельные теоремы для распределений сумм независимых случайных векторов. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. XXIX, в. 2, с. 360–366.

Поступила в редакцию
24.IX.1998

© 1999 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

О НЕРАВЕНСТВЕ ДЖ. ДУБА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ¹⁾

В работе получено уточнение неравенств Дж. Дуба для характеристической функции.

Ключевые слова и фразы: характеристическая функция, ограниченная случайная величина, неравенство.

Пусть X — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2 . В [1, с. 47] доказано следующее утверждение: если $|X| \leq c$, то

$$e^{-\sigma^2 t^2} \leq |f(t)| \leq e^{-\sigma^2 t^2/3}, \quad |t| \leq \frac{1}{4c}. \quad (1)$$

Определенный интерес представляет уточнение показателей экспонент в (1) и расширение области применения этого неравенства. Некоторые шаги в этом направлении были предприняты в [2]. Приведем теорему 3 из [2], вернее, более точные промежуточные оценки, из которых эта теорема вытекает: если $EX = 0$, то

$$1 - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \leq \operatorname{Re} f(t) \leq |f(t)| \quad \forall t; \quad (2)$$

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00724) и гранта ведущих научных школ № 96-15-96199.