Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, О неравенстве Дж. Дуба для характеристических функций, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 650–652

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 11:54:59

Теорема 3 позволяет уточнить некоторые оценки из [4]. Разумеется, к ней в полной мере относится замечание, сделанное после следствия 2 теоремы 2.

Отметим, что функция $H(t)$ используется для оценки $|f(t)|$: так же, как в [5, лемма 3], используя рассуждения из теоремы 2, можно показать, что $|f(t)| \leq 1 - 8H(t/2\pi)$ и, следовательно (см. (20)),

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{2}{3} \frac{t^2}{4\pi^2} \sum_i \frac{p_i^3}{(c_i \tau_i(t))^2}.$$

Последняя оценка, впрочем, хуже оценки (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ushakov N. G. Lower and upper bounds for characteristic functions. — J. Math. Sci., 1997, v. 84, № 3, p. 1179–1189.
2. Проторов Ю. В. Об одной локальной теореме. — В сб.: Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 75–80.
3. Статулявичус В. А. Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 4, с. 645–659.
4. Мушин А. Б. Аппроксимация локальных вероятностей сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 715–730.
5. Мушин А. Б. Локальные предельные теоремы для распределений сумм независимых случайных векторов. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. XXIX, в. 2, с. 360–366.

Поступила в редакцию
24.IX.1998

© 1999 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

О НЕРАВЕНСТВЕ ДЖ. ДУБА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ¹⁾

В работе получено уточнение неравенств Дж. Дуба для характеристической функции.

Ключевые слова и фразы: характеристическая функция, ограниченная случайная величина, неравенство.

Пусть X — случайная величина с характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2 . В [1, с. 47] доказано следующее утверждение: если $|X| \leq c$, то

$$e^{-\sigma^2 t^2} \leq |f(t)| \leq e^{-\sigma^2 t^2/3}, \quad |t| \leq \frac{1}{4c}. \quad (1)$$

Определенный интерес представляет уточнение показателей экспонент в (1) и расширение области применения этого неравенства. Некоторые шаги в этом направлении были предприняты в [2]. Приведем теорему 3 из [2], вернее, более точные промежуточные оценки, из которых эта теорема вытекает: если $EX = 0$, то

$$1 - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \leq \operatorname{Re} f(t) \leq |f(t)| \quad \forall t; \quad (2)$$

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00724) и гранта ведущих научных школ № 96-15-96199.

если $|X| \leq c$, то

$$|f(t)| \leq 1 - \tau(A)\sigma^2 t^2, \quad |t| \leq \frac{A}{c}, \quad (3)$$

где $0 \leq A \leq \pi/4$, а $\tau(t) = (1 - \cos t)/t^2$.

По поводу неравенства (2) заметим, что оно является следствием следующего более общего утверждения.

Теорема 1. Пусть целое $l \geq 0$. Если $EX^{4l} < \infty$, то

$$S_{2l+1}(t) \leq \operatorname{Re} f(t) \leq S_{2l}, \quad (4)$$

где $S_n(t) = \sum_{k=0}^n t^{2k} (-1)^k EX^{2k}/(2k)!$.

Соотношение (4) вытекает из неравенства $(-1)^{n+1}(\cos t - \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}/(2k)!) \geq 0$, которое легко проверить по индукции (см. [3, гл. V, п. 4, а также гл. VII, (6.7)]).

Заметим, что оценки, аналогичные (4), имеют место и для $\operatorname{Im} f(t)$.

Далее, на примере покажем, что неравенство (3), вообще говоря, не верно.

Пусть случайная величина $X = X_p$ принимает значения $-c$ и c с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно. Тогда $|X_p| = c$, $\sigma^2 = DX_p = 4c^2 pq$,

$$|f(t)|^2 = |p + q e^{i2ct}|^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos 2ct \geq (p + q \cos 2ct)^2, \quad (5)$$

откуда

$$|f(t)| \geq 1 - \frac{1}{p} \tau(2ct)\sigma^2 t^2. \quad (6)$$

Если бы соотношение (3) было верно, то из него и из (6) при $t = A/c$ следовало бы, что $1 - p^{-1} \tau(2A)\sigma^2 t^2 \leq |f(t)| \leq 1 - \tau(A)\sigma^2 t^2$, или $p \leq p_A = \tau(2A)/\tau(A)$.

Функция $\tau(t)$ убывает на $[0, 2\pi]$ (см., например, [4, с. 136]). Таким образом, $p_A < 1$. Выбирая в нашем примере $p > p_A$, приходим к противоречию.

Приведем правильную оценку $|f(t)|$.

Теорема 2. Если $|X| \leq c$, то

$$|f(t)|^2 \leq 1 - 2\tau(2ct)t^2\sigma^2, \quad |t| \leq \frac{\pi}{c}. \quad (7)$$

В частности, при любом $A \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} |f(t)|^2 &\leq 1 - 2\tau(A)t^2\sigma^2, \quad |t| \leq \frac{A}{2c}, \\ |f(t)| &\leq 1 - \tau(A)t^2\sigma^2, \quad |t| \leq \frac{A}{2c}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что оценка (7) является точной и достигается при $X = X_p$.

В самом деле, из (5) следует, что в этом случае

$$|f(t)|^2 = 1 - 8pq c^2 t^2 \tau(2ct) = 1 - 2\sigma^2 t^2 \tau(2ct) \quad \forall t.$$

Для обоснования оценки (7) заметим, что $|f(t)|^2$ — характеристическая функция «симметризованной» случайной величины $\tilde{X}$, для которой $|\tilde{X}| \leq 2c$, $E\tilde{X}^2 = 2\sigma^2$. Отсюда при $2c|t| \leq 2\pi$

$$|f(t)|^2 = 1 - t^2 E\tau(t\tilde{X}) \tilde{X}^2 \leq 1 - t^2 \tau(2ct) E\tilde{X}^2 = 1 - t^2 \tau(2ct) 2\sigma^2, \quad (9)$$

что и требовалось доказать.

Следующий результат обобщает оценку (7) на случай неограниченной случайной величины X .

Теорема 3. Пусть $c > 0$. Тогда

$$|f(t)|^2 \leq 1 - 2\tau(2ct)t^2(\sigma^2 - 2EX^2 I[|X| > c]), \quad |t| \leq \frac{\pi}{c}. \quad (10)$$

В частности, при любом $A \in [0, 2\pi]$

$$|f(t)|^2 \leq 1 - \tau(A)t^2(\sigma^2 - 2EX^2 I[|X| > c]), \quad |t| \leq \frac{A}{2c}.$$

Доказательство. Так же, как в (9), покажем, что $|f(t)|^2 \leq 1 - t^2 \tau(2ct) E \tilde{X}^2 I[|\tilde{X}| \leq 2c]$. Остается воспользоваться следующей леммой.

Лемма.

$$E \tilde{X}^2 I[|\tilde{X}| > 2c] \leq 4 E X^2 I[|X| > c]. \quad (11)$$

Доказательство. Поскольку $\tilde{X} = X - Y$, где X и Y независимы и одинаково распределены, а $EX = 0$, то

$$E \tilde{X}^2 I[|\tilde{X}| \leq 2c] \geq E(X - Y)^2 I[|X| \leq c, |Y| \leq c] = 2EX^2 I_c E I_c - 2(EX I_c)^2, \quad (12)$$

где $I_c = I[|X| \leq c]$, $\bar{I}_c = 1 - I_c$.

Далее,

$$EX^2 I_c E I_c = (\sigma^2 - EX^2 \bar{I}_c)(1 - E \bar{I}_c) = \sigma^2 - EX^2 \bar{I}_c - EX^2 E \bar{I}_c + EX^2 \bar{I}_c E \bar{I}_c,$$

$$EX^2 E \bar{I}_c = (EX^2 I_c + EX^2 \bar{I}_c) E \bar{I}_c \leq E I_c c^2 c^{-2} EX^2 \bar{I}_c + EX^2 E \bar{I}_c = EX^2 \bar{I}_c,$$

$$(EX \bar{I}_c)^2 \leq EX^2 \bar{I}_c E \bar{I}_c.$$

Отсюда и из (12) следует оценка (11). Лемма, а вместе с ней и теорема 3, доказаны.

Заметим, что теорема 3 уточняет аналогичное утверждение из [4].

В заключение приведем одно любопытное следствие оценок (2) и (8).

Следствие. Пусть $c > 0$ — некоторое число, $\{\Delta_k\}$ — набор непересекающихся интервалов длиной $2c$, $\bigcup_k \Delta_k = R$; положим $\delta_k^2 = \inf_a E(X - a)^2 I[X \in \Delta_k]$, $\Delta = \sum_k \delta_k^2$. Тогда

$$1 - \frac{1}{2} \Delta^2 t^2 \leq |f(t)|, \quad |t| \leq \frac{\sqrt{2}}{c}, \quad \text{и} \quad |f(t)| \leq 1 - \tau(A) \Delta^2 t^2, \quad |t| \leq \frac{A}{2c}, \quad 0 \leq A \leq 2\pi.$$

В частности,

$$1 - \frac{1}{2} \Delta^2 t^2 \leq |f(t)| \leq 1 - \tau(A) \Delta^2 t^2, \quad |t| \leq \frac{A}{2c}, \quad 0 \leq A \leq 2\sqrt{2}.$$

Заметим, что $\delta_k^2 = E(X - a_k)^2 I[X \in \Delta_k] = EX^2 I[X \in \Delta_k] - p_k a_k^2$, где $a_k = p_k^{-1} EX I[X \in \Delta_k]$, $p_k = P\{X \in \Delta_k\}$.

Доказательство. Очевидно, $f(t) = \sum_k p_k f_k(t)$, где $f_k(t) = p_k^{-1} E e^{itX} I[X \in \Delta_k]$ — характеристическая функция случайной величины $X_k \in \Delta_k$ с дисперсией $DX_k = p_k^{-1} \delta_k^2$, причем как $|f(t)|$, так и DX_k инвариантны по отношению к сдвигу X_k , что позволяет вместо X_k рассматривать $\bar{X}_k$, $|\bar{X}_k| \leq c$. В итоге,

$$|f(t)| \leq \sum_k p_k |f_k(t)| \leq \sum_k p_k \left(1 - \tau(A) t^2 \frac{\delta_k^2}{p_k}\right), \quad |t| \leq \frac{A}{2c},$$

$$|f(t)| \geq |\operatorname{Re} f(t)| = \left| \sum_k p_k \operatorname{Re} f_k(t) \right| = \sum_k p_k \operatorname{Re} f_k(t) \geq \sum_k p_k \left(1 - t^2 \frac{\delta_k^2}{2p_k}\right),$$

если, конечно, $\operatorname{Re} f(t) \geq 0$, что имеет место при $|t| \leq \sqrt{2}/c$, поскольку $1 - t^2 \delta_k^2/(2p_k) \geq 1 - t^2 c^2/2$ в силу оценки $\delta_k^2/p_k \leq E \bar{X}_k^2 \leq c^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Луб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
2. Ushakov N. G. On lower and upper bounds for characteristic functions. — J. Math. Sci., 1997, v. 84, № 3, p. 1179–1189.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: ИЛ/Мир, 1984, 752 с.
4. Розовский Л. В. О точности нормального приближения. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1989, т. 177, с. 129–137.

Поступила в редакцию
24.IX.1998