Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Рецензия на книгу Habib M., McDiarmid C., Ramirez-Alfonsin J., Reed B. (Eds.) “Probabilistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 681–685

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 03:27:42

© 1999 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Habib M., McDiarmid C., Ramirez-Alfonsin J., Reed B. (Eds.) **Probabilistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics.** (Algorithms and Combinatorics, v. 16.) New York–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, xvii, 323 p.

Данная книга, состоящая из семи статей, посвященных различным аспектам применения вероятностных методов в дискретной математике, является плодом усилий девяти авторов и четырех редакторов. Столь необычное соотношение членов авторского коллектива принесло свои результаты — перед нами изящная работа, в которой лишь изредка чувствуется (из-за повтора материала в некоторых разделах), что в ее создании принимало участие несколько человек. В каждой статье сборника читатель увидит пиршество теории вероятностей. Моментами авторы просто упиваются красотой и возможностями вероятностных методов и ярко демонстрируют, как эти методы позволяют не только упростить доказательства известных и трудных задач дискретной математики, но и установить справедливость утверждений, попытки доказательства которых были безуспешны в течение десятилетий. Наверное, восторги авторов (и мои тоже) необходимо подкрепить конкретными примерами. Они не заставят себя ждать.

Поскольку основным замыслом книги было желание авторов объяснить исследователям, не являющимся глубокими знатоками теории вероятностей, возможности применения вероятностных идей к анализу комбинаторных структур и алгоритмов, при ее написании нельзя было обойтись без изложения основ так называемого вероятностного метода. Именно этой цели служат статьи М. Маллоу (M. Molloy) «Вероятностный метод» и Мак-Диармида (McDiarmid) «Концентрация». Известно, что первые попытки применения вероятностных соображений к задачам дискретной математики были сделаны в середине 30-х — начале 40-х годов. Однако лишь после работ П. Эрдёша, опубликованных в конце 40-х годов, началось систематическое использование вероятностных методов в комбинаторной математике. Поэтому не удивительно, что статья Маллоу имеет (в идейном смысле) много общего с книгой [1]. В ней показано, как, используя неравенства Маркова, Чебышева, Чернова и Хёффдинга–Азумы, можно устанавливать существование (или отсутствие) комбинаторных объектов специального вида.

Наряду с вопросами существования комбинаторных объектов, удовлетворяющих тем или иным свойствам, важное значение имеют различные функции, определенные на комбинаторных объектах (число связанных компонент графа, хроматическое число, число пороговых множеств данной мощности и т.п.), или числовые характеристики, связанные с длительностью работы алгоритмов (количество операций, объем памяти и т.д.). Весьма часто интерес представляют типичные значения упомянутых характеристик (точнее, концентрация вокруг типичных значений), или, в вероятностных терминах, их математические ожидания (или вероятностей значительных отклонений от математических ожиданий) в предположении, что на множестве изучаемых объектов задано равномерное распределение. Иногда ответы на такого рода вопросы можно получить, используя оценки сверху для вероятностей больших отклонений сумм независимых ограниченных случайных величин, которые остаются справедливыми и для функций, определенным образом зависящих от наборов независимых величин. В статьях Маллоу и Мак-Диармида довольно подробно изложен метод «ограниченных

разностей», опирающийся на результаты теории больших уклонений и широко используемый при доказательстве разного рода результатов в дискретной математике, исследовании операций и анализе алгоритмов.

В этих же статьях описан сравнительно новый метод решения задач концентрации, основанный на недавно доказанных Талграндом неравенствах [3]–[5]. Мы приведем лишь наиболее яркий пример применения этого метода, использующего следующую версию одного из неравенства Талгранда.

Пусть $T_1(\omega), \dots, T_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$, — реализация набора независимых случайных величин $T_1, \dots, T_n$, определенных на общем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и пусть случайная величина $X = X(T_1, \dots, T_n)$, принимающая значения $1, \dots, n$ такова, что

1) $|X(\omega_1) - X(\omega_2)| \leq c, c > 0$, для любых ω_1, ω_2 таких, что $T_i(\omega_1) \neq T_i(\omega_2)$ лишь для одного индекса $i \in \{1, \dots, n\}$;

2) для любого $s \in \{1, \dots, n\}$ справедливо утверждение: если $X(\omega) \geq s$, то существуют $T_{i_1}(\omega), \dots, T_{i_s}(\omega)$, знание значений которых автоматически влечет $X(\omega) \geq s$.

Тогда для любого $t \in (0, EX]$

$$P\{|X - EX| > t + \sqrt{EX}\} \leq 2 \exp \left\{ - \frac{t^2}{16c^2 E(X)} \right\}.$$

Пусть теперь $\sigma = x_1, \dots, x_n$ — случайная перестановка чисел $1, \dots, n$, а $X(\sigma)$ — длина максимальной возрастающей подпоследовательности в σ . Усилиями нескольких исследователей было показано, что $E(X) \sim 2\sqrt{n}$, $n \rightarrow \infty$. Возникает естественный вопрос: в каком диапазоне с высокой вероятностью сконцентрирована основная масса значений X ? Для ответа на этот вопрос достаточно рассмотреть порождение случайной перестановки при помощи следующей стандартной процедуры. Пусть $T_1, \dots, T_n$ — последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на $[0, 1]$. Расположив величины $T_1, \dots, T_n$ в неубывающем порядке, а затем взяв в качестве σ индексы полученного вариационного ряда, легко проверить, что $X(\sigma)$ удовлетворяет всем условиям необходимым для справедливости неравенства Талгранда с $c = 1$. Отсюда, выбирая $t = (N - 1)\sqrt{EX}$, заключаем, что $\{|X - EX| \geq N\sqrt{EX}\}$ с вероятностью близкой к единице.

Статья Д. Уэлша (D. Welsh) «Просачивание и модель случайных кластеров: комбинаторные и алгоритмические проблемы» содержит обзор некоторых последних результатов по теории просачивания и является неплохим дополнением к монографии [6]. В ней, наряду с изложением основных понятий теории просачивания, обсуждаются свойства моделей Изинга и Поттса, а также свойства многочленов Татта. В конце статьи сформулирован ряд гипотез, решение которых является, по мнению автора, важным для дальнейшего развития теории просачивания и случайных кластеров.

Обзор Л. Девроя (L. Devroy) «Ветвящиеся процессы и их применения к анализу структуры деревьев и древоподобных алгоритмов» посвящен анализу последних достижений в теории случайных деревьев и возможностям использования этих достижений для выяснения свойств алгоритмов типа ветвления. В статье, наряду с известными результатами о свойствах бинарных деревьев поиска (распределение высоты случайного бинарного дерева и глубины успешного поиска), включенными, например, в недавно вышедшую книгу [7], читатель найдет и ряд результатов о m -арных деревьях, доказанных при помощи теории ветвящихся случайных блужданий и ветвящихся процессов Беллмана–Харриса и Крампа–Мода–Ягерса, а также о свойствах компонент случайных графов.

Статья М. Джеррума (M. Jerrum) «Математические основы метода Монте-Карло для марковских цепей», несомненно, является центральной работой сборника. Алгоритмы, основанные на методе Монте-Карло, в течение многих лет использовались в статистической физике для оценки таких характеристик, определенных

на «конфигурациях», возникающих в статистических моделях, истинные значения которых трудно (или невозможно) вычислить точно. Эффективность оценок, полученных таким образом, существенно зависит от того, как скоро свойства случайного блуждания, моделируемого методом Монте-Карло, сближаются со свойствами соответствующего стационарного случайного блуждания по «конфигурациям». В работе приведены последние результаты в этой области о скорости сходимости к стационарному распределению для ряда цепей Маркова (доказываемые, например, при помощи геометрических соображений и каллинг-метода). Применение такого рода идей в задачах дискретной математики основывается на следующем важном понятии случайной аппроксимационной схемы.

Пусть Σ — некоторый алфавит, Σ^* — множество слов, построенных из букв алфавита Σ , а $N: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ — отображение Σ^* в множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

О п р е д е л е н и е. Случайной аппроксимационной схемой называется рандомизированный алгоритм, который для фиксированного $\epsilon > 0$ и каждого входного слова $w \in \Sigma^n$ выдает случайное число $Y(w) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$P\left\{(1 - \epsilon) N(w) \leq Y(w) \leq (1 + \epsilon) N(w)\right\} \geq \frac{3}{4}.$$

В работе рассмотрен ряд конкретных рандомизированных алгоритмов, применяемых для оценки вклада димеров в «энергию» графа с фиксированной конфигурацией вершин, для оценки числа линейных продолжений, построенных при помощи элементов частично упорядоченного множества, для нахождения приближенных значений некоторых характеристик распределений, порожденных случайными кластерами и т.д.

В конце обзора обсужден ряд проблем, при решении которых, как надеется автор, могут быть полезны случайные аппроксимационные схемы. Среди этих задач — проблема нахождения перманента 0-1 матриц и исследование некоторых свойств матроидов.

«Вероятностный анализ алгоритмов» — так озаглавлена обзорная статья А. Фриза (A. M. Frieze) и Б. Рида (B. Reed). В ней рассматриваются детерминированные алгоритмы, обрабатывающие случайные входные данные. Содержание обзора можно условно разделить на 3 части.

В первой из них обсуждаются алгоритмы, которые либо эффективно работают для большинства случайных входных данных, либо имеют разумное среднее время работы. Здесь описаны (иногда весьма детально) схемы работы алгоритма поиска гамильтоновых циклов, алгоритм такой раскраски ребер графов, при которой любые два ребра, выходящие из одной и той же вершины, окрашены в различные цвета, алгоритм проверки изоморфизма графов, алгоритм нахождения кратчайших путей между всеми вершинами полного диграфа при условии, что его ребрам приписаны случайные длины.

Во второй части рассматриваются алгоритмы, которые работают быстро, но находят не обязательно оптимальное решение, а лишь решение, которое либо часто является оптимальным (на примере задачи о коммивояжере для неориентированного и ориентированного графов), либо очень близко к оптимальному (на примере работы жадного алгоритма для нахождения устойчивых множеств в графах), либо, наконец, разумно близко к оптимальному (на примере задачи об упаковке рюкзака).

В третьей части статьи авторы рассматривают ряд NP-трудных задач, для которых на сегодняшний день не удалось найти даже близких к оптимальным (в различных смыслах) алгоритмов, а также обсуждают вопросы «чувствительности» алгоритмов к распределению, заданному на входных данных. Мы не будем подробно анализировать этот раздел обзора, а отсылаем интересующегося читателя к сайту в сети Интернет с адресом <http://www.uncg.edu/mat/avg.html>, где авторы обзора детально обсуждают данный круг проблем.

Если в работе А. Фриза и Б. Рида рассматривались алгоритмы, все шаги которых однозначно определялись по начальным данным, то в статье Р. Мотвани (R. Motvani) и П. Рагхавана (P. Raghavan) «Взгляд на рандомизированные алгоритмы» обсуждаются алгоритмы, в которых элементы случайности являются неотъемлемой частью их работы даже при условии, что входные данные неслучайны. К такому классу алгоритмов относится, в частности, рандомизированный алгоритм быстрой сортировки (РАБС), являющийся модификацией известного алгоритма быстрой сортировки Хоара (см. [8] или [9, раздел 5.2.2]) и предназначенного для упорядочения набора S , состоящего из n различных чисел (или элементов другого линейно упорядоченного множества), в порядке возрастания.

Схема работы РАБС такова. На первом шаге из множества S наудачу (в соответствии с равномерным распределением) выбирается некоторое число, скажем, y . Методом сравнения каждого из оставшихся элементов S с числом y находятся множество $S_1 \in S$, содержащее все элементы, меньшие, чем y , и множество $S_2 \in S$, содержащее все элементы, превосходящие y . Затем процедура, использовавшаяся на первом шаге, применяется по отдельности к множествам S_1 и S_2 .

Можно показать, что для любого начального расположения элементов множества S среднее число сравнений для получения упорядоченного множества не превосходит $2n \sum_{i=1}^n 1/i$, в то время как исходный алгоритм сортировки Хоара требует $O(n^2)$ операций, если исходное множество было «почти» упорядоченным.

В статье приведен целый ряд примеров такого рода, среди которых рандомизированные алгоритмы проверки равенства произведений матриц и полиномов над конечными полями.

Если с точки зрения подбора материала к авторам сборника и его редакторам вряд ли можно предъявить претензии — это прекрасное дополнение к известным книгам Эрдеша и Спенсера [1] и Алона и Спенсера [2], то само оформление содержит не присущие издательству Шпрингер недочеты. Внимательный читатель обнаружит, что, несмотря на внушительный коллектив редакторов, книга содержит довольно много опечаток, часть которых легко исправить (например, изменить знак неравенства на противоположный в статье Маллоу на с. 20), часть которых заставляет искать объяснение в списке литературы (в статье Мотвани и Рагхавана, содержащей лишь 47 библиографических ссылок, загадочная и неоднократно упоминаемая монография [51] на проверку оказывается книгой авторов [26]), а часть которых просто вызывает к эрудиции читателя (отмечу лишь ссылки в обзоре Девроя на целый ряд работ В. Ф. Колчина по случайным деревьям, включая неявно упоминаемую монографию «Случайные отображения», координаты которых читатель напрасно будет искать в списке литературы).

Эти недочеты вряд ли смогут испортить впечатление о рецензируемой книге. Несомненно, что читатели сборника, занимающиеся «чистой» дискретной математикой, обнаружат в нем немало полезных методов, в то время как специалисты-вероятностники откроют для себя новые области приложения вероятностных идей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эрдеш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976, 131 с.
2. Alon N., Spencer J. The Probabilistic Method. New York: Wiley, 1992, 254 p.
3. Talgrand M. A new isoperimetric inequality for product measure and tails of sums of independent variables. — Geom. Funct. Anal., 1991, v. 1, № 1, p. 211–223.
4. Talgrand M. A new look at independence. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 1, p. 1–31.
5. Talgrand M. New concentration inequalities in product spaces. — Invent. Math., 1996, v. 126, p. 505–563.

6. Кестен Г. Теория просачивания. М.: Мир, 1986.
7. Mahmoud H. Evolution of Random Search Trees. Chichester: Wiley, 1992, 324 p.
8. Hoare C. A. R. Quicksort. — Comput. J., 1962, v. 5, № 1, p. 10–15.
9. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3: Сортировка и поиск. М.: Мир, 1978, 844 с.

6.01.1999 г.

Ватутин В. А.

Болдин М. В., Симонова Г. И., Тюрин Ю. Н. Знаковый статистический анализ линейных моделей. М.: Наука, 1997, 226 с.

Линейные модели, в том числе модели множественной регрессии и модели для различных планов дисперсионного и ковариационного анализа, играют, как известно, огромную роль в современных приложениях статистики. Классическая теория оценивания и проверки гипотез в таких моделях, берущая свое начало в знаменитом методе наименьших квадратов Гаусса–Лежандра, предполагает, что случайные составляющие (ошибки) наблюдений распределены по нормальному (гауссовскому) закону.

Постепенно статистики стали осознавать, что математические предположения, лежащие в основе гауссовской модели, на практике могут не выполняться. Появилась необходимость в построении непараметрической теории, пригодной для широкого класса распределений ошибок. На этом пути в первой половине XX века появились ранговые статистические процедуры. Они основаны на предположении, что случайные ошибки независимы и имеют одинаковое непрерывное распределение.

Несколько десятилетий интенсивного развития ранговых методов для анализа линейных моделей привели к богатой и далеко продвинутой теории, изложенной, например, в монографиях Пури и Сена [1] и Хеттманспергера [2], опубликованных в 80-х годах.

Между тем, возможен и другой вариант построения непараметрической теории, основанный не на рангах, а на знаках случайных ошибок или остатков. Сохраняя условие независимости ошибок, здесь можно отказаться от их одинаковой распределенности, предполагая лишь, что распределения ошибок обладают определенной симметрией, например, имеют нулевые медианы. Простейший представитель знаковых процедур — критерий знаков — считается самым старым статистическим критерием и по существу применялся Дж. Арбетнотом [3] еще в начале XVIII в.

Привлекательным свойством знаковых статистических методов является то, что при упомянутой медианной несмещенности ошибок знаковые тестовые статистики свободны от распределения исходных данных даже при конечных объемах выборки, а не только асимптотически. Опираясь на тестовые статистики, с помощью приема «обращения» оказывается возможным получать точные доверительные интервалы и строить точечные оценки для неизвестных параметров. Эти оценки, а также тестовые статистики являются асимптотически нормальными при минимальных предположениях о распределении наблюдений. Наконец, в отличие от классических процедур типа метода наименьших квадратов, знаковые процедуры устойчивы к выбросам и грубым ошибкам в данных.

Все эти несомненные достоинства знаковых методов, наряду с их привлекательной вычислительной простотой, поставили на повестку дня написание обобщающей монографии по знаковому статистическому анализу. Рецензируемое издание и является первой такой монографией в мировой литературе. Работы его авторов М. В. Болдина, Г. И. Симоновой и Ю. Н. Тюриня сыграли в последние годы наиболее важную роль в этой области статистики, поэтому неудивительно, что книга почти целиком построена на их собственных исследованиях предыдущих 10–15 лет.

Книга состоит из введения, в котором прекрасно изложены как цели, так и основная идеология исследования, и двух частей. Первая часть посвящена регрессионному