Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Булинский, М. А. Вронский, Информация о работе семинара А. Н. Ширяева (1999 г.), *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, том 44, выпуск 3, 694–700

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp819>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:27:25

ке. Но в 1948 году у нас в СССР был окончательно завершен разгром генетики. При существовавшем тогда официальном государственном мировоззрении разгром генетики привел к тому, что даже теория вероятностей оказалась под угрозой стать в глазах властей «вредной наукой». Одним из тех, кто принимал активное участие в уничтожении генетики в СССР, был академик Т. Д. Лысенко, президент Всесоюзной академии сельскохозяйственных наук. Лысенко тогда бросил лозунг: «Наука — враг случайности». Отсюда недалеко и до организационных выводов. Пришлось спасать не только ветвящиеся процессы, но и саму теорию вероятностей. Не могу не рассказать, как блестяще публично выступил известный специалист по теории вероятностей член-корреспондент Академии наук А. Я. Хинчин. Он сказал: «Известен лозунг: «Наука — враг случайности». И это абсолютно верно. Но врага надо изучать. А это делает теория вероятностей.»

4. Фундаментальная и прикладная наука. При популярном изложении достижений науки обычно рассказывают о том, как эти достижения можно использовать, другими словами, какую пользу обществу приносит наука. Но связь науки с ее приложениями не столь проста, как это может показаться неспециалисту. Прикладная наука действительно имеет целью «пользу». Фундаментальная наука имеет целью нахождение «истины». А «польза» от «истины» может проявиться не очень скоро. Например, электричество, без которого мы теперь жить не можем, ученые начали интенсивно изучать более двухсот лет назад. Установленные ими фундаментальные закономерности стали основой электротехники, плодами которой мы пользуемся. Таким образом, «пользу» науки можно представить в виде следующей схемы:

Фундаментальная наука — истина — прикладная наука — польза.

Я хочу закончить выступление одной цитатой французского философа Огюста Конта. Я считаю, что эта цитата очень точно выражает сущность связи фундаментальной и прикладной науки.

«Человек должен приступать к теоретическим исследованиям, совершенно не задаваясь какими бы то ни было практическими целями, ибо наши средства для открытия истины так слабы, что если мы их не сосредоточим исключительно на одной цели — на отыскании истины, а будем еще руководствоваться посторонним соображением: получить через нее непосредственную практическую пользу, — то мы почти никогда не будем в состоянии найти саму истину.»

ИНФОРМАЦИЯ О РАБОТЕ СЕМИНАРА А. Н. ШИРЯЕВА

Долгие годы при кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ работал научно-исследовательский семинар (во всяком случае он работал уже в первые годы после окончания второй мировой войны и руководил им А. Н. Колмогоров).

В настоящее время этот семинар продолжает свою работу под руководством чл.-корр. РАН А. Н. Ширяева.

Семинар проводится по средам с 16 ч. 20 мин. в аудитории 16-24 главного здания МГУ. Продолжительность доклада — 60 минут без перерыва. Предполагается, что первая половина доклада дает введение в рассматриваемую область с обзором предшествующих исследований, а вторая часть содержит новые результаты. Участие в работе семинара входит в план подготовки всех аспирантов кафедры. На каждый семестр назначается координатор и ученый секретарь семинара. В задачу координатора входит составление на последующий месяц научной программы и приглашение докладчиков (рассматриваются и инициативные заявки). Ученый секретарь отвечает за информацию о работе семинара. С программой докладов можно ознакомиться

на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (тел. 939-14-03), на кафедре математической статистики факультета ВМиК МГУ, в отделе теории вероятностей МИ РАН им. В. А. Стеклова, а также в Интернете на странице механико-математического факультета по адресу <http://mech.math.msu.su/>.

Ниже приводится полная программа работы семинара в весеннем семестре 1999 года.

10 февраля — В. А. Ватутин (МИ РАН им. В. А. Стеклова) *Ветвящиеся процессы в случайной среде или как давно родилась Ева.*

17 февраля — В. И. Питербарг (МГУ, мехмат) *Статистическое оценивание предельных распределений экстремальных значений.*

24 февраля — А. В. Мельников (МИ РАН им. В. А. Стеклова) *Биномиальный финансовый рынок в контексте стохастических экспонент и мартингалов.*

3 марта — А. С. Холево (МИ РАН им. В. А. Стеклова) *Пропускная способность квантового канала связи.*

10 марта — Ш. Сюкэ (Франция, университет Лилля) *Гёльдеровская ЦПТ и ФЦПТ для случайных полей со значениями в банаховом пространстве* (доклад — на английском языке).

17 марта — А. Н. Тихомиров (Сыктывкарский государственный университет) *Об одном варианте достаточных условий в ЦПТ.*

24 марта — В. Ю. Королев (МГУ, ВМиК) *Предельные теоремы для случайных сумм. Обобщенные процессы Кокса и их приложения.*

31 марта — В. Ф. Гапошкин (Московский государственный университет путей сообщения) *Спектральный критерий усиленного закона больших чисел для случайных процессов и полей.*

7 апреля — Б. М. Гуревич (МГУ, мехмат) *Гиббсовские случайные поля.*

14 апреля — В. К. Захаров (МГУ), А. В. Михалев (МГУ) *Проблема Рисса–Радона об интегральном представлении регулярных мер на хаусдорфовом пространстве.*

21 апреля — Г. И. Фалин (МГУ, мехмат) *Мировой и отечественный рынки перестрахования.*

28 апреля — *Колмогоровские чтения* (научная конференция студентов и аспирантов кафедры теории вероятностей).

5 мая — И. В. Волович (МИ РАН им. В. А. Стеклова) *Квантовые компьютеры.*

12 мая — день защиты дипломных работ. Семинар не проводился.

19 мая — М. А. Лифшиц (С.-Петербургский государственный университет) *Сильные версии предельных теорем.*

26 мая — Л. Арнольд (Германия, университет Бремена) *Второй метод Ляпунова для случайных систем* (доклад — на английском языке).

В рамках расширенного заседания семинара 28 апреля были проведены первые Колмогоровские чтения — научная конференция студентов и аспирантов, организованная совместно с Франко-русским институтом (INRIA–МГУ) им. А. М. Ляпунова, Научным и издательским объединением ФАЗИС. На открытии выступили декан механико-математического факультета чл.-корр. РАН О. Б. Лупанов, председатель Оргкомитета чл.-корр. РАН А. Н. Ширяев, директор института им. А. М. Ляпунова

проф. А. Б. Угольников. В программу конференции Оргкомитетом был включен двадцать один доклад. С краткими докладами выступили Ю. Ю. Бахтин (асп. 1 г.о., н.рук. — проф. А. В. Булинский), А. И. Буфетов (студ. 4 курса, н.рук. — проф. Ю. С. Ильяшенко), А. Е. Вязилов (асп. 2 г.о., н.рук. — чл.-корр. РАН А. Н. Ширяев, доц. М. В. Болдин), П. В. Гапеев (асп. 1 г.о., н.рук. — чл.-корр. РАН А. Н. Ширяев), И. В. Заляпин (асп. 3 г.о., н.рук. — проф. В. Ф. Писаренко, проф. В. И. Питербарг), Д. Н. Знаменский (студ. 5 к., н.рук. — проф. А. В. Булинский), Е. Д. Зольдин (асп. 3 г.о., н.рук. — проф. А. В. Булинский), М. С. Куликов (студ. 4 к., н.рук. — проф. А. М. Степин), В. Г. Ламбурт (студ. 3 к., н.рук. — проф. В. Н. Тутубалин), Р. А. Лелеков (студ. 4 к., н.рук. — чл.-корр. РАН А. Н. Ширяев), И. И. Макаров (асп. 1 г.о., н.рук. — проф. В. И. Оселедец), М. Н. Малышкин (асп. 1 г.о., н.рук. — проф. А. Ю. Веретенников), А. Е. Микушева (асп. 1 г.о., н.рук. — проф. А. В. Булинский), Е. Г. Орлов (студ. 5 к., н.рук. — доц. М. В. Болдин), А. А. Перегудова (студ. 4 к. ВМиК, н.рук. — акад. РАН Ю. В. Прохоров), П. В. Радченко (студ. 5 к., н.рук. — проф. Л. Г. Афанасьева), А. Е. Ромащенко (асп. 2 г.о., н.рук. — проф. Н. К. Верещагин), Д. В. Хмелев (асп. 1 г.о., н.рук. — проф. Л. Г. Афанасьева), А. В. Чернов (студ. 4 к., н.рук. — проф. Н. К. Верещагин), А. С. Черный (асп. 1 г.о., н.рук. — чл.-корр. РАН А. Н. Ширяев), А. Н. Ярыкина (студ. 5 к., н.рук. — проф. А. В. Булинский). С комментариями к докладам выступали акад. РАН Ю. В. Прохоров, чл.-корр. РАН А. Н. Ширяев, профессор Л. Г. Афанасьева, В. Н. Тутубалин, Б. М. Гуревич, В. И. Оселедец, А. Ю. Веретенников, А. В. Булинский. Заслушав и обсудив доклады, жюри во главе с чл.-корр. РАН проф. А. Н. Ширяевым присудило три первые, три вторые, три третьи премии.

Среди студентов премии распределились следующим образом: 1-я премия — А. И. Буфетов, 2-я премия — Р. А. Лелеков, 3-я премия — А. А. Перегудова.

Среди аспирантов премии получили: две 1-е премии — Ю. Ю. Бахтин, А. С. Черный, две 2-е премии — М. Н. Малышкин, А. Е. Микушева, две 3-и премии — П. В. Гапеев, И. И. Макаров.

Тезисы докладов, отмеченных премиями, приведены в этом номере. Доклады Е. Г. Орлова, А. Е. Ромащенко и А. Н. Ярыкиной были отмечены почетными грамотами.

Координатор семинара в весеннем семестре 1999 года,
профессор А. В. Булинский,
Ученый секретарь, к.ф.-м.н. М. А. Вронский.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, ОТМЕЧЕННЫХ ПРЕМИЯМИ НА КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЯХ (1999 Г.)

Буфетов А. И. *Топологическая энтропия для действий свободных полугрупп* (первая премия).

Пусть свободная группа G с образующими $(g_1, \dots, g_m)$ действует непрерывными преобразованиями метрического компакта X с функцией расстояния d . Элементу $g \in G$ соответствует отображение T_g ; вместо T_g пишем T_i . Для всякого $g \in G$ рассмотрим его несократимую запись через образующие: $g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{i_n}^{\varepsilon_n}$, $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$. Длину этой записи обозначаем $|g|$. Введем на X метрику d_g формулой

$$d_g(x, y) = \max \left(d(x, y), d(T_{i_n}^{\varepsilon_n} x, T_{i_n}^{\varepsilon_n} y), \right. \\ \left. d(T_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} T_{i_n}^{\varepsilon_n} x, T_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} T_{i_n}^{\varepsilon_n} y), \dots, d(T_g x, T_g y) \right).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ пусть $B(g, \varepsilon)$ — наименьшее число элементов в ε -сети на X с метрикой d_g . Топологическая энтропия действия группы G определяется формулой

$$h(G, T_g) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{(2m-1)(2m)^{n-1}} \sum_{|g|=n} B(g, \varepsilon) \right).$$

В [1] энтропия введена также для действий свободных полугрупп. При этом, если M — замкнутое многообразие, а $T_1, \dots, T_m$ — гладкие растягивающие отображения многообразия M в себя, то энтропия

$$h(T_1, \dots, T_m) = \log \left(\frac{|\deg T_1| + \dots + |\deg T_m|}{m} \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bufetov A. Topological entropy for free semigroup actions and skew-product transformations. — J. Dynam. Control Systems, 1999, v. 5, № 1.

Лелеков Р. А. *Необходимые и достаточные условия сходимости условных математических ожиданий относительно σ -алгебр* (вторая премия).

Теорема. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ — σ -алгебра, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность случайных величин с $E(\xi_n | \mathcal{G}) < \infty$ п.н., $\xi_n \geq 0$, $\xi_n \rightarrow \xi$ п.н. Тогда $E(\xi_n | \mathcal{G}) \rightarrow E(\xi | \mathcal{G}) < \infty$ п.н. в том и только том случае, когда для некоторой последовательности $\{c_m\}_{m \geq 1}$, $c_m \in \mathbb{R}_+$, $c_m \rightarrow \infty$, $c_{m+1} > c_m$

$$\sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n > c_m\}} | \mathcal{G}) \rightarrow 0 \quad (\text{п.н.}), \quad m \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е. В силу того, что последовательность $\sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n > c_m\}} | \mathcal{G})$ монотонно убывает п.н., последнее условие выполнено для произвольной монотонно стремящейся к бесконечности последовательности $\{c_m\}_{m \geq 1}$, если оно выполнено хотя бы для одной такой последовательности.

Следствие. Если $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, то $E(\eta | \mathcal{G}) = E\eta$ п.н. для произвольной случайной величины η , и мы имеем следующий известный результат: если $0 \leq \xi_n \rightarrow \xi$ п.н. с $E\xi_n < \infty$, то

$$E\xi_n \rightarrow E\xi < \infty \iff \sup_n E(\xi_n I_{\{\xi_n > c\}}) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Последнее условие означает равномерную интегрируемость семейства случайных величин $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$.

Перегудова А. А. *Формула суммирования Пуассона и ее применение к закону первой значащей цифры* (третья премия).

При некоторых ограничениях справедлива формула суммирования Пуассона, которую для приложения в теории вероятностей удобно записать в следующем виде:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho(x+n) = 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \varphi(2\pi n) e^{-2\pi n i x},$$

где $\rho(x)$ — плотность случайной величины, а $\varphi(t)$ — ее характеристическая функция. Для рассматриваемых ниже случайных величин формула справедлива.

Если $\xi_1 \sim N(m, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, $\xi_2 \sim \ln(\chi_\alpha^2)$, $\alpha > 0$, $\xi_3 \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix} \right)$, $p > 0$, то с ее помощью (или с помощью ее многомерного аналога) можно оценить отклонение

плотности $\{\xi_1\}$, $\{\xi_2\}$ от плотности равномерного на единичном интервале (и $\{\xi_3\}$ — от равномерного на единичном квадрате):

$$|\rho_{\{\xi_1\}}(x) - 1| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi^2 n^2 \sigma^2} = S_1(\sigma),$$

$$|\rho_{\{\xi_2\}}(x) - 1| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(\alpha/2 + 2\pi i n)}{\Gamma(\alpha/2)} \right| = S_2(\alpha),$$

$$|\rho_{\{\xi_3\}}(x, y) - 1| \leq \sum_{\substack{m, l = -\infty \\ (m, l) \neq (0, 0)}}^{\infty} e^{-2\pi^2 [m^2 + 2pml + l^2]} = S_3(p);$$

S_i , $i = 1, 2, 3$, — монотонные функции, когда аргумент больше 0. Приведем некоторые значения оценок:

$$\begin{aligned} S_1(1) &= 5.35 \cdot 10^{-9}, & S_1(0.7) &= 1.26 \cdot 10^{-4}; \\ S_2(1) &= 1.46 \cdot 10^{-4}, & S_2(2) &= 6.50 \cdot 10^{-4}, & S_2(5) &= 7.94 \cdot 10^{-3}; \\ S_3(0) &= 1.07 \cdot 10^{-8}, & S_3(0.8) &= 7.44 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Используя это, можно установить приближенное соответствие случайных величин закону первой значащей цифры, т.е. приближенному равенству $P\{D_1(\xi) = d\} = \lg((d+1)/d)$, где $D_1(x)$ обозначает первую цифру мантиссы x .

Если $\ln \xi \sim N(m, \sigma^2)$, то $P\{D_1(\xi) = d\} = \lg((d+1)/d) + R_d$, где

$$R_d = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n(\lg(d+1) - m \lg e)) - \sin(2\pi n(\lg d - m \lg e))}{2\pi n} e^{-2\pi^2 n^2 \sigma^2 \lg^2 e}.$$

Например, при $m = 0.46$, $\sigma = 1$

$$\begin{aligned} \max_{d=1,2,\dots,9} |R_d| &= R_1 = 1.18 \cdot 10^{-2}, \\ \min_{d=1,2,\dots,9} |R_d| &= -R_8 = 3.25 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Бахтин Ю. Ю. *Функциональная центральная предельная теорема для решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными* (первая премия).

В последнее время в физической и математической литературе многочисленные исследования посвящены асимптотическому поведению решений уравнения Бюргерса. Это уравнение и его аналоги описывают эволюцию поля скоростей для целого ряда нелинейных физических явлений. Его изучением занимались В. И. Арнольд, Я. Г. Синай, С. Альбеверио, А. В. Булинский, С. А. Молчанов и многие другие.

Говоря об уравнении Бюргерса, имеют в виду следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v &= \Delta v, & v(0, x) &= -2\nabla \xi(x), \\ (t, x) &\in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, & v(t, x) &\in \mathbf{R}^d. \end{aligned} \quad (1)$$

Не ограничивая общности, считаем далее, что параметр вязкости $\kappa = \frac{1}{2}$.

Мы рассматриваем наиболее интересный случай, когда начальный потенциал ξ представляет собой случайное поле. Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия: случайная мера $\mu(dx) = \exp\{\xi(x)\} dx$ стационарна, ассоциирована, $\sup_{T>0} \text{cov}(\mu(I), \mu(TI)) = \Gamma < \infty$ и $a_\mu = \mathbf{E}\mu(I) > 0$, где $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$.

Теорема. Если v — решение задачи (1), то при этих условиях для любого $x \in \mathbf{R}^d$ процессы $V_T: t \mapsto T^{d/4+1/2} v(x, tT)$ при $T \rightarrow \infty$ сходятся по распределению в

$C((0, \infty), \mathbf{R}^d)$ с локально равномерной топологией к центрированному гауссовскому процессу V_∞ с

$$\text{cov}(V_{\infty, i}(t), V_{\infty, j}(s)) = \delta_{ij} \frac{\Gamma}{(2\pi)^{d/2} a_\mu^2} (t+s)^{-d/2-1}.$$

Это, видимо, первая функциональная предельная теорема для процессов V_T . Ранее доказывалась лишь сходимость конечномерных распределений.

Черный А. С. *О сильных и слабых решениях стохастических дифференциальных уравнений, определяющих процессы Бесселя* (первая премия).

Процесс Бесселя размерности $\delta > 1$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2X_s} ds + W_t. \quad (*)$$

В настоящей работе исследуется существование сильных и слабых решений уравнения (*), а также сильная и слабая единственность для этого уравнения. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. (i) *Процесс Бесселя размерности $\delta > 1$ является единственным (при фиксированных W и X_0) неотрицательным решением уравнения (*). Более того, процесс Бесселя является сильным решением этого уравнения.*

(ii) *Если $\delta \geq 2$ и $X_0 > 0$, то у (*) нет других решений, т.е. в этом случае для (*) имеет место сильная единственность.*

(iii) *Если $1 < \delta < 2$ или $X_0 = 0$, то*

- a) *существуют другие сильные решения (*);*
- b) *существуют слабые решения (*);*
- c) *для (*) нарушается слабая единственность.*

З а м е ч а н и е 1. Данный результат показывает, что теорема Звонкина (о сильной единственности для уравнений с ограниченным сносом и единичной диффузией) не может быть обобщена на случай уравнений с неограниченным сносом.

З а м е ч а н и е 2. При $1 < \delta < 2$, $X_0 > 0$ существуют сильные решения (*), не являющиеся марковскими.

Малышкин М. Н. *Субэкспоненциальные оценки скорости сходимости к инвариантной мере для стохастических дифференциальных уравнений* (вторая премия).

Содержание доклада будет опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения».

Микушева А. Е. *Закон больших чисел и логарифмический закон в схеме серий* (вторая премия).

Известно, что поведение сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в схеме серий существенно отличается от поведения последовательности нарастающих сумм. Например, в отличие от закона больших чисел Колмогорова, необходимым и достаточным условием справедливости усиленного закона больших чисел в схеме серий является наличие у величин второго момента (Hsu, Robbins, Erdős). Закон повторного логарифма в схеме серий и вовсе не выполняется. Для получения его содержательного аналога необходимо заменить нормировку $(2n \ln \ln n)^{1/2}$ на $(2n \ln n)^{1/2}$ и увеличить моментные требования на слагаемые (Y_i, C, Q_i) .

В настоящей работе рассмотрен общий случай, когда длины серий задаются произвольной возрастающей последовательностью натуральных чисел, изучается вопрос изменения моментных требований и нормировки в зависимости от степени роста этой последовательности.

Теорема. Пусть $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq k_n, n \in \mathbb{N}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, $k_n \in \mathbb{N}$ — строго возрастающая последовательность, $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$. Пусть $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} \ln k_n / \ln n < \infty$ и $E|X_{nk}|^{2(\alpha+1)/\alpha+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2k_n \ln n}} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Приведенная теорема оптимальна в том смысле, что положить в ее условиях $\delta = 0$, вообще говоря, нельзя. Для доказательства потребовалось, в частности, установить новый усиленный закон больших чисел для подпоследовательности в схеме серий.

Гапеев П. В. Задачи последовательного анализа для фрактального броуновского движения (третья премия).

В данной работе приводятся точные решения байесовских и вариационных (условно-экстремальных) задач последовательного различения двух простых гипотез о среднем значении и скорейшего обнаружения изменения локального сноса (разладки) наблюдаемого процесса фрактального броуновского движения.

Используемый метод доказательства состоит в сведении исходных задач статистического последовательного анализа к задачам Стефана для дифференциальных уравнений со свободными граничными условиями.

Решения вариационных задач находятся на основе полученных байесовских решений.

Макаров И. И. Энтропия марковского оператора (третья премия).

Пусть дано вероятностное пространство (X, Σ, μ) . Оператор $P: L^1(X) \rightarrow L^1(X)$ будем называть марковским, если выполнены следующие условия:

$$(1) f \geq 0 \Rightarrow Pf \geq 0; \quad (2) P1 = 1; \quad (3) \int Pf d\mu = \int f d\mu.$$

Предполагается, что вместе с оператором P задан связанный с ним двусторонний стационарный марковский процесс $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$. Соответствие дается формулой: $Pf(x) = E(f(x_1) | x_0 = x)$. Пусть $\mathcal{A}_{-\infty}^n$ — σ -алгебра, порожденная $[x_{-n}, x_n]$, $\mathcal{A}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{A}_{-\infty}^n$, $\mathcal{A}_0 = \sigma\{x_0\}$.

В данной работе дается обобщение понятия энтропии Колмогорова–Синяя на класс марковских операторов. В частности, доказывается совпадение инвариантов в случае, когда $Pf(x) = f(Tx)$, где T — сохраняющее меру преобразование.

Также строится пример оператора P , у которого соответствующие σ -алгебры $\mathcal{A}_{-\infty}$ и $\mathcal{A}_0$ пересекаются тривиально. При этом $\mathcal{A}_{-\infty}$ не является тривиальной, более того, приводится вычисление энтропии оператора P и показывается ее совпадение с энтропией Колмогорова–Синяя оператора сдвига T , действующего в пространстве реализаций процесса $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$ и ограниченного на $\mathcal{A}_{-\infty}$. Значение энтропии при этом оказывается равным $\ln 2$.