Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, Об одном многомерном аналоге разложения Чебышёва, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 3, 603–610

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp81>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:33:09

11. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
12. Laurinćikas A. Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function. Dordrecht: Kluwer, 1996, 297 p.
13. Conway J. B. Functions of One Complex Variable. New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1973, 313 p.
14. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
15. Темпельман А. А. Эргодические теоремы на группах. Вильнюс: Мокслас, 1986, 225 с.

Поступила в редакцию
9.XI.2004

© 2007 г.

СЕНАТОВ В. В.*

ОБ ОДНОМ МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЧЕБЫШЁВА¹⁾

Предложены аналоги многочленов Чебышёва–Эрмита для многомерных пространств. Эти многочлены являются полилинейными функционалами, которые получаются дифференцированием по Фреше функций, связанных с плотностями нормальных законов. Показано, как с помощью этих многочленов можно строить асимптотические разложения в центральной предельной теореме в многомерном случае.

Ключевые слова и фразы: многочлены Чебышёва–Эрмита, полилинейные функционалы, асимптотические разложения, центральная предельная теорема, многомерные распределения.

Пусть $p(x)$, $-\infty < x < \infty$, — плотность распределения случайной величины X , у которой существуют все моменты, причем среднее равно нулю, а дисперсия — единице. Хорошо известно разложение

$$p(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\theta_l}{l!} H_l(x) \varphi(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\theta_l}{l!} H_l(x) \varphi(x), \quad (1)$$

предложенное П. Л. Чебышёвым в 1859 г. (см., например, [1]). Здесь $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ — плотность стандартного нормального закона, $H_l(x) = (-1)^l \varphi^{(l)}(x)/\varphi(x)$ — многочлены Чебышёва–Эрмита,

$$\theta_l = \int_{-\infty}^{\infty} H_l(x) p(x) dx$$

— числа, которые мы называем моментами Чебышёва–Эрмита. При наложенных ограничениях все величины θ_l существуют и $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

Приведем явные выражения для первых пяти многочленов Чебышёва–Эрмита:

$$\begin{aligned} H_0(x) &\equiv 1, & H_1(x) &= x, & H_2(x) &= x^2 - 1, \\ H_3(x) &= x^3 - 3x, & H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что для многочленов Чебышёва–Эрмита справедливы равенства

$$H'_l(x) = l H_{l-1}(x), \quad l = 1, 2, \dots,$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: semenova@greatbook.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 02-01-00600, 05-01-00583).

и рекуррентная формула

$$H_{l+1}(x) = xH_l(x) - lH_{l-1}(x), \quad l = 1, 2, \dots;$$

они ортогональны с весом $\varphi(x)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_l(x) H_j(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \text{если } l \neq j;$$

справедливы равенства

$$\frac{H_l(x)}{l!} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \frac{x^{l-2j}}{(l-2j)!}, \quad l = 0, 1, 2, \dots;$$

преобразования Фурье функций $H_l(x) \varphi(x)$ суть $(it)^l e^{-t^2/2}$ и $H_l(x)$ могут быть получены с помощью формулы обращения для преобразования Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} (it)^l e^{-t^2/2} dt = H_l(x) \varphi(x), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Условия на функцию p , обеспечивающие сходимость ряда в (1), являются очень тяжелыми, и в теории вероятностей такие ряды используются крайне редко. (Отметим в скобках, что одно из условий сходимости ряда (1), как это указано Г. Крамером [2], состоит в том, что $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{x^2/4} dx < \infty$. Приведем здесь еще одно прозрачное условие, гарантирующее сходимость этого ряда. Разложение (1) мы можем понимать как разложение отношения $p(x)/\varphi(x)$ в ряд по многочленам Чебышёва–Эрмита. Хорошо известно, что система многочленов Чебышёва–Эрмита является полной ортогональной системой функций в пространстве $L_2(\varphi)$, поэтому достаточным условием сходимости (в пространстве $L_2(\varphi)$) ряда (1) к функции $p(x)$ является условие $p(x)/\varphi(x) \in L_2(\varphi)$, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} (p(x)/\varphi(x))^2 \varphi(x) dx = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^2(x) e^{x^2/2} dx < \infty$.) Конечные отрезки ряда (1) и их модификации дают асимптотические разложения в центральной предельной теореме при достаточно простых и естественных ограничениях (см., например, [1], [3], [4]).

Мы определим аналоги многочленов Чебышёва–Эрмита в k -мерном евклидовом пространстве E^k . При этом нас не будут интересовать вопросы о сходимости рядов типа (1). Основное внимание мы уделим аналогам приведенных выше равенств и построению аналога ряда (1). Далее $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение, а $|\cdot|$ — норму вектора в E^k , $|x|^2 = (x, x)$.

Мы будем называть (частичными) многочленами Чебышёва–Эрмита полилинейные функционалы, которые получаются с помощью дифференцирования по Фреше некоторых функций, связанных с плотностью $\varphi(x) = (2\pi)^{-k/2} e^{-|x|^2/2}$ нормального закона с нулевым средним и единичным ковариационным оператором в E^k . Эти многочлены можно свести в таблицу

$$\begin{array}{ccccccc} H_0^{(0)}, & H_1^{(0)}, & H_2^{(0)}, & H_3^{(0)}, & H_4^{(0)}, & H_5^{(0)}, & \dots \\ & H_0^{(2)}, & H_1^{(2)}, & H_2^{(2)}, & H_3^{(2)}, & & \dots \\ & & H_0^{(4)}, & H_1^{(4)}, & & & \dots \\ & & & & & & \dots \end{array} \quad (3)$$

Определим многочлены $H_0^{(2j)}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, как функции, которые получаются с помощью формулы обращения для преобразования Фурье:

$$\frac{i^{2j}}{(2\pi)^k} \int e^{-i(t,x)} (t, t)^j e^{-t^2/2} dt = H_0^{(2j)}(x) \varphi(x), \quad x \in E^k. \quad (4)$$

Здесь и далее, если область интегрирования не указана, то предполагается, что она совпадает с пространством E^k . Очевидно, что $H_0^{(0)}(x) \equiv 1$, и можно проверить, что

$H_0^{(2)}(x) = (x, x) - k$ и $H_0^{(4)}(x) = (x, x)^2 - 2(k+2)(x, x) + k(k+2)$. Выражения для $H_0^{(2)}$ и $H_0^{(4)}$ легко получаются из (4) с помощью перехода к покомпонентной записи вектора t в стандартном базисе пространства E^k и с использованием равенства (2) при $l = 2$ для $H_0^{(2)}$ и равенств (2) при $l = 2$ и $l = 4$ для $H_0^{(4)}$. О вычислении функций $H_0^{(2j)}$ с $j \geq 3$ будет сказано ниже. Обратим внимание на то, что при $k = 1$ функции $H_0^{(2j)}(x)$ совпадают с $H_{2j}(x)$ для всех $j = 0, 1, 2, \dots$.

Определим теперь многочлены Чебышёва–Эрмита $H_l^{(2j)}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots$, как полилинейные (точнее, l -линейные) функционалы, которые получают дифференцированием по Фреше равенств (4):

$$\frac{i^{2j+l}}{(2\pi)^k} \int e^{-i(t,x)} |t|^{2j} e^{-|t|^2/2} (t, h_1) \dots (t, h_l) dt = H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l) \varphi(x) \left[= (-1)^l \left(H_0^{(2j)}(x) \varphi(x) \right)^{(l)}(h_1, \dots, h_l) \right]. \quad (5)$$

Здесь и далее мы обозначаем

$$u^{(l)}(x)(h_1, \dots, h_l) = (u(x))^{(l)}(h_1, \dots, h_l)$$

действие l -линейного функционала $u^{(l)}(x)$, являющегося l -й производной (если она существует) действительной функции $u(x)$, $x \in E^k$, на векторы $h_1, \dots, h_l$.

Выпишем первые пять многочленов Чебышёва–Эрмита из первой строки таблицы (3):

$$\begin{aligned} H_0^{(0)}(x) &\equiv 1, \\ H_1^{(0)}(x)(h_1) &= (x, h_1), \\ H_2^{(0)}(x)(h_1, h_2) &= (x, h_1)(x, h_2) - (h_1, h_2), \\ H_3^{(0)}(x)(h_1, h_2, h_3) &= (x, h_1)(x, h_2)(x, h_3) - (x, h_1)(h_2, h_3) \\ &\quad - (x, h_2)(h_1, h_3) - (x, h_3)(h_1, h_2), \\ H_4^{(0)}(x)(h_1, h_2, h_3, h_4) &= (x, h_1)(x, h_2)(x, h_3)(x, h_4) - (h_1, h_2)(x, h_3)(x, h_4) \\ &\quad - (h_1, h_3)(x, h_2)(x, h_4) - (h_1, h_4)(x, h_2)(x, h_3) \\ &\quad - (h_2, h_3)(x, h_1)(x, h_4) - (h_2, h_4)(x, h_1)(x, h_3) \\ &\quad - (h_3, h_4)(x, h_1)(x, h_2) + (h_1, h_2)(h_3, h_4) \\ &\quad + (h_1, h_3)(h_2, h_4) + (h_1, h_4)(h_2, h_3). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что многочлены $H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ Чебышёва–Эрмита представляют собой суммы нескольких групп слагаемых. Первая из них состоит из единственного слагаемого $(x, h_1) \dots (x, h_l)$. Вторая группа появляется при $l \geq 2$ и состоит из произведений $(h_{k_1}, h_{k_2})(x, h_{k_3}) \dots (x, h_{k_l})$, где $k_1, k_2, k_1 \neq k_2$, — произвольная пара чисел из множества $\{1, \dots, l\}$, а $k_3, \dots, k_l$, — произвольные не равные между собой числа из множества $\{1, \dots, l\} \setminus \{k_1, k_2\}$. Эта группа состоит из C_l^2 слагаемых и входит в $H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ со знаком минус. Третья группа слагаемых появляется при $l \geq 4$ и состоит из произведений $(h_{k_1}, h_{k_2})(h_{k_3}, h_{k_4})(x, h_{k_5}) \dots (x, h_{k_l})$, где $k_1, k_2, k_1 \neq k_2$, — произвольная пара чисел из множества $\{1, \dots, l\}$, $k_3, k_4, k_3 \neq k_4$, — произвольная пара чисел из множества $\{1, \dots, l\} \setminus \{k_1, k_2\}$, $k_5, \dots, k_l$ — произвольные попарно не равные числа из $\{1, \dots, l\} \setminus \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ (скалярные произведения, содержащие x , при $l = 4$ отсутствуют). Эта группа слагаемых входит в $H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ со знаком плюс и состоит из $C_l^2 C_{l-2}^2/2$ слагаемых. Знаменатель 2 здесь появляется из-за того, что порядок скалярных произведений (h_{k_1}, h_{k_2}) и (h_{k_3}, h_{k_4}) не важен. Легко проверить, что многочлен Чебышёва–Эрмита $H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ является суммой по $j = 0, 1, 2, \dots, [l/2]$ слагаемых

$$(-1)^j (h_{k_1}, h_{k_2}) \dots (h_{k_{2j-1}}, h_{k_{2j}})(x, h_{k_{2j+1}}) \dots (x, h_{k_l}), \quad (6)$$

где $k_1, \dots, k_l$ — произвольная перестановка чисел $1, \dots, l$, при этом все перестановки, отличающиеся друг от друга порядком векторов в скалярных произведениях и порядком, в котором встречаются скалярные произведения, отождествляются. Для данного $0 \leq j \leq [l/2]$ в $H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ входят

$$\frac{C_l^2 C_{l-2}^2 \cdots C_{l-2j+2}^2}{j!} = \frac{l!}{2^j j! (l-2j)!}$$

слагаемых вида (6). В случае $h_1 = \dots = h_l = h$

$$H_l^{(0)}(x)(h, \dots, h) = l! \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^j (h, h)^j}{2^j j!} \frac{(x, h)^{l-2j}}{(l-2j)!},$$

что при $k=1$ совпадает с $H_l(x)h^l$, где $H_l(x)$ — (одномерный) многочлен Чебышёва–Эрмита порядка l .

Перечислим некоторые свойства функционалов $H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)$, используя при этом тот факт, что они являются симметрическими функциями переменных $h_1, \dots, h_l$, поэтому их можно записывать в виде $H_l^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\})$, где $\{h_1, \dots, h_l\}$ — множество, состоящее из векторов $h_1, \dots, h_l$.

Для $l=1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$(H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l))'_x(h_{l+1}) = \sum_{j=1}^l (h_{l+1}, h_j) H_{l-1}^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_j\}), \quad (7)$$

$$(H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l))'_x(h_{l+1}) = (x, h_{l+1}) H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) - H_{l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1})$$

и рекуррентная формула

$$\begin{aligned} H_{l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) &= (x, h_{l+1}) H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l (h_{l+1}, h_j) H_{l-1}^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_j\}). \end{aligned} \quad (8)$$

Обратим внимание на то, что при дифференцировании функционала $H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ порядок производной по x понижается, а порядок по $h_1, h_2, \dots$ увеличивается.

Функционалы $H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ и $H_j^{(0)}(x)(u_1, \dots, u_j)$ при $l \neq j$ ортогональны с весом $\varphi(x)$, т.е.

$$\int H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) H_j^{(0)}(x)(u_1, \dots, u_j) \varphi(x) dx = 0. \quad (9)$$

Последнее равенство очевидно, если числа l и j имеют различную четность, в этом случае подынтегральное выражение в (9) будет нечетной функцией x . Оно также очевидно для $H_0^{(0)}$ и $H_2^{(0)}$ в силу того, что $\varphi(x)$ есть плотность распределения с нулевым средним и единичным ковариационным оператором. Пусть (9) справедливо для $l \neq j$, $0 \leq l, j \leq m$, $m \geq 2$. Ясно, что (9) будет доказано при всех $l \neq j$, если мы покажем, что оно справедливо для $H_{m+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_m, e)$ и всех $H_j^{(0)}(x)(u_1, \dots, u_j)$, $0 \leq j \leq m-1$, где e — произвольный вектор единичной длины. Но

$$\begin{aligned} &\int H_{m+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_m, e) H_j^{(0)}(x)(u_1, \dots, u_j) \varphi(x) dx \\ &= - \int \left(H_m^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_m) \varphi(x) \right)'_x(e) H_j^{(0)}(x)(u_1, \dots, u_j) dx \\ &= - \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \int \left(H_m^{(0)}(x+ve)(h_1, \dots, h_m) \varphi(x+ve) \right. \\ &\quad \left. - H_m^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_m) \varphi(x) \right) H_j^{(0)}(x)(u_1, \dots, u_j) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \int H_m^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_m) \varphi(x) \\
&\quad \times \left(H_j^{(0)}(x - ve)(u_1, \dots, u_j) - H_j^{(0)}(x)(u_1, \dots, u_j) \right) dx \\
&= \int H_m^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_m) \varphi(x) \left(H_j^{(0)}(x)(u_1, \dots, u_j) \right)'_x(e) dx.
\end{aligned}$$

Последний интеграл равен нулю, что очевидно, если при $j \geq 1$ мы используем равенство (7) и предположение индукции. Заметим, что здесь мы, по существу, провели интегрирование по частям в пространстве E^k .

Отметим, что многочлены $H_l^{(0)}$ появлялись в работе [5].

Обратимся теперь ко второй строке таблицы (3), которая содержит функционалы $H_l^{(2)}(x)(h_1, \dots, h_l) = (-1)^l (((x, x) - k) \varphi(x))^{(l)}(h_1, \dots, h_l) / \varphi(x)$.

Используя аналог формулы Лейбница для дифференцирования произведения

$$\begin{aligned}
(uv)^{(l)}(x)(h_1, \dots, h_l) &= \sum_{j=0}^l \sum_{k_1, \dots, k_j} u^{(j)}(x)(h_{k_1}, \dots, h_{k_j}) v^{(l-j)}(x) \\
&\quad \times (\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_{k_1}, \dots, h_{k_j}\}),
\end{aligned}$$

где внутреннее суммирование проводится по всем наборам различных чисел $k_1, \dots, k_j$ из множества $\{1, \dots, l\}$, и равенства $(x, x)'(h_1) = 2(x, h_1)$ и $(x, x)''(h_1, h_2) = 2(h_1, h_2)$, легко видеть, что

$$H_1^{(2)}(x)(h_1) = ((x, x) - k)(x, h_1) - 2(x, h_1)$$

и при $l \geq 2$

$$\begin{aligned}
H_l^{(2)}(x)(h_1, \dots, h_l) &= ((x, x) - k) H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) \\
&\quad - 2 \sum_{j=1}^l (x, h_j) H_{l-1}^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_j\}) \\
&\quad + \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^l (h_{j_1}, h_{j_2}) H_{l-2}^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_{j_1}, h_{j_2}\}).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (8) следует, что для $l \geq 2$

$$\begin{aligned}
H_l^{(2)}(x)(h_1, \dots, h_l) &= ((x, x) - k) H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) - 2l H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) \\
&\quad - \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^l (h_{j_1}, h_{j_2}) H_{l-2}^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_{j_1}, h_{j_2}\}).
\end{aligned}$$

Дифференцируя это равенство и используя (7) и (8), нетрудно получить равенства

$$\begin{aligned}
(H_l^{(2)}(x)(h_1, \dots, h_l))'_x(h_{l+1}) &= \sum_{j=1}^l (h_{l+1}, h_j) H_{l-1}^{(2)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_j\}) \\
&\quad + 2H_{l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}), \quad l = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

(для $l = 1$ последнее равенство проверяется непосредственно) и рекуррентную формулу

$$\begin{aligned}
H_{l+1}^{(2)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) &= (x, h_{l+1}) H_l^{(2)}(x)(h_1, \dots, h_l) \\
&\quad - \sum_{j=0}^l (h_{l+1}, h_j) H_{l-1}^{(2)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_j\}) \\
&\quad - 2H_{l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}).
\end{aligned}$$

Понятно, что для многочленов $H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1})$, $j = 2, 3, \dots$, $l = 1, 2, \dots$, справедливы равенства, аналогичные приведенным выше, позволяющие вычислять их с помощью производных функций $H_0^{(2j)}(x)$ и многочленов Чебышёва-Эрмита из первой строки таблицы (3), здесь мы не будем на этом останавливаться.

Заметим теперь, что если в равенстве (5) положить $j = 0$, а $h_{l-2m+1} = \dots = h_l = u$, где m — целое число, $1 \leq m \leq [l/2]$, затем умножить это равенство на $\varphi(u)$ и проинтегрировать его по $u \in E^k$, то в результате получится равенство

$$\alpha_{2m} \frac{i^l}{(2\pi)^k} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t, h_1) \dots (t, h_{l-2m}) (t, t)^m dt \\ = \int H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l-2m}, u, \dots, u) \varphi(u) du \varphi(x),$$

где $\alpha_{2m} = (2m-1)!!$ — момент порядка $2m$ (одномерного) стандартного нормального закона. Отсюда следует, что для $j = 1, \dots, [l/2]$

$$\alpha_{2j} H_{l-2j}^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_{l-2j}) = \int H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l-2j}, u, \dots, u) \varphi(u) du, \quad (10)$$

т.е. любой многочлен Чебышёва-Эрмита, стоящий в l -м столбце таблицы (3), можно получать интегрированием (с весом φ) многочлена Чебышёва-Эрмита $H_l^{(0)}$, стоящего в первой строке этой таблицы. Применяя дважды этот прием к равенству (9), мы убеждаемся в том, что все многочлены Чебышёва-Эрмита, стоящие в различных столбцах таблицы (3), ортогональны с весом $\varphi(x)$.

Из (10) следует также, что для любого $j = 1, 2, \dots$

$$H_0^{(2j)}(x) = \frac{1}{\alpha_{2j}} \int H_{2j}^{(0)}(x)(u, \dots, u) \varphi(u) du \\ = \frac{(2j)!}{\alpha_{2j}} \sum_{s=0}^j \frac{(-1)^s}{2^s s!} \frac{|x|^{2j-2s}}{(2j-2s)!} \int (e, u)^{2j-2s} (u, u)^s \varphi(u) du,$$

где e — произвольный вектор единичной длины в E^k , что позволяет достаточно просто получать явный вид функций $H_0^{(2j)}$, поскольку вычисление последних интегралов не требует большого труда. Приведем общую формулу для вычисления многочленов $H_0^{(2j)}(x)$ для любого $j \geq 3$. Функция $H_0^{(2j)}(x)$ имеет вид $\sum_{s=0}^j C_s^j (-1)^s |x|^{2j-2s} m_{j,s}$, где $m_{j,s}$ — произведение s первых сомножителей из произведения $(k+2j-2) \dots (k+2)k$.

Назовем полными многочленами Чебышёва-Эрмита функционалы $HH_l(x, u)$, $x, u \in E^k$, определяемые равенствами

$$\frac{HH_l(x, u)}{l!} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^j}{2^j j!} \frac{H_{l-2j}^{(2j)}(x)(u, \dots, u)}{(l-2j)!}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что в одномерном случае $HH_l(x, u) = H_l(x) H_l(u)$, т.е. для $k = 1$ полные многочлены Чебышёва-Эрмита $HH_l(x, u)$ распадаются в произведения многочленов Чебышёва-Эрмита $H_l(x)$ и $H_l(u)$.

С помощью этих многочленов Чебышёва-Эрмита мы можем получить аналог разложения (1). Для этого введем функции

$$\theta H_l(x; p) = \int HH_l(x, u) p(u) du,$$

где p — плотность распределения вероятностей с нулевым средним и единичным ковариационным оператором в E^k . Упомянутый аналог разложения Чебышёва (1) имеет вид

$$p(x) = \varphi(x) + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\theta H_l(x; p)}{l!} \varphi(x). \quad (11)$$

Нетрудно показать, что для плотностей p с нулевым средним и единичным ковариационным оператором $\theta H_1 \equiv \theta H_2 \equiv 0$. Легко проверить также, что для плотности φ при всех $l = 1, 2, \dots$ справедливы равенства $\theta H_l(x; \varphi) \equiv 0$.

Таким образом, для получения аналога разложения (1) мы вначале вводим функционалы $H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l)$ и $HH_l(x, u)$, далее с их помощью получаем функции $\theta H_l(x; p)$ (которые оказываются ортогональными с весом $\varphi(x)$, зависят от плотности p и являются интегральными характеристиками p , причем довольно грубыми в том смысле, что для их вычисления достаточно знать смешанные моменты p), а затем с помощью этих функций мы восстанавливаем плотность $p(x)$.

Для того чтобы убедиться в справедливости (11), введем характеристическую функцию

$$f(t) = \int e^{i(t,x)} p(x) dx$$

плотности p . Легко видеть, что

$$e^{|t|^2/2} f(t) = e^{|t|^2/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \int (t, u)^l p(u) du = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{2j} (-1)^j}{2^j j!} (t, t)^j \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \int (t, u)^l p(u) du.$$

Произведение двух последних рядов можно записать в виде суммы по $0 \leq l < \infty$ величин

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{i^{l-2j}}{(l-2j)!} \left\{ \int (t, u)^{l-2j} p(u) du \right\} \frac{(-1)^j i^{2j}}{j! 2^j} (t, t)^j \\ &= \int \left\{ i^l \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \frac{1}{(l-2j)!} (t, t)^j (t, u)^{l-2j} \right\} p(u) du. \end{aligned}$$

Применяя теперь формулу обращения для преобразования Фурье

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int e^{-i(t,x)} f(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^k} \int e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \left\{ e^{|t|^2/2} f(t) \right\} dt$$

и проводя несложные преобразования, мы убеждаемся в справедливости (11).

Стоит отметить, что для распределений с нулевым средним и единичным ковариационным оператором при интегрировании $HH_l(x, u)$ по плотности $p(u)$ в случае нечетных l слагаемое в $HH_l(x, u)$, соответствующее $j = [l/2] = (l-1)/2$, т.е.

$$\frac{(-1)^{(l-1)/2}}{2^{(l-1)/2} ((l-1)/2)!} \frac{H_1^{(l-1)}(x)(u)}{1!},$$

дает нулевой вклад в $\theta H_l(x; p)$, а в случае четных l слагаемое, соответствующее $j = l/2 - 1$, т.е. слагаемое

$$\frac{(-1)^{l/2-1}}{2^{l/2-1} (l/2 - 1)!} \frac{H_2^{(l-2)}(x)(u, u)}{2!},$$

даст вклад в $\theta H_l(x; p)$, равный

$$\frac{(-1)^{l/2-1}}{2^{l/2} (l/2 - 1)!} H_0^{(l)}(x).$$

Сформулируем один результат, иллюстрирующий возможности предложенных многочленов Чебышёва–Эрмита.

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, принимающие значения в пространстве E^k . Пусть четвертый момент $E|X_1|^4$ конечен и характеристическая функция f распределения P этих случайных величин такова, что для некоторого числа $\nu > 0$

$$\int |f(t)|^\nu dt < \infty.$$

Тогда при всех $n \geq \nu$ существует непрерывная плотность $p_n(x)$ нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)n^{-1/2}$ и для всех $x \in E^k$

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{1}{6\sqrt{n}} \left\{ \int ((x, u)^3 - 3(x, u)(u, u)) P(du) \right\} \varphi(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Для величины $O(1/n)$ можно выписать явную оценку, но ее запись требует дополнительных определений, поэтому мы этого делать не будем.

В заключение отметим, что результаты, приведенным, справедливы для плотности с любым ковариационным оператором.

Пользуюсь случаем поблагодарить О. В. Вискова и В. М. Круглова за обсуждение и В. М. Золотарёва за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
2. Cramér H. On the composition of elementary errors. I: Mathematical deductions; II: Statistical Applications. — Skand. Actuarietidskrift, 1928, v. 11, p. 13–74; 141–180.
3. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
4. Сенатов В. В. Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме с явными оценкам остаточных членов. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 4, с. 810–816.
5. Сенатов В. В. Качественные эффекты в оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме в многомерных пространствах. — Тр. МИАН, 1997, т. 215, с. 1–239.

Поступила в редакцию
27.XII.2005

© 2007 г.

HIPP C.*, MATTNER L.**

ON THE NORMAL APPROXIMATION TO SYMMETRIC BINOMIAL DISTRIBUTIONS

Показано, что наилучшая константа при $1/\sqrt{n}$ в оценке ошибки в центральной предельной теореме для функций распределения сумм независимых симметричных бернуллиевских случайных величин есть $1/\sqrt{2\pi}$.

Ключевые слова и фразы: биномиальное распределение, центральная предельная теорема, наилучшая оценка ошибки, симметричные бернуллиевские величины.

* Universität zu Karlsruhe (TH), Lehrstuhl für Versicherungswissenschaft, Kronenstr. 34, D-76128 Karlsruhe, Germany; e-mail: christian.hipp@kit.edu; Web page: insurance.fbv.uni-karlsruhe.de/Hipp.php

** Universität zu Lübeck, Institut für Mathematik, Wallstr. 40, D-23560 Lübeck, Germany; e-mail: mattner@math.uni-luebeck.de; Web page: www.math.uni-luebeck.de/mattner