Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие отклонения. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:32:54

© 1998 г. БОРОВКОВ А. А.*, МОГУЛЬСКИЙ А. А.*

ИНТЕГРО-ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ. I¹⁾

В работе получена интегро-локальная многомерная центральная предельная теорема об асимптотике вероятности попадания суммы n случайных векторов в малое множество, размер которого неограниченно убывает с ростом n . Эта теорема включает в себя асимптотические разложения, одинаково применима в области нормальных и больших уклонений (она является равномерной по величине уклонений) и совпадает по форме с локальной предельной теоремой (с точностью до множителя, равного объему малого множества). Из нее следуют все основные интегральные теоремы как в области больших уклонений, так и классическая предельная теорема в области нормальных уклонений, дающая асимптотические разложения.

Ключевые слова и фразы: функция уклонений, асимптотические разложения, большие уклонения, кумулянты, интегро-локальная многомерная центральная предельная теорема, условия Крамера.

1. Формулировки результатов

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ — случайный вектор в d -мерном пространстве Евклида $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$, с распределением F и преобразованием Лапласа

$$\varphi(\lambda) = \varphi_F(\lambda) = \mathbf{E}e^{\langle \lambda, \xi \rangle} = \int e^{\langle \lambda, v \rangle} F(dv), \quad \lambda \in \mathbf{R}^d,$$

где $\langle \lambda, v \rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i v_i$ есть скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Нам понадобятся следующие условия (C_1) , (C_2) крамеровского типа на распределение F случайного вектора ξ .

(C_1) В окрестности некоторой точки λ_0 выполняется соотношение $\varphi(\lambda) < \infty$.

Через $(C_1^{(0)})$ обозначим условие (C_1) , в котором $\lambda_0 = 0$. Пусть $\Phi = \{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$, (Φ) — внутренность Φ ; множество Φ всегда выпукло;

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-01-01416) и Международного научного фонда (Grant N RAC000, 1994).

если выполнено условие (C_1) , то множество (Φ) не пусто (см. [1]). Через $B(F)$ обозначим ковариационную матрицу, отвечающую ξ :

$$B(F) = E(\xi - E\xi)^T(\xi - E\xi);$$

определитель матрицы $B(F)$ обозначим $|B(F)| = \det B(F)$.

Группу по сложению векторов $a = (a_1, \dots, a_d)$ с целочисленными координатами обозначим Z^d .

(C_2) Либо

$$(i) \limsup_{|s| \rightarrow \infty} |\varphi(is)| < 1,$$

либо

(ii) координаты случайного вектора ξ принимают целочисленные значения и для некоторого $b \in Z^d$ такого, что $P\{\xi = b\} > 0$, группа, порожденная множеством

$$\{a: P\{\xi = b + a\} > 0\},$$

совпадает с Z^d , $|B(F)| > 0$.

Таким образом, в случае $(C_2)(ii)$ каждая координата ξ_i ($i = 1, 2, \dots, d$) вектора ξ имеет арифметическое (см. [2, с. 164]) распределение с шагом 1. Отметим еще, что если выполнено условие (C_2) , то распределение F вектора ξ не сосредоточено с вероятностью 1 ни на какой гиперплоскости пространства $\mathbf{R}^d$, т.е. для любого $\lambda \neq 0$ случайная величина $\langle \lambda, \xi \rangle$ принимает не менее двух значений с положительной вероятностью.

В одномерном случае случайная величина ξ (или ее распределение F) называется *решетчатой* (*решетчатым*) с шагом $h > 0$, если для некоторого $x_0 \in \mathbf{R}^1$ случайная величина $\xi/h + x_0$ удовлетворяет условию $(C_2)(ii)$; остальные случайные величины (их распределения) называются *нерешетчатыми*.

Прежде чем приводить основное утверждение о распределении сумм $S(n)$, введем ряд обозначений.

Функцию уклонений, отвечающую ξ (или распределению F), обозначим

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{ \langle \lambda, \alpha \rangle - \ln \varphi(\lambda) \}, \quad \alpha \in \mathbf{R}^d. \quad (1)$$

Это преобразование Лежандра (см. [3]) над функцией $A(\lambda) = \ln \varphi(\lambda)$. Функция уклонений играет определяющую роль при описании вероятностей больших уклонений сумм $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$, где $\xi(i)$ независимы и распределены как ξ . Свойства функции уклонений хорошо изучены (см., например, [1]). Напомним некоторые из них.

Точку λ , в которой достигается $\sup$ в (1) (если таковая существует), обозначим $\lambda(\alpha)$, так что

$$\Lambda(\alpha) = \langle \lambda(\alpha), \alpha \rangle - \ln \varphi(\lambda(\alpha)).$$

Положим

$$(G) = \{\alpha = A'(\lambda): \lambda \in (\Phi)\}, \quad (2)$$

где $A'(\lambda) = \text{grad} A(\lambda)$.

Если выполнено условие (C_1) и вектор ξ невырожден в $\mathbf{R}^d$, то область (G) не пуста, функция $\Lambda(\alpha)$ является аналитической в области (G) , и для любого $\alpha \in (G)$ вектор $\lambda(\alpha)$ является единственным решением уравнения

$$A'(\lambda) = \alpha.$$

При этом $\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha)$. Преобразованием Крамера распределения F в точке $\mu \in L$ назовем распределение

$$F_\mu(V) = \frac{\mathbf{E}(e^{(\mu, \xi)}; \xi \in V)}{\varphi(\mu)}.$$

Распределение $F_\mu(V)$ при $\mu = \lambda(\alpha)$ назовем преобразованием Крамера $F^{(\alpha)}$ с параметром α , а случайный вектор с распределением $F^{(\alpha)}$ обозначим через $\xi^{(\alpha)}$. Тогда для $\alpha \in (G)$ справедливо

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi^{(\alpha)} \in V\} &= F^{(\alpha)}(V), \quad \mathbf{E}\xi^{(\alpha)} = \alpha, \\ B(\alpha) &\equiv \mathbf{E}(\xi^{(\alpha)} - \alpha)^T(\xi^{(\alpha)} - \alpha) = (\Lambda''(\alpha))^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Определитель матрицы $B(\alpha)$ обозначим

$$\sigma^2(\alpha) = \det B(\alpha).$$

Цель настоящей работы — получение асимптотических представлений (включающих асимптотические разложения) для вероятностей $\mathbf{P}\{S(n) \in V\}$, одинаково применимых как в области нормальных отклонений сумм $S(n)$ (когда $\mathbf{E}\xi \in V$), так и в области больших отклонений сумм $S(n)$ (когда $\mathbf{E}\xi$ «далеко» от V).

Наиболее близкой к настоящей заметке является работа [6], в которой рассматривается условие

(C_3) Для некоторого $n_0 < \infty$ распределение n_0 слагаемых $S(n)$ имеет ограниченную плотность $p^{n_0}(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$.

В условиях (C_1) , (C_3) получено, в частности, асимптотическое разложение для плотности $p^{(n)}(x)$ распределения сумм $S(n)$ при $n \rightarrow \infty$ (теорема 1 в [6]). Из этого представления следует, что для любого ограниченного замкнутого множества $G_1 \subset (G)$, для любого $r = 0, 1, 2, \dots$, для любого измеримого множества $V \subset G_1$ справедливо представление

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S(n)}{n} \in V\right\} = \int_V e^{-n\Lambda(v)} \left(\sum_{k=0}^r \frac{g_k(v)}{n^{k+d/2}} + \frac{\varepsilon_r(n, v)}{n^{r+d/2}} \right) dv, \quad (4)$$

где

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in V} |\varepsilon_r(n, v)| < \infty.$$

В настоящей работе получено по-существу такое же представление для достаточно широкого класса множеств V (включая «очень маленькие»), но без условия (C_3) существования ограниченной плотности для суммы n_0 слагаемых, а лишь при условии (C_2) . Другое отличие от [6] состоит в том, что асимптотический анализ представления [4] в настоящей заметке не исключает область нормальных уклонений. При этом мы уточняем представление [4], приводя явные формулы для функций $g_k(v)$.

Роль локальной теоремы (ср. с [6]) здесь играет так называемая интегро-локальная теорема, в которой получены асимптотические разложения для вероятностей $P\{S(n) \in \Delta(x)\}$, где

$$\Delta(x) = \{y \in \mathbf{R}^d: x_i \leq y_i < x_i + \Delta, i = 1, \dots, d\}$$

есть куб с вершиной в точке $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ со стороной $\Delta > 0$ (см. теорему 1). Интегро-локальные теоремы весьма удобны (см., например, [5], [7]), так как они позволяют действовать в условии (C_2) точно так же, как в абсолютно непрерывном случае.

Для формулировки основной теоремы введем ряд обозначений.

Множество векторов $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ с целочисленными неотрицательными координатами обозначим Z_+^d . Для $\nu \in Z_+^d$ норму определим как сумму координат:

$$|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_d.$$

Для распределения F в $\mathbf{R}^d$ наряду с ковариационной матрицей $B = B(F)$ рассмотрим кумулянт $\chi_\nu(F)$ порядка ν , $\nu \in Z_+^d$ (см. [8, с. 57]). Для $s = 0, 1, \dots$ определим функцию $P_s(x) = P_s(F; x)$, положив

$$P_s(x) = s! \sum_{|\nu|=s} \frac{\chi_\nu}{\nu!} (-1)^{|\nu|} D^\nu \varphi_B(x),$$

где $\nu! = \nu_1! \dots \nu_d!$, $\varphi_B(x) = (2\pi)^{-d/2} |B|^{-1/2} \exp\{-xBx^T/2\}$ есть плотность гауссовского распределения с параметрами $(0, B)$, $D^\nu = D_1^{\nu_1} \dots D_d^{\nu_d}$ есть суперпозиция операторов дифференцирования

$$D_j^{\nu_j} f(x) = \frac{\partial^{\nu_j} f(x)}{\partial x_j^{\nu_j}}.$$

Отметим, что числа $A_s(F) \equiv P_s(F; 0)$ являются линейными комбинациями кумулянтов $\{\chi_\nu, |\nu| = s\}$ с коэффициентами, которые зависят только от матрицы $B(F)$. В частности, $A_0 = \varphi_B(0) = (2\pi)^{-d/2} |B|^{-1/2}$. Определим далее для $k = 1, 2, \dots$, $m = 1, \dots, k$ класс $\mathcal{M}(k, m)$ таких наборов $(j_1, \dots, j_m)$ целых положительных чисел, что

$$\sum_{i=1}^m j_i = k.$$

Положим далее для $k = 1, 2, \dots$

$$p_0(F; x) = P_0(F; x),$$

$$p_k(F; x) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m!} \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in \mathcal{M}(k, m)} \frac{P_{j_1+2}(x)}{(j_1+2)!} \dots \frac{P_{j_m+2}(x)}{(j_m+2)!}. \quad (5)$$

Таким образом, числа

$$a_k(F) \equiv p_k(F; 0)$$

полностью определяются матрицей и кумулянтами χ_ν порядка ν , где $|\nu| \leq k+2$. С помощью индукции можно показать, что $P_j(0) = 0$ для любого нечетного j . Поскольку для нечетного $k = 2n+1$ в любом слагаемом в правой части (5) присутствует в качестве сомножителя $P_j(x)$ с нечетным номером, получаем

$$a_{2n+1}(F) = 0.$$

Для $\alpha \in (G)$ через $F_0^{(\alpha)}$ обозначим распределение случайного вектора (см. (3))

$$\xi_0^{(\alpha)} \equiv \xi^{(\alpha)} - \alpha,$$

а через $\chi_\nu^{(\alpha)} = \chi_\nu(F_0^{(\alpha)})$ — соответствующий ему кумулянт порядка ν . Через $B^{(\alpha)}$ обозначим ковариационную матрицу вектора $\xi_0^{(\alpha)}$. Тогда можно определить функции $g_k(\alpha)$ аргумента $\alpha \in (G)$:

$$g_k(\alpha) = a_{2k}(F_0^{(\alpha)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Поскольку $\chi_\nu^{(\alpha)}$ и $B(\alpha)$ являются аналитическими функциями аргумента α в области (G) , то такими же являются и функции $g_k(\alpha)$, $k = 0, 1, \dots$

Для множества $V \subseteq \mathbf{R}^d$ границей ∂V называют множество $\partial V = [V] \setminus (V)$, где $[V]$ — замыкание V , (V) — внутренность V . Через $U_\varepsilon(V) = \cup_{v \in V} U_\varepsilon(v)$ обозначим ε -окрестность множества V . Класс $\mathcal{A}(c)$ измеримых множеств с достаточно «тонкой» границей определим как класс таких измеримых множеств V , для которых для всех $\varepsilon > 0$ выполняется

$$m(U_\varepsilon(\partial V)) \leq c(\varepsilon + \varepsilon^d),$$

где $m(A)$ — мера Лебега в $\mathbf{R}^d$. Очевидно, что любое множество V из класса $\mathcal{A}(c)$ ограничено; любое ограниченное измеримое множество V , удовлетворяющее неравенству

$$m(U_\varepsilon(\partial V)) \leq c_0 \varepsilon$$

для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, попадает в класс $\mathcal{A}(c)$ для всех достаточно больших c . Поэтому, если граница ∂V ограниченного множества V состоит из конечного числа «гладких кусков», то $V \in \mathcal{A}(c)$ для достаточно больших c . Кроме того, очевидным образом доказывается следующее утверждение.

Лемма 1. Если $V \in \mathcal{A}(c)$, то для любого $t \geq 1$

$$t^{-1}V \in \mathcal{A}(c),$$

где $t^{-1}V = \{y = t^{-1}x : x \in V\}$.

Основным утверждением настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. I. Пусть выполнены условия (C_1) , $(C_2)(i)$. Тогда для любого $r = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P\{S(n) \in \Delta(x)\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} & \left(m(\Delta(x)) \left[\sum_{k=0}^r \frac{g_k(\alpha)}{n^{(k+d/2)}} + \frac{\Delta}{\sqrt{n}} C_1 \right] \right. \\ & \left. \times (1 + \Delta C_2) + \frac{C_3}{n^{(r+d/2)}} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha = x/n$, $C_i = C_i(n, \Delta(x), r)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\alpha \in G_1 \\ 0 \leq \Delta \leq \Delta_0}} |C_i(n, \Delta(x), r)| < \infty, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

для любого $\Delta_0 > 0$ и любого замкнутого ограниченного множества $G_1 \subset (G)$. Утверждение (7), (8) сохранится, если вместо $\Delta(x)$ подставить любое измеримое множество $\Delta^*(x)$, содержащееся в $\Delta(x)$ и принадлежащее классу $\mathcal{A}(c)$, и в (8) взять дополнительный $\sup$ по $\Delta^*(x) \in \mathcal{A}(c)$ при любом $c \in (0, \infty)$.

II. Пусть выполнены условия (C_1) , $(C_2)(ii)$. Тогда для любого $r = 0, 1, 2, \dots$

$$P\left\{\frac{S(n)}{n} = x\right\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} \left(\sum_{k=0}^r \frac{g_k(\alpha)}{n^{(k+d/2)}} + \frac{\varepsilon_r(n, \alpha)}{n^{(r+d/2)}} \right),$$

где $\alpha = x/n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{x \in Z^d \\ \alpha \in G_1}} |\varepsilon_r(n, \alpha)| = 0$$

для любого замкнутого ограниченного множества $G_1 \subset (G)$.

Приведем ряд следствий из теоремы 1. Положим

$$\theta(\Delta, \alpha) = \Delta^{-d} \int_{\Delta(0)} e^{-\langle \lambda(\alpha), v \rangle} dv - 1;$$

очевидно, что $\theta(\Delta, \alpha) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$.

Следствие 1 ([5], [7]). I. Пусть выполнены условия (C_1) , $(C_2)(i)$.

Тогда для $\alpha = x/n$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta(x)\} &= \frac{\Delta^d}{(2\pi n)^{d/2} \sigma(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \theta(\Delta, \alpha) + \varepsilon(n, \alpha, \Delta)), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{\alpha \in G_1 \\ n^{-k} \leq \Delta \leq \Delta_0}} |\varepsilon(n, \alpha, \Delta)| &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где G_1 — любое замкнутое ограниченное подмножество (G) , Δ_0 — любое положительное число, k — любое неотрицательное число.

II. Пусть выполнены условия (C_1) , $(C_2)(ii)$. Тогда для $\alpha = x/n$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S(n) = x\} &= \frac{1}{(2\pi n)^{d/2} \sigma(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \varepsilon(n, \alpha)), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{x \in Z^d \\ \alpha \in G_1}} |\varepsilon(n, \alpha)| &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где G_1 имеет прежний смысл.

Теорема 1 позволяет получить точную асимптотику и асимптотические разложения для вероятностей

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S(n)}{n} \in V\right\} \quad (11)$$

для множеств V с достаточно «тонкой» границей ∂V . Напомним прежде, что грубая асимптотика вероятностей (11) определяется соотношением (см., например, [1])

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S(n)}{n} \in V\right\} = \exp\left\{-n\Lambda(V)(1 + o(1))\right\},$$

где $\Lambda(V) = \inf_{v \in V} \Lambda(v)$, измеримое множество V удовлетворяет условию $\Lambda([V]) = \Lambda(V)$.

Будем использовать следующие обозначения: для $0 \leq a \leq b \leq \infty$, $\delta > 0$, $V \subseteq \mathbf{R}^d$

$$W(a, b) = \{\alpha: a \leq \Lambda(\alpha) \leq b\}, \quad V_\delta = V \cap W(\Lambda(V), \Lambda(V) + \delta).$$

В приведенных ниже следствиях 2–4 для простоты формулировок рассматриваются ограниченные множества V (см. по этому поводу замечание 1).

Следствие 2. Пусть выполнены условия (C_1) , $(C_2)(i)$, измеримое множество V ограничено. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{S(n)}{n} \in V\right\} &= \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}} \int_{V_\delta} e^{-n\Lambda(\alpha)} \frac{(1 + \varepsilon_1(n, \alpha))}{\sigma(\alpha)} d\alpha \\ &\quad + e^{-n\Lambda(V)} \frac{\varepsilon_2(n, V)}{n^{(d+m)/2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{V_\delta \subseteq G_1 \\ V_\delta \in \mathcal{A}(c)}} \left\{ |\varepsilon_2(n, V)| + \sup_{\alpha \in V_\delta} |\varepsilon_1(n, \alpha)| \right\} = 0,$$

для любых $c \in (0, \infty)$, $\delta > 0$, $m < \infty$, любого замкнутого ограниченного множества $G_1 \subset (G)$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда удастся «явно» найти асимптотическое поведение интеграла в правой части (12). Нам понадобятся следующие обозначения (см. [1]). Для единичного вектора ω и симметричной матрицы R определим множество

$$\Omega(\omega, R) = \left\{ \alpha: \alpha \omega^T - \frac{1}{2} \alpha \Pi R \Pi \alpha^T > 0 \right\},$$

где $\Pi = E - \omega \omega^T$, E — единичная матрица. Граница $\partial\Omega(\omega, R)$ множества $\Omega(\omega, R)$ является параболоидом, у которого вершина находится в точке $\alpha = 0$ и единичная нормаль в этой точке есть ω . Далее для $\beta \in \mathbf{R}^d$

$$\Omega(\beta, \omega, R) = \beta + \Omega(\omega, R),$$

для $\varepsilon > 0$

$$\Omega_\varepsilon(\beta, \omega, R) = U_\varepsilon(\beta) \cap \Omega(\beta, \omega, R).$$

Введем следующее условие гладкости границы ∂V множества V в окрестности точки β :

($V(\beta, \omega, R)$) Для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что

$$\Omega_\varepsilon(\beta, \omega, R - \delta E) \subseteq V \cap U_\varepsilon(\beta) \subseteq \Omega_\varepsilon(\beta, \omega, R + \delta E).$$

Таким образом, если V удовлетворяет свойству ($V(\beta, \omega, R)$), то точка β лежит на границе ∂V и в окрестности этой точки граница ∂V мало отличается от границы множества $\Omega(\beta, \omega, R)$. В «гладком» случае, когда граница ∂V определяется как $\{v: Q(v) = 0\}$, где Q — гладкая функция, матрица R является матрицей вторых производных функции $Q(v)$ в точке $v = \beta$.

Для неотрицательно определенной матрицы B , единичного вектора ω , симметричной матрицы R определим число

$$\chi(B, R, \omega) = \mathbf{E} \exp \left\{ \eta \frac{R}{2} \eta^T \right\},$$

где случайный вектор η имеет гауссовское распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей B . Положим

$$\omega(\beta) = \frac{\lambda(\beta)}{|\lambda(\beta)|}, \quad B(\beta) = (\Lambda(\beta)'')^{-1}.$$

Следствие 3. Пусть выполнены условия (C_1) , $(C_2)(i)$, измеримое множество V ограничено. Пусть $\Lambda(V) = \Lambda(\beta) > 0$, $V_\delta \subset (G)$ для некоторого $\delta > 0$ и множество V удовлетворяет условию $(V(\beta, \omega(\beta), R))$. Тогда если $\chi(B(\beta), R, \omega(\beta)) < \infty$, то

$$P\left\{\frac{S(n)}{n} \in V\right\} = \frac{\chi(B(\beta), R, \omega(\beta))}{\sqrt{2\pi n} |\lambda(\beta)| \sigma(\beta)} e^{-n\Lambda(\beta)} (1 + o(1)). \quad (13)$$

Отметим, что более сильный вариант следствия 3 (равномерный по распределению F и по множеству V), был получен в [1].

Можно привести также асимптотическое разложение для подынтегральной функции в правой части в (12).

Следствие 4. Пусть выполнены условия (C_1) , $(C_2)(i)$, измеримое множество V ограничено. Тогда для любого $r = 1, 2, \dots$

$$P\left\{\frac{S(n)}{n} \in V\right\} = \int_{V_\delta} e^{-n\Lambda(\alpha)} \left(\sum_{k=0}^r \frac{g_k(\alpha)}{n^{(k-d/2)}} + \frac{\varepsilon_1(n, \alpha)}{n^{(r-d/2)}} \right) d\alpha + e^{-n\Lambda(V)} \frac{\varepsilon_2(n, V)}{n^{(d/2+m)}}, \quad (14)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{V_\delta \subseteq G_1 \\ V_\delta \in \mathcal{A}(c)}} \left\{ |\varepsilon_2(n, V)| + \sup_{\alpha \in V_\delta} |\varepsilon_1(n, \alpha)| \right\} = 0,$$

для любых $c \in (0, \infty)$, $\delta > 0$, $m < \infty$, любого замкнутого ограниченного множества $G_1 \subset (G)$.

З а м е ч а н и е 1. В следствиях 2–4 условие ограниченности множества V можно заменить следующим условием: для некоторого $\delta > 0$ множество $V \setminus V_\delta$ является подмножеством конечного объединения полупространств

$$L_i = \{\alpha: \langle \alpha, v_i \rangle \geq c_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

таких, что $\Lambda(L_i) > \Lambda(V)$ для $i = 1, 2, \dots, N$.

Для того, чтобы доказать это замечание, достаточно с помощью неравенства Чебышева [1] оценить вероятность попадания значений $S(n)/n$ в множество $V \setminus V_\delta$:

$$P\left\{\frac{S(n)}{n} \in V \setminus V_\delta\right\} \leq P\left\{\frac{S(n)}{n} \in \cup L_i\right\} \leq N \max P\left\{\frac{S(n)}{n} \in L_i\right\} \leq N \max e^{-n\Lambda(L_i)} \leq N e^{-n(\Lambda(V) + \delta)}.$$

Очевидно, что если добавить к условию $(V(\beta, \omega, R))$ некоторые дополнительные условия гладкости в нужной степени границы множества V в окрестности точки β , то можно получить асимптотические разложения для интеграла в правой части (14). Эти условия громоздки, поэтому

в общем случае мы их приводить не будем, а ограничимся одномерным случаем.

Пусть $d = 1$. Положим

$$\alpha_0 = \mathbf{E}\xi(1), \quad \alpha_- = \inf_{\lambda \in L} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}, \quad \alpha_+ = \sup_{\lambda \in L} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

Тогда, очевидно, $(G) = (\alpha_-, \alpha_+)$, и можно построить последовательность аналитических функций

$$\{c_k(\alpha); \alpha \in (\alpha_-, \alpha_+), k = 1, 2, \dots\},$$

определяющих асимптотические разложения «интегральных» слагаемых: при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_+)$ и при условии $(C_2)(i)$

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-n\Lambda(u)} \sum_{k=0}^r \frac{g_k(u)}{n^{(k-1/2)}} du = e^{-n\Lambda(\alpha)} \left(\sum_{k=1}^r \frac{c_k(\alpha)}{n^{(k+1/2)}} + o\left(\frac{1}{n^{(r+1/2)}}\right) \right).$$

Если выполнено условие $(C_2)(ii)$, то функции $c_k(\alpha)$ определяются из соотношения

$$\sum_{j=[\alpha n]}^{\infty} e^{-n\Lambda(j/n)} \sum_{k=0}^r \frac{g_k(j/n)}{n^{(k-1/2)}} = e^{-n\Lambda(\alpha)} \left(\sum_{k=1}^r \frac{c_k(\alpha)}{n^{(k+1/2)}} + o\left(\frac{1}{n^{(r+1/2)}}\right) \right).$$

Таким образом, из следствия 4 и теоремы 1 вытекает

Следствие 5. Пусть $d = 1$ и выполнены условия $(C_1), (C_2)(i)$. Тогда для любого $r = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{S(n) \geq n\alpha\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} \left\{ \sum_{k=1}^r \frac{c_k(\alpha)}{n^{(k+1/2)}} + \frac{\varepsilon_r(n, \alpha)}{n^{(r+1/2)}} \right\}, \quad (15)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha_0 + \delta \leq \alpha \leq \min\{N, \alpha_+ - \delta\}} |\varepsilon_r(n, V)| = 0$$

для любых $\delta > 0, N < \infty$. Если условие $(C_2)(i)$ заменить условием $(C_2)(ii)$, утверждение сохранится, если в левой части (15) число $n\alpha$ заменить его целой частью $[n\alpha]$.

Отметим, что утверждение следствия 5 содержится (в несколько иной форме) в работе [4]. Авторы [4] не делали различия между случаями $(C_2)(i), (C_2)(ii)$, поэтому у них в представлении (15) числа c_k зависят от n . Отметим еще, что главный член асимптотики в (15) (т.е. правая часть при $r = 1$) получена в работе [4] без привлечения условия (C_2) ; вопрос о необходимости условия (C_2) для $r \geq 2$ остается открытым.

З а м е ч а н и е 2. В условиях теорем 1 и следствий 1–5 можно привести и более сильные варианты этих утверждений, равномерные по классу распределений F , удовлетворяющих равномерным вариантам

условий (C_1) , (C_2) ; например, как уже отмечалось ранее, равномерный вариант следствия 3 был получен в [1]. Ниже, при доказательстве теоремы 1, введены равномерные варианты условий (C_1) , (C_2) и проделана вся подготовительная работа для этих обобщений.

2. Доказательство теоремы 1 и ее следствий

Наряду с условиями (C_1) , $(C_2)(i)$, введенными ранее, рассмотрим равномерные варианты этих условий (ср. с [1]). Для $c \geq 1$ рассмотрим класс $\mathcal{C}_1(c)$ распределений F таких, что

$$(C_1(c)) \sup_{|\lambda| \leq 1/c} \varphi_F(\lambda) \leq c.$$

Введем далее класс $\mathcal{C}_2(c)$ распределений F , удовлетворяющих условию

$$(C_2(c)) \text{ Либо}$$

$$(i) \sup_{|t| \geq c} |\varphi_F(it)| \leq 1 - 1/c,$$

либо

$$(ii) F \text{ удовлетворяет условию } (C_2)(ii) \text{ и } |B(F)| > 0.$$

Лемма 2. Пусть распределение F удовлетворяет условиям (C_1) , (C_2) . Тогда для любого компактного множества $G_1 \subset (G)$ найдется такое $c \in [1, \infty)$, что

$$F^{(\alpha)} \in \mathcal{C}_1(c) \cap \mathcal{C}_2(c)$$

для всех $\alpha \in G_1$.

Доказательство. Принадлежность $F^{(\alpha)}$ классу $\mathcal{C}_1(c)$ для всех $\alpha \in G_1$ и всех достаточно больших c очевидна.

Пусть X, Y — две случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. Положим $a = q/(p+q)$, где $p > 1$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $A = a(1 + Ee^{aY}) E(e^{aY} + 1) |Y|$.

Лемма 3 [1]. Пусть $Ee^Y < \infty$. Тогда для $t \in \mathbb{R}^1$

$$\left(1 - \left| \frac{Ee^{itX+Y}}{Ee^Y} \right| \right)^{1/p} \geq \frac{1 - |Ee^{itX}|^2 - 2A}{2^{(p-1)/p} (Ee^Y)^{2/p}}.$$

Доказательство леммы 3 см. в [1].

Из утверждения леммы 3 легко следует, что если F удовлетворяет условиям (C_1) , $(C_2)(i)$, то $F^{(\alpha)}$ принадлежит классу $\mathcal{C}_2(c)(i)$ для всех $\alpha \in G_1$ и для всех достаточно больших c . Если же F удовлетворяет условиям (C_1) , $(C_2)(ii)$, то очевидно, что $F^{(\alpha)}$ принадлежит классу $\mathcal{C}_2(c)(ii)$ для всех $\alpha \in G_1$ и для всех достаточно больших c . Лемма 2 доказана.

Отметим, что в [4] приводится утверждение (лемма 4), из которого следует, что если F удовлетворяет условию $(C_2)(i)$, то $F^{(\alpha)}$ тоже удовлетворяет этому условию. Таким образом, лемма 3 является равномерным (по α) вариантом леммы 4 в [4].

Для распределения F через $\Psi = \Psi_F$ обозначим гауссовское распределение с теми же первым и вторым моментами, что и у F . Плотность, отвечающую Ψ_F , обозначим $\psi_F(v)$. Следующее утверждение является частным случаем следствия 20.4 из теоремы 20.1 в [8, с. 221].

Лемма 4. Пусть распределение F случайного вектора ξ удовлетворяет условиям $(C_1^{(0)})$, $(C_2)(i)$ и $E\xi = 0$. Тогда для любых $r = 0, 1, \dots, c \in [1, \infty)$

$$P\left\{\frac{S(n)}{\sqrt{n}} \in V\right\} = \int_V \psi_F(v) \sum_{k=0}^r \frac{p_k(F; v)}{n^{k/2}} dv + \frac{\varepsilon_r}{n^{r/2}},$$

где $\varepsilon_r = \varepsilon_r(n, V, F)$, и для $R_r(n, F) = \sup_{V \in \mathcal{A}(c)} |\varepsilon_r(n, V, F)|$ выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_r(n, F) = 0.$$

Для случайного вектора ξ с распределением F через F_0 обозначим распределение центрированного вектора $\xi - E\xi$.

Нам понадобится теперь

Лемма 5. Для любого $r = 0, 1, \dots$, любых $c_i \in [1, \infty)$, $i = 0, 1, 2$,

$$P\left\{\frac{S(n) - nE\xi(1)}{\sqrt{n}} \in V\right\} = \int_V \psi_F(v) \sum_{k=0}^r \frac{p_k(F_0; v)}{n^{k/2}} dv + \frac{\varepsilon_r}{n^{r/2}},$$

где $\varepsilon_r = \varepsilon_r(n, V, F_0)$, и для $R_r(n, F_0) = \sup_{V \in \mathcal{A}(c_0)} |\varepsilon_r(n, V, F_0)|$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in \mathcal{C}_1(c_1) \cap \mathcal{C}_2(c_2)(i)} R_r(n, F_0) = 0.$$

Доказательство леммы 5 получается путем повторения доказательства следствия 20.4 и теоремы 20.1 из [8] с незначительными модификациями, поэтому мы его опускаем.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству части I теоремы 1. Напомним, что для $\alpha \in (G)$ через $F_0^{(\alpha)}$ мы обозначили распределение вектора $\xi_0^{(\alpha)} = \xi^{(\alpha)} - \alpha$; тогда

$$S_0^{(\alpha)} = \xi_0^{(\alpha)}(1) + \dots + \xi_0^{(\alpha)}(n).$$

Для $V = \Delta_1(\alpha)$, $\Delta_1 = \Delta/n$, $\alpha = x/n \in G_1$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} P\{S(n) \in nV\} &= e^{-n\Lambda(\alpha)} E\left(\exp\{-\langle \lambda(\alpha), S_0^{(\alpha)}(n) \rangle\}; S_0^{(\alpha)}(n) \in n(V - \alpha)\right) \\ &= \exp\{-n\Lambda(\alpha)\} E(n, \alpha, \Delta). \end{aligned}$$

где

$$E(n, \alpha, \Delta) = E\left(\exp\{-\langle \lambda(\alpha), S_0^{(\alpha)}(n) \rangle\}; S_0^{(\alpha)}(n) \in \Delta(0)\right).$$

Поскольку для $v \in \Delta(0)$ выполняется $1 - \Delta A \leq e^{-(\lambda(\alpha), v)} \leq 1 + \Delta A$, где $A = A(\alpha, \Delta)$,

$$\sup_{\alpha \in G_1} \sup_{0 \leq \Delta \leq \Delta_0} A(\alpha, \Delta) < \infty,$$

получаем:

$$E(n, \alpha, \Delta) = P(n, \alpha, \Delta)(1 + \Delta C_2),$$

где

$$P(n, \alpha, \Delta) = P\{S_0^{(\alpha)}(n) \in \Delta(0)\}.$$

Для изучения $P(n, \alpha, \Delta)$ заметим, что в силу леммы 2 для F , удовлетворяющего условиям (C_1) , $(C_2)(i)$, найдется такое $c \in [1, \infty)$, что для всех $\alpha \in G_1 \subset (G)$

$$F^{(\alpha)} \in \mathcal{C}_1(c) \cap \mathcal{C}_{2,i}(c).$$

Поэтому в силу леммы 5

$$P(n, \alpha, \Delta) = P_{r+d}(n, \alpha, \Delta) + \frac{C_3}{n^{(r+d/2)}},$$

где для $V_1 = \Delta(0)/\sqrt{n}$

$$P_{r+d}(n, \alpha, \Delta) = \int_{V_1} \psi_{F_0^\alpha}(v) \sum_{k=0}^{r+d} \frac{p_k(F_0^{(\alpha)}; v)}{n^{k/2}} dv.$$

Очевидно далее, что

$$P_{r+d}(n, \alpha, \Delta) = P_{r+d}^*(n, \alpha, \Delta) \left(1 + \frac{C_1 \Delta}{\sqrt{n}}\right),$$

где

$$P_{r+d}^*(n, \alpha, \Delta) = \int_{V_1} \psi_{FF_0^\alpha}(0) \sum_{k=0}^{r+d} \frac{p_k(F_0^{(\alpha)}; 0)}{n^{k/2}} dv = \frac{m(\Delta(0))}{n^{d/2}} \sum_{k=0}^{r+d} \frac{g_k(\alpha)}{n^{k/2}}.$$

Поскольку равномерные оценки для C_i , $i = 1, 2, 3$, очевидны, утверждение части I теоремы 1 для куба $\Delta(x)$ доказано. Так как в силу леммы 1 доказательство для множества $\Delta^*(x) \subseteq \Delta(x)$ совершенно идентично приведенному, то часть I теоремы 1 доказана.

Часть II теоремы 1 доказывается аналогично с помощью равномерного варианта (по классу $\mathcal{C}_1(c) \cap \mathcal{C}_2(c)(ii)$) теоремы 22.1 в [8, с. 239]). Теорема 1 доказана.

Доказательство следствий 1–4. Очевидно, что следствие 1 вытекает из теоремы 1, а следствие 2 вытекает из следствия 4; вывод следствия 3 из следствия 2 приведен в [1]. Поэтому нам достаточно доказать следствие 4.

Доказательство следствия 4. Выберем такое $\delta > 0$, что $V_\delta \subseteq G_1$. Из грубой теоремы (см. [1]) следует оценка для ограниченного множества $V \setminus V_\delta$:

$$\mathbf{P}\{S(n) \in n(V \setminus V_\delta)\} = O(e^{-n(\Lambda(V)+\nu)})$$

для некоторого $\nu > 0$. Для отыскания асимптотики $\mathbf{P}\{S(n) \in nV_\delta\}$ выберем $\Delta = n^{-s}$, где s уточним ниже; представим далее множество nV_δ в виде объединения $M = (2\delta n^s)^d$ кусочков $\Delta^*(v_i) = \Delta(v_i) \cap V_\delta$, где $v_i \in \Delta Z^d$. Для каждого кусочка $\Delta^*(v_i)$ воспользуемся теоремой 1 при $\Delta = n^{-s}$ и $r = l$, где l выберем ниже:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta^*(v_i)\} &= m(\Delta^*(v_i)) \sum_{k=0}^l e^{-n\Lambda(v_i/n)} \left(\frac{g_k(v_i/n)}{n^{(d+k)/2}} + \frac{O(1)\Delta}{\sqrt{n}} \right) \\ &\quad \times (1 + O(1)\Delta_1) + e^{-n\Lambda(v_i)} \frac{\varepsilon_l(n)}{n^{l+d/2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что для любого l выполняется

$$\begin{aligned} m(\Delta^*(v_i)) \sum_{k=0}^l e^{-n\Lambda(v_i/n)} \left(\frac{g_k(v_i/n)}{n^{(d+k)/2}} + \frac{O(1)\Delta}{\sqrt{n}} \right) (1 + O(1)\Delta) \\ = \int_{\Delta_1^*(v_i/n)} \sum_{k=0}^l e^{-n\Lambda(\alpha)} \left(\frac{g_k(\alpha)}{n^{(d+k)/2}} + \frac{O(1)\Delta n^d}{\sqrt{n}} \right) (1 + O(1)\Delta) d\alpha, \end{aligned}$$

где $\Delta_1 = \Delta/n$, функции $O(1)$ ограничены по модулю равномерно по $\alpha \in V_\delta$ константой $C = C_l < \infty$. Поскольку

$$\mathbf{P}\{S(n) \in nV_\delta\} = \sum_{i=1}^M \mathbf{P}\{S(n) \in \Delta^*(v_i)\},$$

то получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S(n) \in nV_\delta\} &= \sum_{k=0}^l \int_{V_\delta} e^{-n\Lambda(\alpha)} \left(\frac{g_k(\alpha)}{n^{(k-d)/2}} + \frac{O(1)\Delta n^d}{\sqrt{n}} \right) (1 + O(1)\Delta) d\alpha \\ &\quad + M e^{-n\Lambda(V_\delta)} \frac{O(1)}{n^{l+d/2}} = \sum_{k=0}^l \int_{V_\delta} e^{-n\Lambda(\alpha)} \left(\frac{g_k(\alpha)}{n^{(k-d)/2}} + O(1)n^{-s+d} \right) d\alpha \\ &\quad + e^{-n\Lambda(V_\delta)} \frac{O(1)(2\delta)^d n^{sd}}{n^{l+d/2}}. \end{aligned}$$

Выбирая теперь s достаточно большим, чтобы

$$n^{-s+d} = o(1) \frac{1}{n^{r-d/2}},$$

а затем l тоже достаточно большим, чтобы

$$\frac{O(1)(2\delta)^d n^{sd}}{n^{l+d/2}} = o(1) \frac{1}{n^{m+d/2}},$$

получаем доказательство следствия 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Мозульский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992, 222 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. II. М.: Мир, 1967, 725 с.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1967, 267 с.
4. Bahadur R. R., Ranga Rao R. On deviations of the sample mean. — Ann. Math. Statist., 1960, v. 31, № 4, p. 1015–1027.
5. Боровков А. А. Об условных распределениях, связанных с большими отклонениями. — Сиб. матем. ж., 1995, т. 36, № 3, с. 493–509.
6. Боровков А. А., Rogozin Б. А. О центральной предельной теореме в многомерном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, № 1, с. 61–69.
7. Боровков А. А. О преобразовании Крамера, больших отклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. — Сиб. матем. ж. (в печати).
8. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.

Поступила в редакцию
28.I.1997