Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Вахания, Случайные векторы со значениями в кватернионных гильбертовых пространствах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 18–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp821>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:32:15

© 1998 г.

ВАХАНИЯ Н. Н.*

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ СО ЗНАЧЕНИЯМИ
В КВАТЕРНИОННЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ¹⁾

Работа посвящена систематическому изучению основных первоначальных понятий и фактов, которые могут трактоваться как часть аппарата будущей теории кватернионных случайных величин и векторов. Мы в основном занимаемся бесконечномерным случаем. Определяются и анализируются такие основные понятия теории, как математическое ожидание, ковариационный оператор, оператор взаимной ковариации, характеристический функционал, гауссовский вектор — применительно к случайным элементам со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве над телом кватернионов.

Работа носит замкнутый характер. Однако в идейном отношении ее можно считать естественным продолжением статьи [1], в которой рассматриваются случайные векторы со значениями в комплексных гильбертовых пространствах. Настоящая работа построена по схеме статьи [1]. Несмотря на внешнее сходство формулировок, некоммутативность в кватернионном случае вносит специфическую особенность, часто скрытую и довольно неожиданную. Правда, преодоление дополнительных трудностей, связанных с некоммутативностью, требует не столько изобретательности, сколько тщательности и аккуратности при введении определений и при формулировке результатов и их доказательстве.

Ключевые слова и фразы: кватернионное гильбертово пространство, $\mathbb{R}$ -, $\mathbb{C}$ - и $\mathbb{Q}$ -правильные операторы, кватернионная случайная величина, кватернионный случайный вектор, $\mathbb{R}$ -, $\mathbb{C}$ - и $\mathbb{Q}$ -правильные случайные векторы, кватернионная гауссовская случайная величина, $\mathbb{R}$ -, $\mathbb{C}$ - и $\mathbb{Q}$ -гауссовские случайные векторы, ковариационный оператор, оператор взаимной ковариации кватернионных случайных векторов.

1. Кватернионы

Кватернионы возникли в исследованиях, имеющих целью построение многомерных аналогов поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Одну возможность такого типа реализовал в середине прошлого века У. Гамильтон,

*Работа выполнена при частичной поддержке совместным грантом Правительства Грузии и Международного научного фонда (грант МХС200).

¹⁾Институт вычислительной математики им. Н. И. Мусхелишвили АН Грузии, ул. Акури, 8, 380093 Тбилиси, Грузия.

который построил конкретную систему «гиперкомплексных чисел», названных кватернионами. Множество кватернионов $\mathbf{Q}$ содержит поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ и само является телом, т.е. обладает всеми свойствами поля, кроме коммутативности умножения. Тело $\mathbf{Q}$ является также алгеброй над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ -алгеброй). Размерность этой алгебры равна четырем (отсюда название «кватернион»). Вскоре после построения $\mathbf{R}$ -алгебры кватернионов А. Кэли построил еще одну систему «гиперкомплексных чисел» — восьмимерную $\mathbf{R}$ -алгебру без делителей нуля, содержащую алгебру $\mathbf{Q}$. Однако алгебра чисел Кэли не только не коммутативна, но и не ассоциативна. Позже выяснилось, что построить новый ассоциативный вариант «гиперкомплексных чисел» было невозможно, так как любая конечномерная ассоциативная алгебра без делителей нуля над полем $\mathbf{R}$ есть либо само $\mathbf{R}$, либо $\mathbf{C}$, либо $\mathbf{Q}$ (теорема Фробениуса).

Напомним вкратце определение тела кватернионов. Обозначим через $\mathbf{Q}$ абелеву группу всех упорядоченных четверок вещественных чисел (x', x'', x''', x^{iv}) с обычным покомпонентным определением операции сложения. Следуя традиции, четверки $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ обозначим, соответственно, через $1, i, j$ и k (тот факт, что 1 обозначает как вещественную единицу, так и одну из четверок, не должен вызвать недоразумения). Допуская обычно принятую вольность речи, на $\mathbf{Q}$ можно смотреть как на множество всех линейных комбинаций $x = x'1 + x''i + x'''j + x^{iv}k$ четырех базисных элементов $1, i, j, k$ с вещественными коэффициентами x', x'', x''', x^{iv} , которые можно назвать компонентами элемента $x \in \mathbf{Q}$. Линейные комбинации x и y будут одинаковыми элементами группы $\mathbf{Q}$, если $x' = y', x'' = y'', x''' = y''', x^{iv} = y^{iv}$. Нулевым элементом этой группы будет линейная комбинация с нулевыми коэффициентами. Далее, абелеву группу $\mathbf{Q}$ можно превратить в тело (некоммутативное поле). Для этого нужно ввести умножение в $\mathbf{Q}$ как дистрибутивную операцию относительно сложения, удовлетворяющую также следующим условиям.

(1) Умножение ассоциативно в возникающих после раскрытия скобок одночленах, и умножение на вещественные числа коммутативно. Это означает, что для любых двух базисных элементов f и g и любых вещественных чисел s и t произведение $sftg$ имеет однозначный смысл, т.е. не зависит от последовательности выполнения операций (расстановки скобок). Кроме того, в любом одночлене вещественные множители можно переставлять как угодно.

(2) Умножение базисного элемента 1 на другие базисные элементы (как слева, так и справа) не меняет этих элементов. Умножение остальных базисных элементов друг на друга определяется следующей таблицей умножения:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где -1 обозначает элемент, обратный к базисному элементу 1. Легко видеть, что этими условиями определяется ассоциативная (но не коммутативная) операция в аддитивной группе $\mathbf{Q}$, и таким образом $\mathbf{Q}$ превращается в тело, которое и называется телом кватернионов. Единицей умножения является, очевидно, кватернион, компоненты которого есть $1, 0, 0, 0$, т.е. базисный элемент 1. Для удобства записи формул базисные элементы i, j, k будем иногда обозначать через i_1, i_2, i_3 , соответственно. Под i_0 будем понимать единицу (базисный элемент 1) тела $\mathbf{Q}$. По этой же причине компоненты x', x'', x''', x^{iv} кватерниона x будем часто обозначать $\text{Im}^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$, соответственно. $\text{Im}^{(0)}(x)$ называется вещественной частью и $\text{Im}^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, 3$, называются мнимыми частями кватерниона x . Вместо $\text{Im}^{(0)}(x)$ мы часто будем писать $\text{Re}(x)$. Базисный элемент 1 в записи кватерниона обычно опускается. Таким образом, имеем следующие две формы записи кватернионов:

$$x = x' + ix'' + jx''' + kx^{iv} = \sum_{n=0}^3 i_n \text{Im}^{(n)}(x). \quad (1.2)$$

Наряду с $\mathbf{R}$ -разложением (1.2) мы будем пользоваться и $\mathbf{C}$ -разложением, которое имеет вид

$$x = x^{(1)} + x^{(2)}j, \quad x^{(1)} = x' + ix'', \quad x^{(2)} = x''' + ix^{iv}. \quad (1.3)$$

Легко проверить, используя дистрибутивность умножения, представление (1.2) и таблицу (1.1), что произведение xu кватерниона x на u выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned} xu = & (x'y' - x''y'' - x'''y''' - x^{iv}y^{iv}) + i(x'y'' + x''y' + x'''y^{iv} - x^{iv}y''') \\ & + j(x'y''' - x''y^{iv} + x'''y' + x^{iv}y'') \\ & + k(x'y^{iv} + x''y''' - x'''y^{iv} + x^{iv}y'). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Кватернион $x' - ix'' - jx''' - kx^{iv}$ называется сопряженным к кватерниону (1.2) и обозначается $\bar{x}$. Легко видеть, что $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$. Очевидно, что $x = \bar{x}$ равносильно тому, что $x'' = x''' = x^{iv} = 0$. В этом случае говорят, что кватернион x является вещественным числом. Обратно, любое вещественное число есть кватернион этого специального вида. Если $x''' = x^{iv} = 0$, то говорят, что кватернион x является комплексным числом (отождествляя базисный элемент i с обычной мнимой единицей $i = \sqrt{-1}$). Обратно, любое комплексное число есть кватернион этого специального вида. Как показывает формула (1.4), умножение в $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$, индуцированное из $\mathbf{Q}$, совпадает с обычными операциями умножения в этих полях. Поэтому произведение вещественного или комплексного числа на кватернион имеет вполне определенный смысл, как произведение двух кватернионов. В этом смысле говорят, что тело $\mathbf{Q}$ содержит поле $\mathbf{C}$ и поле $\mathbf{R}$.

Снова используя формулу (1.4), легко показать, что $x\bar{x}$ есть неотрицательное вещественное число (положительное, если $x \neq 0$). Более того,

$$x\bar{x} = \bar{x}x = (x')^2 + (x'')^2 + (x''')^2 + (x^{iv})^2. \quad (1.5)$$

Положительный квадратный корень из $x\bar{x}$ можно назвать абсолютным значением (модулем) кватерниона x и обозначить $|x|$. Ясно, что $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$, где x^{-1} есть обратный элемент к x относительно умножения кватернионов (нулевой элемент не имеет обратного). Из формулы (1.5) получаем, что абсолютное значение вещественного числа и модуль комплексного числа совпадают с модулем этих чисел, рассматриваемых как кватернионы.

Как было отмечено выше, если $\mathbf{Q}$ рассматривать только как абелеву группу по сложению и произведение вещественного числа на кватернион мыслить как внешнюю операцию, то на $\mathbf{Q}$ можно смотреть как на четырехмерное векторное пространство над $\mathbf{R}$. Обозначим это пространство через $\mathbf{Q}_\mathbf{R}$. Оно изоморфно вещественному евклидову пространству $\mathbf{R}^4$. Изоморфизм можно установить соответствием $x \mapsto \hat{x} := (x', x'', x''', x^{iv})$.

За внешнюю операцию в $\mathbf{Q}$ можно взять умножение комплексного числа z на кватернион x . В таком случае на $\mathbf{Q}$ можно смотреть как на векторное пространство над полем $\mathbf{C}$. Обозначим это пространство через $\mathbf{Q}_\mathbf{C}$. Оно, очевидно, двумерно и изоморфно комплексному двумерному евклидову пространству $\mathbf{C}^2$. Изоморфизм можно установить по-разному. Мы будем пользоваться изоморфизмом

$$x \mapsto \tilde{x} := (x^{(1)}, x^{(2)}) := (x' + ix'', x''' + ix^{iv}).$$

Заметим, что в определении $\mathbf{Q}_\mathbf{C}$ мы выбираем порядок умножения zx (скалярный множитель пишем слева и имеем соответствующую форму ассоциативности). Это означает, что $\mathbf{Q}_\mathbf{C}$ у нас — левое векторное пространство. Можно установить также изоморфизм $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ соотношением

$$(z_1, z_2) \mapsto (z'_1, z''_1, z'_2, z''_2), \quad z_n = z'_n + iz''_n \quad (n = 1, 2).$$

Очевидно, что при таком определении соответствий изоморфизм $\mathbf{Q}_\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^4$ есть суперпозиция изоморфизмов $\mathbf{Q}_\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ (соответствующая диаграмма коммутативна). Все три изоморфизма являются, как легко видеть, также и изометриями относительно метрики в $\mathbf{Q}$, определяемой модулем кватерниона, и евклидовых метрик в $\mathbf{C}^2$ и $\mathbf{R}^4$.

Внешнюю операцию в $\mathbf{Q}$ можно определить не только над полем вещественных или комплексных скаляров, но также над телом самих кватернионов. В этом случае, очевидно, получаем одномерное векторное пространство, в котором как элементами пространства, так и скалярами, задающими внешнюю операцию, являются кватернионы. Обозначим

это пространство через $\mathbf{Q}_Q$ или просто $\mathbf{Q}$. Предполагается, что скаляры пишутся слева, т.е. наше $\mathbf{Q}$ есть левое векторное пространство.

2. Кватернионное гильбертово пространство. Правильные операторы

Кватернионное гильбертово пространство H определяется как векторное пространство над телом кватернионов, в котором задано скалярное произведение и которое является полным относительно нормы, порождаемой этим скалярным произведением. Под скалярным произведением понимается функция $(h | g)$ в $H \times H$, значениями которой являются кватернионы и которая удовлетворяет следующим условиям:

(1) $(h | h) \geq 0$ для всех $h \in H$. Более того, $(h | h) = 0$ в том и только том случае, если $h = 0$;

(2) при любом фиксированном g произведение $(h | g)$, как функция от h , линейно;

(3) $(h | g) = \overline{(g | h)}$ для всех $h, g \in H$.

Из условий (2) и (3) легко следует, что $(\alpha h | \beta g) = \alpha(h | g)\bar{\beta}$ для любой пары кватернионов α, β и любых $h, g \in H$.

Положительный квадратный корень из $(h | h)$ называется нормой вектора h и обозначается $\|h\|$. Легко проверить, что функция $\|\cdot\|$ удовлетворяет всем условиям нормы в векторном пространстве.

Мы выбираем левое векторное пространство (скаляры пишем слева) и поэтому H будет левым кватернионным гильбертовым пространством.

Простейший пример такого пространства есть одномерное кватернионное гильбертово пространство — векторное пространство $\mathbf{Q}_Q$ со скалярным произведением $x\bar{y}$, $x, y \in \mathbf{Q}$.

Обычные понятия и утверждения, хорошо известные для вещественного и комплексного гильбертова пространства, остаются в силе и в кватернионном случае.

Всюду ниже H обозначает конечномерное или бесконечномерное кватернионное гильбертово пространство. В последнем случае предполагается, что H сепарабельно.

Выберем в H произвольный ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots$ и обозначим через $H_{\mathbf{R}}$ и $H_{\mathbf{C}}$ совокупность тех векторов из H , которые имеют вещественные и, соответственно, комплексные коэффициенты Фурье в разложении по этому базису. $H_{\mathbf{R}}$ и $H_{\mathbf{C}}$, конечно, зависят от выбора базиса, но в обозначении эта зависимость не отражена, так как базис всегда будет считаться зафиксированным.

Пусть $c_1, c_2, \dots$ — коэффициенты Фурье вектора $h \in H$ в выбранном базисе. Представляя кватернион c_n по формуле (1.2) в виде $\mathbf{R}$ -линейной комбинации всех базисных элементов $1, i, j, k$, получим $\mathbf{R}$ -разложение произвольного вектора $h \in H$ в виде $h = h' + ih'' + jh''' + kh''''$, где h' (соответственно, h'', h''', h'''') есть вектор в H с коэффициентами Фурье c'_n (соответственно, c''_n, c'''_n, c''''_n). Это разложение правильно в том смысле,

что все четыре вектора $h', \dots, h^{IV}$ принадлежат $H_{\mathbf{R}}$ (и поэтому они перестановочны с каждым из базисных элементов тела кватернионов). Если представить кватернион c_n по формуле (1.3) в виде $\mathbf{C}$ -линейной комбинации базисных элементов 1 и j , то получим $\mathbf{C}$ -разложение $h = h^{(1)} + h^{(2)}j$, где $h^{(1)} = h' + ih''$ и $h^{(2)} = h''' + ih^{IV}$. Это разложение правильно в том смысле, что $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ принадлежат $H_{\mathbf{C}}$. Понятие правильности разложений зависит от множеств $H_{\mathbf{R}}$ и $H_{\mathbf{C}}$ и, следовательно, от выбора базиса в H . В одномерном случае $H = \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}}$ естественное разложение (1.2) является правильным только относительно базисов $e_1 = 1$ и $e_1 = -1$, а разложение (1.3) правильно, только если e_1 есть комплексное число (по модулю единица). В фиксированном базисе оба правильных разложения, очевидно, единственны. Всюду ниже штрихи $', ''', ''', '''$ и символы $^{(1)}$ и $^{(2)}$ как верхние индексы будут использованы только для обозначения компонент правильных разложений.

Совокупность $H_{\mathbf{R}} \subset H$ представляет собой аддитивную группу, замкнутую относительно умножения на вещественные числа и перехода к пределу. Кроме того, скалярные произведения векторов из $H_{\mathbf{R}}$ принимают только вещественные значения. Поэтому, ограничив поле скаляров вещественными числами, $H_{\mathbf{R}}$ можно считать вещественным гильбертовым пространством. Таким образом, соотношением $h \mapsto \hat{h}$, где $\hat{h} = (h', h'', h''', h^{IV})$, кватернионное гильбертово пространство H отображается взаимно однозначно — с сохранением операций сложения и умножения на вещественные скаляры — на вещественное векторное пространство $H_{\mathbf{R}} \times H_{\mathbf{R}} \times H_{\mathbf{R}} \times H_{\mathbf{R}} = H_{\mathbf{R}}^4$, которое является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle \hat{h} | \hat{g} \rangle = (h' | g') + (h'' | g'') + (h''' | g''') + (h^{IV} | g^{IV}), \quad (2.1)$$

где $(\cdot | \cdot)$ — скалярное произведение в $H_{\mathbf{R}}$. Это пространство есть гильбертова прямая сумма четырех копий гильбертова пространства $H_{\mathbf{R}}$. Для краткости можно использовать обозначение $H_{\mathbf{R}}^4$ вместо более точного обозначения $H_{\mathbf{R}} \oplus H_{\mathbf{R}} \oplus H_{\mathbf{R}} \oplus H_{\mathbf{R}}$.

Легко показать также, что, ограничив поле скаляров комплексными числами, множество $H_{\mathbf{C}} \subset H$ можно считать комплексным гильбертовым пространством. Кроме того, соотношением $h \mapsto \tilde{h}$, где $\tilde{h} = (h^{(1)}, h^{(2)})$, пространство H отображается взаимно однозначно — с сохранением операций сложения и умножения на комплексные числа — на комплексное гильбертово пространство $H_{\mathbf{C}} \oplus H_{\mathbf{C}}$. Это пространство есть гильбертова прямая сумма двух копий гильбертова пространства $H_{\mathbf{C}}$. Скалярное произведение в нем задается формулой

$$\langle \tilde{h} | \tilde{g} \rangle = (h^{(1)} | g^{(1)}) + (h^{(2)} | g^{(2)}). \quad (2.2)$$

Вместо $H_{\mathbf{C}} \oplus H_{\mathbf{C}}$ для краткости будем в дальнейшем писать $H_{\mathbf{C}}^2$.

Ниже мы будем пользоваться линейной непрерывной операцией комплексного сопряжения в комплексном пространстве $H_{\mathbb{C}}$, которая определяется естественным образом: если $u \in H_{\mathbb{C}}$ имеет коэффициенты Фурье c_n , то $\bar{u}$ определяется как элемент пространства $H_{\mathbb{C}}$ с коэффициентами Фурье $\bar{c}_n$ в том же базисе ($n = 1, 2, \dots$). Очевидно, что если $u = u' + iu''$ есть правильное разложение вектора $u \in H_{\mathbb{C}}$ (т.е. если $u', u'' \in H_{\mathbb{R}}$), то $\bar{u} = u' - iu''$. Очевидно также, что $u\bar{j} = j\bar{u}$, $uk = k\bar{u}$ для любого $u \in H_{\mathbb{C}}$.

Продолжая следовать схеме работы [1], теперь мы хотим ввести понятие правильного оператора. В кватернионном случае, в отличие от комплексного, имеются три различных понятия правильности, именно, $\mathbb{C}$ -правильность и $\mathbb{Q}$ -правильность для операторов в $H_{\mathbb{R}}^4$ и $\mathbb{Q}$ -правильность для операторов в $H_{\mathbb{C}}^2$. Начнем с соглашения об обозначениях. Для множества всех линейных непрерывных операторов из H в H (эндоморфизмов H) вместо традиционного в анализе обозначения $L(H)$ мы используем «алгебраическое» обозначение $\text{end}_{\mathbb{Q}}H$, более удобное для наших конкретных целей в настоящей работе. Множества всех аддитивных непрерывных операторов в H , однородных относительно только комплексных или только вещественных скаляров (только $\mathbb{C}$ -однородных или $\mathbb{R}$ -однородных), обозначим через $\text{end}_{\mathbb{C}}H$ и $\text{end}_{\mathbb{R}}H$, соответственно. Аналогичный смысл имеют обозначения $\text{end}_{\mathbb{C}}H_{\mathbb{C}}^2$, $\text{end}_{\mathbb{R}}H_{\mathbb{C}}^2$ и $\text{end}_{\mathbb{R}}H_{\mathbb{R}}^4$. Ясно, что $\text{end}_{\mathbb{Q}}H \subset \text{end}_{\mathbb{C}}H \subset \text{end}_{\mathbb{R}}H$ и $\text{end}_{\mathbb{C}}H_{\mathbb{C}}^2 \subset \text{end}_{\mathbb{R}}H_{\mathbb{C}}^2$. Поскольку введенные выше отображения $H \rightarrow H_{\mathbb{R}}^4$ и $H \rightarrow H_{\mathbb{C}}^2$ являются, очевидно, биекциями, любой вектор из $H_{\mathbb{R}}^4$ или $H_{\mathbb{C}}^2$ имеет вид $\tilde{h}$ или $\tilde{h}$ соответственно для некоторого (единственного) $h \in H$. Очевидно, что при естественном определении биекции $H_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow H_{\mathbb{R}}^4$ соотношением $\tilde{h} \mapsto \hat{h}$ биекция $H \rightarrow H_{\mathbb{R}}^4$ есть суперпозиция биекций $H \rightarrow H_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow H_{\mathbb{R}}^4$ (соответствующая диаграмма коммутативна).

Можно установить естественные биективные соответствия и между операторами, действующими в пространствах H , $H_{\mathbb{C}}^2$ и $H_{\mathbb{R}}^4$. Для $A \in \text{end}_{\mathbb{R}}H$ обозначим через $\hat{A}$ оператор в $H_{\mathbb{R}}^4$, определяемый соотношением $\hat{A}\tilde{h} = \tilde{A}h$. Это соответствие, очевидно, есть биекция между $\text{end}_{\mathbb{R}}H$ и $\text{end}_{\mathbb{R}}H_{\mathbb{R}}^4$, т.е. любой оператор из $\text{end}_{\mathbb{R}}H_{\mathbb{R}}^4$ есть $\hat{A}$ для некоторого (единственного) $A \in \text{end}_{\mathbb{R}}H$. Однако свойством однородности относительно комплексных скаляров оператор A может не обладать, т.е. $\{\hat{A}: A \in \text{end}_{\mathbb{C}}H\}$ есть собственное подмножество множества $\text{end}_{\mathbb{R}}H_{\mathbb{R}}^4$, и элементы этого подмножества будем называть $\mathbb{C}$ -правильными операторами в $H_{\mathbb{R}}^4$. Элементы же еще более меньшего подмножества $\{\hat{A}: A \in \text{end}_{\mathbb{Q}}H\}$ будем называть $\mathbb{Q}$ -правильными операторами. Далее определим биекцию $\text{end}_{\mathbb{C}}H \rightarrow \text{end}_{\mathbb{C}}H_{\mathbb{C}}^2$ естественным соответствием $A \mapsto \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ определяется равенством $\tilde{A}\tilde{h} = \tilde{A}h$, $\tilde{h} \in H_{\mathbb{C}}^2$, и назовем оператор в $H_{\mathbb{C}}^2$ $\mathbb{Q}$ -правильным, если он входит в образ множества $\text{end}_{\mathbb{Q}}H$ в $\text{end}_{\mathbb{C}}H_{\mathbb{C}}^2$ при этой биекции. Наша задача теперь — описать правильные операторы.

Любой оператор $\hat{A} \in \text{end}_{\mathbf{R}} H_{\mathbf{R}}^4$ можно очевидным образом представить как (4×4) -матрицу $\|\hat{A}_{mn}\|$, элементы которой суть линейные непрерывные операторы в $H_{\mathbf{R}}$. Формальные правила вычисления компонент вектора $\hat{A}\hat{h}$ по компонентам вектора $\hat{h}$ совпадают с соответствующими правилами матричной алгебры четвертого порядка. Например, первая компонента $(\hat{A}\hat{h})'$ вычисляется по формуле

$$(\hat{A}\hat{h})' = \hat{A}_{11}h' + \hat{A}_{12}h'' + \hat{A}_{13}h''' + \hat{A}_{14}h^{iv}, \quad (2.3)$$

и аналогичные формулы справедливы для остальных трех компонент. Мы хотим найти общий вид операторных матриц для $\mathbf{C}$ -правильных и $\mathbf{Q}$ -правильных операторов $\hat{A}$. Найдем сначала операторные матрицы $\hat{i}$ и $\hat{j}$ для операторов умножения слева на i и на j , соответственно, в пространстве H . Равенства $ih = -h'' + ih' - jh^{iv} + kh'''$ и $jh = -h''' + ih^{iv} + jh' - kh''$ показывают, что $i\hat{h} = (-h'', h', -h^{iv}, h''')$ и $j\hat{h} = (-h''', h^{iv}, h', -h'')$. Поэтому, согласно соотношениям $i\hat{h} = \hat{i}\hat{h}$ и $j\hat{h} = \hat{j}\hat{h}$, имеем

$$\hat{i} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{j} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

где 0 и 1 обозначают нулевой и единичный операторы соответственно. Очевидно, что операторы $\hat{i}$ и $\hat{j}$ принадлежат множеству $\text{end}_{\mathbf{R}} H_{\mathbf{R}}^4$ (однако они не являются правильными, так как оператор левого умножения в H на невещественный кватернион не является $\mathbf{C}$ -однородным).

Оператор $A \in \text{end}_{\mathbf{R}} H$ принадлежит множеству $\text{end}_{\mathbf{C}} H$ в том и только том случае, если $Aih = iAh$ для всех $h \in H$. Поэтому легко проверяемые равенства

$$(\hat{i}\hat{A})\hat{h} = \hat{A}i\hat{h} = \hat{A}i\hat{h}, \quad (\hat{i}\hat{A})\hat{h} = \hat{i}\hat{A}\hat{h} = \hat{i}\hat{A}\hat{h}$$

показывают, что $\hat{A}$ есть $\mathbf{C}$ -правильный оператор в том и только том случае, если он коммутирует с оператором $\hat{i}$. Аналогично показывается, что необходимым и достаточным условием $\mathbf{Q}$ -правильности оператора является его коммутативность как с оператором $\hat{i}$, так и с $\hat{j}$. Легко показать, что условие $\hat{A}\hat{i} = \hat{i}\hat{A}$ накладывает следующие ограничения на операторную матрицу $\|\hat{A}_{mn}\|$: $\hat{A}_{12} = -\hat{A}_{21}$, $\hat{A}_{22} = \hat{A}_{11}$, $\hat{A}_{23} = -\hat{A}_{14}$, $\hat{A}_{24} = \hat{A}_{13}$, $\hat{A}_{32} = -\hat{A}_{41}$, $\hat{A}_{42} = \hat{A}_{31}$, $\hat{A}_{44} = \hat{A}_{33}$, $\hat{A}_{34} = -\hat{A}_{43}$. Если же $\hat{A}$ коммутирует также и с $\hat{j}$, то возникают дополнительные ограничения: $\hat{A}_{13} = -\hat{A}_{31}$, $\hat{A}_{14} = -\hat{A}_{41}$, $\hat{A}_{33} = \hat{A}_{11}$, $\hat{A}_{43} = -\hat{A}_{21}$. Чтобы лучше увидеть общий вид всех $\mathbf{C}$ -правильных операторов в $H_{\mathbf{R}}^4$, заметим следующее: любая (4×4) -матрица представляет собой (2×2) -блочную матрицу с блоками, которые есть (2×2) -матрицы, и все четыре блока $\mathbf{C}$ -правильной операторной матрицы представляют собой $\mathbf{C}$ -правильные операторы в $H_{\mathbf{R}}^2$, т.е. такие, которые соответствуют операторам из $\text{end}_{\mathbf{C}} H_{\mathbf{C}}$ (такие операторы введе-

ны в [1], там они были названы комплексно правильными). Таким образом, $\mathbf{C}$ -правильные операторные матрицы $\|\hat{A}_{mn}\|$ определяются восемью операторами вместо шестнадцати, а $\mathbf{Q}$ -правильные только четырьмя. Найдем связь этих четырех операторов с соответствующим оператором $A \in \text{end}_{\mathbf{Q}} H$ (это будет одновременно и вторым методом получения общего вида $\mathbf{Q}$ -правильных операторов в $H_{\mathbf{R}}^4$). Пусть $A \in \text{end}_{\mathbf{Q}} H$, $h \in H$, и

$$Ah = (Ah)' + i(Ah)'' + j(Ah)''' + k(Ah)^{iv} \quad (2.5)$$

есть правильное разложение вектора Ah . В силу $\mathbf{Q}$ -правильности оператора A имеем равенство $Ah = Ah' + iAh'' + jAh''' + kAh^{iv}$. Внесем в правую часть этого равенства вместо Ah' , Ah'' , Ah''' и Ah^{iv} их правильные разложения, сгруппируем слагаемые так, чтобы получить правильное разложение вектора Ah и сравним это разложение с правильным разложением (2.5). В силу единственности правильного разложения, получим четыре равенства для векторов $(Ah)'$, $(Ah)''$, $(Ah)'''$, $(Ah)^{iv}$. С другой стороны, согласно равенству $\hat{A}h = \hat{A}h$ имеем другие четыре равенства типа (2.3) для тех же векторов. Приравняв правые части, получим четыре равенства, из которых, например, второе имеет вид

$$(Ah')'' + (Ah'')' + (Ah''')^{iv} - (Ah^{iv})''' = \hat{A}_{21}h' + \hat{A}_{22}h'' + \hat{A}_{23}h''' + \hat{A}_{24}h^{iv},$$

где $\hat{h} = (h', h'', h''', h^{iv})$ — произвольный вектор из $H_{\mathbf{R}}^4$. Беря поочередно вместо $\hat{h}$ векторы $(u, 0, 0, 0)$, $(0, u, 0, 0)$, $(0, 0, u, 0)$ и $(0, 0, 0, u)$, $u \in H_{\mathbf{R}}$, получим $\hat{A}_{21} = A''$, $\hat{A}_{22} = A'$, $\hat{A}_{23} = A^{iv}$, $\hat{A}_{24} = -A'''$, где $A'u = (Au)'$, ..., $A^{iv}u = (Au)^{iv}$. Остальные три равенства типа (2.3) таким же рассуждением приводят к равенствам: $\hat{A}_{11} = \hat{A}_{33} = \hat{A}_{44} = \hat{A}_{22} = A'$, $\hat{A}_{12} = -A''$, $\hat{A}_{13} = -A'''$, $\hat{A}_{14} = -A^{iv}$, $\hat{A}_{31} = A'''$, $\hat{A}_{32} = -A^{iv}$, $\hat{A}_{34} = A''$, $\hat{A}_{41} = A^{iv}$, $\hat{A}_{42} = A'''$, $\hat{A}_{43} = -A''$. Таким образом, (4×4) -операторная матрица $\|\hat{A}_{mn}\|$ определяется четырьмя операторами A', A'', A''', A^{iv} , действующими из $H_{\mathbf{R}}$ в $H_{\mathbf{R}}$.

Перейдем, наконец, к описанию $\mathbf{Q}$ -правильных операторов в $H_{\mathbf{C}}^2$. Любой оператор $\tilde{A} \in \text{end}_{\mathbf{C}} H_{\mathbf{C}}^2$ можно записать как (2×2) -матрицу $\|\tilde{A}_{mn}\|$ с элементами из $\text{end}_{\mathbf{C}} H_{\mathbf{C}}$. Равенство $jh = -h''' + ih^{iv} + jh' - kh''$ показывает, что $\tilde{j}h = (-h''' + ih^{iv}, h' - ih'')$, $h \in H$. Следовательно, оператор $\tilde{j}$, соответствующий оператору умножения слева на j в пространстве H , имеет вид

$$\tilde{j} = \begin{vmatrix} 0 & -\text{In} \\ \text{In} & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

где In обозначает введенный выше оператор комплексного сопряжения, $\text{In}(u) = \bar{u}$, $u \in H_{\mathbf{C}}$. Операторная матрица в $H_{\mathbf{R}}^2$, соответствующая этому оператору, имеет вид

$$\text{In} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $\tilde{j} \in \text{end}_{\mathbf{R}} H_{\mathbf{C}}^2$ (однако $\tilde{j}$ не является правильным оператором). Оператор $A \in \text{end}_{\mathbf{C}} H$ принадлежит множеству $\text{end}_{\mathbf{Q}} H$ в том и только том случае, если $Ajh = jAh$, $h \in H$. Поэтому равенства $(\tilde{A}\tilde{j})\tilde{h} = \tilde{A}j\tilde{h} = \tilde{A}\tilde{j}h$ и $(\tilde{j}\tilde{A})\tilde{h} = \tilde{j}\tilde{A}h = \tilde{j}Ah$ показывают, что $\mathbf{Q}$ -правильность оператора $\tilde{A}$ равносильна его коммутативности с оператором (2.6). А это условие, как легко видеть, равносильно тому, что $\tilde{A}_{22} = \text{In} \tilde{A}_{11} \text{In}$ и $\tilde{A}_{12} = -\text{In} \tilde{A}_{21} \text{In}$. Таким образом, $\mathbf{Q}$ -правильные операторы в $H_{\mathbf{C}}^2$ определяются двумя операторами из $\text{end}_{\mathbf{C}} H$, т.е. двумя $\mathbf{C}$ -правильными операторами из $\text{end}_{\mathbf{R}} H_{\mathbf{R}}^2$ (напомним, что такие операторы были изучены в [1]). Связь этих двух операторов с соответствующим оператором $A \in \text{end}_{\mathbf{Q}} H$ легко устанавливается с помощью рассуждений, аналогичных уже использованным для случая $\mathbf{Q}$ -правильных операторов в $H_{\mathbf{R}}^4$. Именно, имеем $\tilde{A}_{11} = A^{(1)}$, $\tilde{A}_{21} = A^{(2)}$, где $A^{(m)}u = (Au)^{(m)}$, $m = 1, 2$, $u \in H_{\mathbf{C}}$.

Полученные результаты можно подытожить в следующей теореме.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) Оператор $\hat{A} \in \text{end}_{\mathbf{R}} H_{\mathbf{R}}^4$ является $\mathbf{C}$ -правильным в том и только том случае, если он коммутирует с оператором $\hat{i}$, определенным матрицей в (2.4). Это условие эквивалентно тому, что операторная матрица $\hat{A} = \|\hat{A}_{mn}\|$ имеет вид

$$\|\hat{A}_{mn}\| = \begin{vmatrix} \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{21} & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{14} & \hat{A}_{13} \\ \hat{A}_{31} & -\hat{A}_{41} & \hat{A}_{33} & -\hat{A}_{43} \\ \hat{A}_{41} & \hat{A}_{31} & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Если эту матрицу записать как (2×2) -матрицу $\|\tilde{A}_{mn}\|$, то все матричные элементы $\tilde{A}_{mn}$ будут $\mathbf{C}$ -правильными операторами в $H_{\mathbf{R}}^2$, и это свойство характеризует $\mathbf{C}$ -правильные операторы в $H_{\mathbf{R}}^4$.

(2) Оператор $\hat{A} \in \text{end}_{\mathbf{R}} H_{\mathbf{R}}^4$ является $\mathbf{Q}$ -правильным в том и только том случае, если он коммутирует как с оператором $\hat{i}$, так и с $\hat{j}$. Это условие равносильно условию

$$\|\hat{A}_{mn}\| = \begin{vmatrix} A' & -A'' & -A''' & -A^{IV} \\ A'' & A' & A^{IV} & -A''' \\ A''' & -A^{IV} & A' & A'' \\ A^{IV} & A''' & -A'' & A' \end{vmatrix}, \quad (2.8)$$

где $A'u = (Au)'$, ..., $A^{IV}u = (Au)^{IV}$, $u \in H_{\mathbf{R}}$. Если эту матрицу записать как (2×2) -матрицу $\|\tilde{A}_{mn}\|$, то будем иметь $\tilde{A}_{22} = \text{In} \tilde{A}_{11} \text{In}$, $\tilde{A}_{12} = -\text{In} \tilde{A}_{21} \text{In}$, и это свойство, совместно с $\mathbf{C}$ -правильностью, характеризует $\mathbf{Q}$ -правильные операторы в $H_{\mathbf{R}}^4$.

(3) Оператор $\tilde{A} \in \text{end}_{\mathbf{C}} H_{\mathbf{C}}^2$ является $\mathbf{Q}$ -правильным в том и только том случае, если он коммутирует с оператором $\tilde{j}$, определенным

матрицей (2.6). Это условие равносильно тому, что

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & -\text{In} \tilde{A}_{21} \text{In} \\ \tilde{A}_{21} & \text{In} \tilde{A}_{11} \text{In} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

и $\tilde{A}_{11} = A^{(1)}$, $\tilde{A}_{21} = A^{(2)}$, где $A^{(m)}u = (Au)^{(m)}$, $u \in H_{\mathbb{C}}$, $m = 1, 2$. Поскольку $\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{21} \in \text{end}_{\mathbb{C}} H_{\mathbb{C}}$, они являются $\mathbb{C}$ -правильными операторами в $H_{\mathbb{R}}$. Поэтому если матрицу (2.9) записать как (4×4) -матрицу с элементами из $\text{end}_{\mathbb{R}} H_{\mathbb{R}}$, получим операторную матрицу $\mathbb{Q}$ -правильного вида (2.8), и это свойство характеризует $\mathbb{Q}$ -правильные операторы в $H_{\mathbb{C}}^2$.

3. Правильные случайные векторы

Будем считать заданным основное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Случайным вектором со значениями в кватернионном гильбертовом пространстве H естественно назвать функцию $\xi: \Omega \rightarrow H$, которая измерима относительно борелевской σ -алгебры в H и σ -алгебры $\mathcal{A}$. Это условие означает сильную измеримость. Ввиду сепарабельности H оно эквивалентно слабой измеримости (измеримости всех $(\xi | h)$, $h \in H$). Измеримость ξ , очевидно, равносильна тому, что каждая из четырех компонент в правильном разложении функции ξ измерима, т.е. есть случайный вектор со значениями в $H_{\mathbb{R}}$ (разложение функции называем правильным, если оно поточечно правильно). Всюду в настоящей работе рассматриваются только такие случайные векторы, которые имеют слабый второй порядок, т.е. такие, что $\mathbb{E}|(\xi | h)|^2 < \infty$ для всех $h \in H$ (символ $\mathbb{E}$, как обычно, обозначает интегрирование по мере $\mathbb{P}$). Это условие равносильно условию слабого второго порядка для всех четырех случайных векторов $\xi^I, \dots, \xi^{IV}$. Математическое ожидание случайного вектора ξ можно определить, как обычно, с помощью интеграла Петтиса, т.е. как такой элемент $\mathbb{E}\xi \in H$, который удовлетворяет равенству $(\mathbb{E}\xi | h) = \mathbb{E}(\xi | h)$, $h \in H$. Здесь и всюду ниже интеграл от кватернионнозначной функции $w: \Omega \rightarrow \mathbb{Q}$ понимается в следующем естественном смысле: $\mathbb{E}w = \mathbb{E}w' + i\mathbb{E}w'' + j\mathbb{E}w''' + k\mathbb{E}w^{IV}$. Легко показать, так же, как в комплексном случае (см. [1]), что $\widehat{\mathbb{E}\xi} = \mathbb{E}\widehat{\xi}$, и в этом смысле можно сказать, что относительно математического ожидания соответствие между пространствами H и $H_{\mathbb{R}}^4$ правильное. Относительно ковариационного оператора это не так.

Начнем с предварительных замечаний. Кватернионнозначная функция $\phi: H \times H \rightarrow \mathbb{Q}$ называется полуторалинейным функционалом (п-л-ф, для краткости), если ϕ аддитивна по обоим аргументам и удовлетворяет также следующему условию однородности:

$$\phi(\alpha h, \beta g) = \alpha \phi(h, g) \bar{\beta} \quad (3.1)$$

для всех кватернионов α, β и векторов $h, g \in H$. П-л-ф ϕ называется-

ся эрмитовым, если $\phi(h, g) = \overline{\phi(g, h)}$, $h, g \in H$. Пример эрмитового п-л-ф ϕ есть скалярное произведение. Квадратичным функционалом, соответствующим п-л-ф ϕ , называется функция $q_\phi: H \rightarrow \mathbb{Q}$, определяемая равенством $q_\phi(h) = \phi(h, h)$, $h \in H$. Эрмитовый п-л-ф однозначно восстанавливается своим квадратичным функционалом. В самом деле, как нетрудно проверить, $4\phi(h, g) = \sum_{n=0}^3 i_n [q_\phi(h + i_n g) - q_\phi(h - i_n g)]$. П-л-ф называется ограниченным, если $|\phi(h, g)| \leq C \|h\| \|g\|$ для всех $h, g \in H$ и некоторого $C > 0$. Оператор $A \in \text{end}_{\mathbb{Q}} H$ порождает ограниченный п-л-ф ϕ_A равенством $\phi_A(h, g) = (Ah | g)$. Имеет место следующее обратное утверждение.

Предложение 1. *Любой ограниченный п-л-ф ϕ порождает единственный оператор $A_\phi \in \text{end}_{\mathbb{Q}} H$, который удовлетворяет равенству $\phi(h, g) = (A_\phi h | g)$ для всех $h, g \in H$.*

Доказательство. Пусть ϕ — произвольный п-л-ф. Имеем, согласно (3.1), $\phi(h, \beta g) = \beta \phi(h, g)$, $\beta \in \mathbb{Q}$. Следовательно, функционал $l(g) = \phi(h, g)$, $g \in H$, линеен при любом фиксированном $h \in H$. Поэтому, учитывая также ограниченность l , по теореме Рисса получаем равенство $\phi(h, g) = (g | f_h)$, где f_h — некоторый однозначно определенный вектор из H , зависящий только от фиксированного значения $h \in H$. Поскольку скалярное произведение есть эрмитовый п-л-ф, последнее равенство дает соотношение $\phi(h, g) = (f_h | g)$, $h, g \in H$. Используя это соотношение и свойства функционала ϕ , легко показать стандартными рассуждениями, что оператор $A: H \rightarrow H$, определяемый соотношением $Ah = f_h$, $h \in H$, принадлежит $\text{end}_{\mathbb{Q}} H$.

Оператор A^* называется сопряженным к A , если $(Ah | g) = (h | A^*g)$ для всех пар $h, g \in H$. Если $A^* = A$, то оператор A называется самосопряженным или эрмитовым. Эрмитовость A равносильна эрмитовости ϕ_A . Оператор A называется положительным, если $(Ah | h) \geq 0$ для всех $h \in H$. Как в случае комплексных пространств, легко можно показать, что каждый положительный оператор A (даже каждый оператор $A \in \text{end}_{\mathbb{Q}} H$ со свойством $(Ah | h) \in \mathbb{R}$ для каждого $h \in H$) является эрмитовым.

Пусть ξ — случайный вектор в H . Равенством

$$k_\xi(h, g) = \mathbf{E}(h | \xi - \mathbf{E}\xi)(\xi - \mathbf{E}\xi | g), \quad h, g \in H,$$

определяется ограниченный п-л-ф k_ξ . Соответствующий ему, в силу предложения 1, линейный оператор в H обозначим через K_ξ и назовем ковариационным оператором случайного вектора ξ . Он является непрерывным, самосопряженным и положительным $\mathbb{Q}$ -линейным (следовательно, $\mathbb{Q}$ -правильным) оператором. Поскольку эрмитов п-л-ф однозначно восстанавливается своим квадратичным функционалом, определение K_ξ можно дать в виде

$$(K_\xi h | h) = \mathbf{E}|(\xi - \mathbf{E}\xi | h)|^2, \quad h \in H. \quad (3.2)$$

Согласно общему определению для вещественных пространств (см., например, [1], [2]), ковариационный оператор $K_{\hat{\xi}}$ случайного вектора $\hat{\xi}$ в $H_{\mathbf{R}}^4$ определяется равенством

$$\langle K_{\hat{\xi}} \hat{h} | \hat{h} \rangle = \mathbf{E}[(\hat{\xi} - \mathbf{E}\hat{\xi} | \hat{h})]^2, \quad \hat{h} \in H_{\mathbf{R}}^4. \quad (3.3)$$

Используя это определение и соотношение (2.1), легко получить следующее представление оператора $K_{\hat{\xi}}$:

$$K_{\hat{\xi}} = \begin{pmatrix} B_{\xi'} & T_{\xi'}^* \xi'' & T_{\xi'}^* \xi''' & T_{\xi'}^* \xi^{iv} \\ T_{\xi'} \xi'' & B_{\xi''} & T_{\xi''}^* \xi''' & T_{\xi''}^* \xi^{iv} \\ T_{\xi'} \xi''' & T_{\xi''} \xi''' & B_{\xi'''} & T_{\xi'''}^* \xi^{iv} \\ T_{\xi'} \xi^{iv} & T_{\xi''} \xi^{iv} & T_{\xi'''} \xi^{iv} & B_{\xi^{iv}} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где диагональные и недиагональные элементы равны, соответственно, ковариационным операторам и операторам взаимной ковариации случайных векторов, указанных в индексах (см. [1], [2]). $K_{\hat{\xi}}$ является непрерывным, $\mathbf{R}$ -однородным, самосопряженным и положительным оператором в $H_{\mathbf{R}}^4$. Однако свойством более сильной однородности (т.е. правильности) $K_{\hat{\xi}}$ может не обладать. Случайный вектор $\hat{\xi}$ назовем $\mathbf{Q}$ -правильным и $\mathbf{C}$ -правильным, если его ковариационный оператор $K_{\hat{\xi}}$ является $\mathbf{Q}$ -правильным или, соответственно, $\mathbf{C}$ -правильным оператором. Случайный вектор ξ в H назовем $\mathbf{Q}$ -правильным ($\mathbf{C}$ -правильным), если соответствующий ему случайный вектор $\hat{\xi}$ является $\mathbf{Q}$ -правильным ($\mathbf{C}$ -правильным).

Аналогичным образом можно ввести понятие $\mathbf{Q}$ -правильного случайного вектора $\tilde{\xi}$ в $H_{\mathbf{C}}^2$ и ξ в H . Для этого надо исходить из определения ковариационного оператора $K_{\tilde{\xi}}$ случайного вектора $\tilde{\xi} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$. В соответствии с общим определением в комплексном пространстве (см. [1], [2]), оно имеет вид:

$$\langle K_{\tilde{\xi}} \tilde{h} | \tilde{h} \rangle = \mathbf{E}|\langle \tilde{\xi} - \mathbf{E}\tilde{\xi} | \tilde{h} \rangle|^2, \quad \tilde{h} \in H_{\mathbf{C}}^2. \quad (3.5)$$

Теперь заметим, что $K_{\tilde{\xi}} \in \text{end}_{\mathbf{C}} H_{\mathbf{C}}^2$ и назовем $\tilde{\xi}$ $\mathbf{Q}$ -правильным в $H_{\mathbf{C}}^2$, если $K_{\tilde{\xi}}$ есть $\mathbf{Q}$ -правильный оператор. Далее, ξ назовем $\mathbf{Q}$ -правильным в H , если $\tilde{\xi}$ есть $\mathbf{Q}$ -правильный в $H_{\mathbf{C}}^2$. В силу факта, указанного в последней фразе утверждения (3) теоремы 1, это согласуется с данным уже названием $\mathbf{Q}$ -правильного случайного вектора в H .

В следующих двух теоремах даются основные свойства $\mathbf{Q}$ -правильных и $\mathbf{C}$ -правильных случайных векторов в $H_{\mathbf{R}}^4$ и H .

Для сокращения записи всюду ниже будем считать, что $\mathbf{E}\xi = 0$. Напомним, что всюду в работе предполагается, что случайные векторы имеют слабый второй порядок и гильбертовы пространства сепарабельны. Напомним также, что ξ обозначает случайный вектор со значениями

в кватернионном гильбертовом пространстве и $\hat{\xi}$ — соответствующий ему случайный вектор в вещественном гильбертовом пространстве $H_{\mathbf{R}}^4$.

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны и каждое из них означает $\mathbf{Q}$ -правильность $\hat{\xi}$ и ξ :

- (1) $K_{\hat{\xi}}$ есть $\mathbf{Q}$ -правильный оператор, т.е. принадлежит образу множества $\text{end}_{\mathbf{Q}} H$ при естественном вложении $\text{end}_{\mathbf{R}} H \rightarrow \text{end}_{\mathbf{R}} H_{\mathbf{R}}^4$;
- (2) $K_{\hat{\xi}}$ коммутирует с операторами $\hat{i}$ и $\hat{j}$ (см. (2.4));
- (3) Все диагональные элементы матрицы (3.4) оператора $K_{\hat{\xi}}$ являются равными между собой самосопряженными операторами, все недиагональные элементы представляют собой кососопряженные операторы ($T_{\xi' \xi''}^* = -T_{\xi' \xi''}$, ...), и справедливы равенства

$$T_{\xi'' \xi'''} = -T_{\xi' \xi''}, \quad T_{\xi'' \xi'''} = T_{\xi' \xi''}, \quad T_{\xi'' \xi'''} = -T_{\xi' \xi''};$$

- (4) $E[\text{Im}^{(m)}(\xi | h)]^2 = E[\text{Im}^{(n)}(\xi | h)]^2$ для всех $h \in H$ и $m, n = 0, 1, 2, 3$;

- (5) $E[\text{Im}^{(m)}(\xi | h) \text{Im}^{(n)}(\xi | h)] = 0$ для всех $h \in H$ и $m, n = 0, 1, 2, 3$, $m \neq n$;

- (6) $E(\xi | h)^2 = -2E[\text{Re}(\xi | h)]^2$ для всех $h \in H$;

- (7) $E(\xi | h)^2$ вещественно для всех $h \in H$;

- (8) $\hat{K}_{\xi} = 4K_{\hat{\xi}}$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений (1) и (2) была доказана при определении $\mathbf{Q}$ -правильного оператора. Если $K_{\hat{\xi}}$ есть $\mathbf{Q}$ -правильный оператор, он должен иметь вид (2.8) и сравнение формул (2.8) и (3.4) доказывает импликацию (2) $\Rightarrow$ (3) (самосопряженность диагональных элементов следует из того, что они являются ковариационными операторами). Обратное утверждение (3) $\Rightarrow$ (2) легко проверяется. Подставляя в скалярное произведение $(\xi | h)$ правильные разложения ξ и h ($\mathbf{R}$ -разложения) и совершая элементарные преобразования, получим правильное разложение кватерниона $(\xi | h)$ и, следовательно, выражения для $\text{Im}^{(n)}(\xi | h)$ для всех $n = 0, 1, 2, 3$. После этого утверждение (3) непосредственно приведет к равенствам в утверждении (4). Обратную импликацию, а также эквивалентность (4) и (5) легко показать прямым вычислением (каждое равенство (4) равносильно равенству (5) для той же пары (n, m)). В силу (5) $\Rightarrow$ (4), импликации (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) очевидны. Покажем (7) $\Rightarrow$ (5). Обозначим временно $(\xi | h)$ через ζ . Элементарное равенство

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \left[\sum_{n=0}^3 i_n \text{Im}^{(n)}(\zeta) \right]^2 = [\text{Re}(\zeta)]^2 - \sum_{n=1}^3 [\text{Im}^{(n)}(\zeta)]^2 \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^3 i_n \text{Re}(\zeta) \text{Im}^{(n)}(\zeta) \end{aligned}$$

показывает, что если условие (7) выполнено, то $\text{ERe}(\zeta)\text{Im}^{(n)}(\zeta) = 0$ для $n = 1, 2, 3$. Аналогичное рассуждение с заменой ζ на $i_m \zeta$ для $m = 1, 2, 3$ по очереди, показывает справедливость всех равенств в утверждении (5). Таким образом, утверждение (7) эквивалентно каждому из утверждений (1)–(6). Наконец, покажем $(4) \Rightarrow (8)$, и доказательство будет закончено, так как импликация $(8) \Rightarrow (1)$ очевидна. По формуле (1.5) имеем $|(\xi | h)|^2 = \sum_{n=0}^3 [\text{Im}^{(n)}(\xi | h)]^2$. Поэтому из утверждения (4) следует, согласно равенствам (3.2), (3.3) и $\text{Re}(\xi | h) = \langle \hat{\xi} | \hat{h} \rangle$, что

$$(K_{\xi} h | h) = 4\mathbb{E}[\text{Re}(\xi | h)]^2 = 4\langle K_{\hat{\xi}} \hat{h} | \hat{h} \rangle. \quad (3.6)$$

С другой стороны, если скалярное произведение $(h | g)$ вещественно, то $(h | g) = \langle \hat{h} | \hat{g} \rangle$. Поэтому

$$(K_{\xi} h | h) = \langle \widehat{K_{\xi} h} | \hat{h} \rangle = \langle \widehat{K_{\xi}} \hat{h} | \hat{h} \rangle,$$

и сравнение этого равенства с (3.6) доказывает импликацию $(4) \Rightarrow (8)$.

З а м е ч а н и е 1. Утверждения (6) и (7) показывают, что хотя разложение вектора зависит от базиса, $\mathbf{Q}$ -правильность случайного вектора есть свойство его распределения (в частности, слабых моментов второго порядка) и не зависит от базиса.

З а м е ч а н и е 2. В одномерном случае, когда $H = \mathbf{Q}_{\mathbf{Q}}$, имеем $H_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, и поэтому кососопряженность операторов взаимной ковариации означает, что они равны нулю. Следовательно, $\mathbf{Q}$ -правильность одномерных (скалярных) случайных величин означает попарную некоррелированность ее компонент и равенство их дисперсий. Далее, согласно утверждениям (4) или (5) теоремы 2, $\mathbf{Q}$ -правильность кватернионного случайного вектора ξ в общем (многомерном) случае означает его слабую $\mathbf{Q}$ -правильность, т.е. $\mathbf{Q}$ -правильность всех (кватернионных) случайных величин $(\xi | h)$, $h \in H$.

З а м е ч а н и е 3. Стоит отметить элементарные равенства $\text{Im}^{(n)}(\xi | h) = \langle \hat{\xi} | \hat{i}_n \hat{h} \rangle$, $n = 0, 1, 2, 3$. Их использование может упростить некоторые части доказательства.

Доказательство теоремы 2 было основано на утверждении (2) теоремы 1. Используя остальные два утверждения теоремы 1, можно получить характеристические свойства $\mathbf{C}$ -правильных случайных векторов в $H_{\mathbf{R}}^4$ и $\mathbf{Q}$ -правильных в $H_{\mathbf{C}}^2$. Мы приводим результат для $\mathbf{C}$ -правильных случайных векторов.

Теорема 3. Следующие утверждения эквивалентны и каждое из них означает $\mathbf{C}$ -правильность $\hat{\xi}$ и ξ :

- (1) $K_{\hat{\xi}}$ есть $\mathbf{C}$ -правильный оператор, т.е. принадлежит образу множества $\text{end}_{\mathbf{C}} H$ при естественном вложении $\text{end}_{\mathbf{R}} H \rightarrow \text{end}_{\mathbf{R}} H_{\mathbf{R}}^4$;
- (2) $K_{\hat{\xi}}$ коммутирует с оператором $\hat{i}$ (см. (2.4));

(3) Элементы матрицы (3.4) оператора K_{ξ} удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} B_{\xi'} &= B_{\xi''}, & B_{\xi'''} &= B_{\xi^{iv}}, \\ T_{\xi''\xi'} &= -T_{\xi'\xi''}, & T_{\xi^{iv}\xi'''} &= -T_{\xi'''\xi^{iv}}, \\ T_{\xi''\xi^{iv}} &= T_{\xi'\xi'''}, & T_{\xi''\xi'''} &= -T_{\xi'\xi^{iv}}; \end{aligned}$$

(4) $E[\operatorname{Im}^{(1)}(\xi | h)]^2 = E[\operatorname{Re}(\xi | h)]^2$ для любого $h \in H$;

(5) $E[\operatorname{Im}^{(3)}(\xi | h)]^2 = E[\operatorname{Im}^{(2)}(\xi | h)]^2$ для любого $h \in H$;

(6) $E[\operatorname{Im}^{(1)}(\xi | h) \operatorname{Re}(\xi | h)] = 0$ для любого $h \in H$;

(7) $E[\operatorname{Im}^{(3)}(\xi | h) \operatorname{Im}^{(2)}(\xi | h)] = 0$ для любого $h \in H$;

(8) $E[\tilde{\xi} | \tilde{h}]^2 = 0$ для любого $\tilde{h} \in H_{\mathbb{C}}^2$.

Доказательство можно провести прямыми вычислениями, используя в основном те же соображения, которые были использованы при доказательстве теоремы 2.

З а м е ч а н и е 1. Согласно любому из утверждений (4)–(7), $\mathbb{C}$ -правильность, как и $\mathbb{Q}$ -правильность, не зависит от выбора базиса в H .

З а м е ч а н и е 2. Используя утверждения (4)–(7), нетрудно показать, что $\mathbb{C}$ -правильность случайного вектора ξ означает его слабую $\mathbb{C}$ -правильность, т.е. $\mathbb{C}$ -правильность всех (кватернионных) случайных величин $(\xi | h)$, $h \in H$.

З а м е ч а н и е 3. Утверждение (3) теоремы 3 совместно с теоремой 2 работы [1] показывает, что $\mathbb{C}$ -правильность случайного вектора ξ в H равносильна совместной комплексной правильности пары случайных векторов $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ в $H_{\mathbb{C}}$.

В работе [1] совместная правильность пары комплексных случайных векторов (ξ, η) понималась, естественно, как правильность одного случайного вектора (ξ, η) в комплексном гильбертовом пространстве $H_{\mathbb{C}}^2$. Аналогичным образом, $\mathbb{Q}$ -правильность пары кватернионных случайных векторов ξ и η надо понимать как $\mathbb{Q}$ -правильность случайного вектора (ξ, η) в гильбертовой прямой сумме $H \oplus H = H^2$, так как это пространство, как и H , является сепарабельным кватернионным гильбертовым пространством. В следующих двух теоремах мы дадим условия $\mathbb{Q}$ - и $\mathbb{C}$ -правильности пары кватернионных случайных векторов ξ и η и условия некоррелированности компонент ξ и η вектора (ξ, η) . Напомним предварительно, что, согласно общему определению, гильбертовой прямой суммой H^2 называется векторное пространство всех пар (h, g) элементов из H с обычным (покоординатным) определением линейных операций и со скалярным произведением

$$\langle (h_1, g_1) | (h_2, g_2) \rangle = (h_1 | h_2) + (g_1 | g_2). \quad (3.7)$$

Отметим также, что, используя предложение 1, оператор взаимной ковариации $T_{\xi\eta}$ кватернионных случайных векторов ξ и η можно опре-

делить равенством (напомним, что мы полагаем $E\xi = E\eta = 0$)

$$(T_{\xi\eta}h | g) = E(h | \xi)(\eta | g), \quad h, g \in H. \quad (3.8)$$

Оператор взаимной ковариации для пары соответствующих случайных векторов $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ в $H_{\mathbf{R}}^4$, определяемый соотношением $\langle T_{\hat{\xi}\hat{\eta}}\hat{h} | \hat{g} \rangle = E(\hat{\xi} | \hat{h})(\hat{\eta} | \hat{g})$, можно задать в виде следующей операторной матрицы:

$$T_{\hat{\xi}\hat{\eta}} = \begin{vmatrix} T_{\xi'\eta'} & T_{\xi''\eta'} & T_{\xi'''\eta'} & T_{\xi^{iv}\eta'} \\ T_{\xi'\eta''} & T_{\xi''\eta''} & T_{\xi'''\eta''} & T_{\xi^{iv}\eta''} \\ T_{\xi'\eta'''} & T_{\xi''\eta'''} & T_{\xi'''\eta'''} & T_{\xi^{iv}\eta'''} \\ T_{\xi'\eta^{iv}} & T_{\xi''\eta^{iv}} & T_{\xi'''\eta^{iv}} & T_{\xi^{iv}\eta^{iv}} \end{vmatrix}, \quad (3.9)$$

элементы которой определяются как обычные операторы взаимной ковариации вещественных случайных векторов, указанных в их индексах (см. [1], [2]).

Теорема 4. Пусть (ξ, η) — случайный вектор со значениями в H^2 . Тогда:

I. (ξ, η) является $\mathbf{Q}$ -правильным в том и только том случае, если ξ и η суть $\mathbf{Q}$ -правильные случайные векторы в H и $T_{\hat{\xi}\hat{\eta}}$ — $\mathbf{Q}$ -правильный оператор в $H_{\mathbf{R}}^4$;

II. (ξ, η) является $\mathbf{C}$ -правильным в том и только том случае, если ξ и η суть $\mathbf{C}$ -правильные случайные векторы в H и $T_{\hat{\xi}\hat{\eta}}$ — $\mathbf{C}$ -правильный оператор в $H_{\mathbf{R}}^4$.

Доказательство. I. По утверждению (7) теоремы 2 и равенству (3.7), $\mathbf{Q}$ -правильность вектора (ξ, η) равносильна равенству

$$E\text{Im}^{(n)}[(\xi | h) + (\eta | g)]^2 = 0 \quad (3.10)$$

для всех $h, g \in H$ и $n = 1, 2, 3$. Беря пары $(h, 0)$ и $(0, h)$ для всех $h \in H$, из условия (3.10) получаем в силу того же утверждения теоремы 2, $\mathbf{Q}$ -правильность векторов ξ и η . В этом случае условие (3.10) равносильно следующему условию:

$$E\text{Im}^{(n)}[(\xi | h)(\eta | g) + (\eta | g)(\xi | h)] = 0$$

для всех $h, g \in H$ и $n = 1, 2, 3$. Представляя кватернионы $(\xi | h)$ и $(\eta | g)$ в виде линейных комбинаций (1.2) базисных кватернионов и совершая элементарные преобразования, получим эквивалентное условие

$$E[\text{Re}(\xi | h)\text{Im}^{(n)}(\eta | g) + \text{Im}^{(n)}(\xi | h)\text{Re}(\eta | g)] = 0 \quad (3.11)$$

для $h, g \in H$, $n = 1, 2, 3$. Пусть u и v — произвольные векторы пространства $H_{\mathbf{R}}$. Возьмем в качестве h и g векторы вида u, iu, ju, ku и v, iv, jv, kv и напомним условие (3.11) для различных пар (h, g) с такими h и g и для $n = 1, 2, 3$. Таким путем легко получить систему равенств для пар операторов взаимной ковариации, равносильную $\mathbf{Q}$ -правильности оператора $T_{\hat{\xi}\hat{\eta}}$. Это можно сделать по-разному, например,

так: (u, v) , $n = 1, 2, 3$; (u, iv) , $n = 1, 2, 3$; (iu, iv) , $n = 2, 3$; (ju, v) , $n = 2, 3$; (ju, jv) , $n = 1$; (ku, jv) , $n = 1$. Нетрудно проверить, что имеет место и обратное утверждение: если оператор $T_{\hat{\xi}\hat{\eta}}$ — $\mathbf{Q}$ -правильный, т.е. имеет вид (2.8), то выполнено условие (3.11). А это условие, как мы уже отметили, эквивалентно $\mathbf{Q}$ -правильности вектора (ξ, η) при дополнительном предположении $\mathbf{Q}$ -правильности компонент ξ и η .

II. Доказательство второй части проще. Нужно использовать один из критериев (4)–(7) для $\mathbf{C}$ -правильности вектора (ξ, η) , например (4). Учитывая очевидные равенства

$$\operatorname{Im}^{(n)} \langle (\xi, \eta) | (h, g) \rangle = \operatorname{Im}^{(n)} (\xi | h) + \operatorname{Im}^{(n)} (\eta | g), \quad n = 0, 1,$$

легко показать непосредственным вычислением, что равенство

$$\operatorname{Im}^{(1)} [(\xi | h) + (\eta | g)]^2 = \operatorname{Re} [(\xi | h) + (\eta | g)]^2$$

для всех пар h, g элементов из H равносильно $\mathbf{C}$ -правильности векторов ξ и η и оператора $T_{\hat{\xi}\hat{\eta}}$.

Теорема 5. Для некоррелированности компонент ξ и η случайного вектора (ξ, η) со значениями в H^2 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} T_{\xi' \eta'} + T_{\xi'' \eta''} + T_{\xi''' \eta'''} + T_{\xi^{iv} \eta^{iv}} &= 0, \\ T_{\xi' \eta''} - T_{\xi'' \eta'} &= T_{\xi''' \eta^{iv}} - T_{\xi^{iv} \eta'''}, \\ T_{\xi' \eta'''} - T_{\xi''' \eta'} &= T_{\xi^{iv} \eta''} - T_{\xi'' \eta^{iv}}, \\ T_{\xi' \eta^{iv}} - T_{\xi^{iv} \eta'} &= T_{\xi'' \eta'''} - T_{\xi''' \eta''}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Доказательство. Надо показать, что условия (3.12) эквивалентны условию $(T_{\xi\eta} h | g) = 0$ для всех h, g из H . Это условие, в силу аддитивности функционала (3.8) по обоим аргументам, будет выполнено, если (и только если) $(T_{\xi\eta} i_n u | i_m v) = 0$ для всех $u, v \in H_{\mathbf{R}}$ и $m, n = 0, 1, 2, 3$. Очевидно, что аддитивный функционал (3.8) является также и п-л-ф и, стало быть, соотношения (3.1) выполнены для него. Следовательно, поскольку тело кватернионов не имеет делителей нуля, вместо шестнадцати условий для $m, n = 0, 1, 2, 3$ достаточно обеспечить только одно из них для $m = n = 0$, именно, $(T_{\xi\eta} u | v) = 0$ для всех $u, v \in H_{\mathbf{R}}$. Если теперь мы воспользуемся соотношением (3.8) и напишем условие равенства нулю вещественной и всех трех мнимых частей кватерниона $(T_{\xi\eta} u | v)$, получим как раз четыре равенства (3.12).

Теорема 5 показывает, что некоррелированность кватернионных случайных векторов ξ и η (т.е. условие $T_{\xi\eta} = 0$), вообще говоря, не является достаточным условием для некоррелированности соответствующих вещественных случайных векторов $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ (т.е. для условия $T_{\hat{\xi}\hat{\eta}} = 0$). Однако очевидно, что если оператор (3.9) является $\mathbf{Q}$ -правильным, то условия (3.12) влекут условие $T_{\hat{\xi}\hat{\eta}} = 0$. Поэтому формулируемое ниже утверждение есть следствие двух предыдущих теорем.

Теорема 6. Если случайный вектор (ξ, η) является $\mathbf{Q}$ -правильным, то условия $T_{\xi\eta} = 0$ и $T_{\widehat{\xi}\widehat{\eta}} = 0$ равносильны.

З а м е ч а н и е. Существуют даже $\mathbf{Q}$ -правильные случайные векторы ξ и η , для которых $T_{\xi\eta} = 0$, но $T_{\widehat{\xi}\widehat{\eta}} \neq 0$ (простой пример, который мы сейчас предлагаем, показывает несколько больше: вектор (ξ, η) не только имеет $\mathbf{Q}$ -правильные компоненты, но и сам является $\mathbf{C}$ -правильным). Пусть $\xi = (\xi', \xi'', \xi''', \xi^{IV})$ и $\eta = (\xi'', -\xi', \xi^{IV}, -\xi''')$, где $\xi', \xi'', \xi''', \xi^{IV}$ взаимно независимы и имеют одинаковые дисперсии. Все требуемые свойства легко можно проверить.

4. Гауссовские случайные векторы

Характеристическую функцию кватернионной случайной величины ζ и характеристический функционал кватернионного случайного вектора ξ со значениями в H естественно определить, соответственно, равенствами

$$\chi_{\zeta}(q) = \mathbf{E}e^{i\operatorname{Re}\zeta\bar{q}}, \quad q \in \mathbf{Q}, \quad (4.1)$$

$$\chi_{\xi}(h) = \mathbf{E}e^{i\operatorname{Re}(\xi|h)}, \quad h \in H. \quad (4.2)$$

Напомним, что, согласно общим определениям для вещественных и комплексных пространств, справедливы также равенства $\chi_{\widehat{\xi}}(\widehat{h}) = \mathbf{E}e^{i\langle \widehat{\xi} | \widehat{h} \rangle}$ и $\chi_{\widetilde{\xi}}(\widetilde{h}) = \mathbf{E}e^{i\operatorname{Re}(\widetilde{\xi}|\widetilde{h})}$. Очевидные равенства $\operatorname{Re}(\xi|h) = \operatorname{Re}(\widehat{\xi}|\widehat{h}) = \langle \widehat{\xi} | \widehat{h} \rangle$ для любого $h \in H$ показывают, что

$$\chi_{\xi}(h) = \chi_{\widehat{\xi}}(\widehat{h}), \quad \chi_{\widetilde{\xi}}(\widetilde{h}) = \chi_{\widehat{\xi}}(\widehat{h}), \quad h \in H. \quad (4.3)$$

Отметим также — как следствие равенств (4.1) и (4.2), равенство

$$\chi_{(\xi|h)}(q) = \chi_{\xi}(hq), \quad q \in \mathbf{Q}, \quad h \in H. \quad (4.4)$$

Из определения ковариационного оператора непосредственно следует, что если A — линейное непрерывное отображение из H в H и K_{ξ} — ковариационный оператор вектора ξ со значениями в H , то $K_{A\xi} = AK_{\xi}A^*$. Кроме того, $\widehat{i_1}\widehat{i_1}^* = 1$. Поэтому $K_{\widehat{i_1}\xi} = K_{\widehat{i_1}\xi} = \widehat{i_1}K_{\xi}\widehat{i_1}^*$, и теорема 2 показывает, что если ξ — $\mathbf{Q}$ -правильный случайный вектор, то таким же является случайный вектор $i_1\xi$. На самом деле, это рассуждение легко приводит к следующему более общему результату.

Предложение 2. Если один из восьми случайных векторов $\pm i_n\xi$ ($n = 0, 1, 2, 3$) является $\mathbf{Q}$ -правильным, то остальные тоже $\mathbf{Q}$ -правильны и все восемь имеют один и тот же ковариационный оператор.

Случайный вектор ξ назовем $\mathbf{Q}$ -симметричным, если все $\pm i_n\xi$ имеют одно и то же распределение, т.е. если $\chi_{\pm i_n\xi} = \chi_{\xi}$ для $n = 1, 2, 3$ (достаточно, очевидно, потребовать $\chi_{i_1\xi} = \chi_{\xi}$ и $\chi_{i_2\xi} = \chi_{\xi}$). $\mathbf{Q}$ -симметричный случайный вектор со слабым вторым порядком является $\mathbf{Q}$ -правильным

вектором и, как легко видеть, имеет нулевое математическое ожидание. Равенство (4.4) показывает, что $\mathbf{Q}$ -симметричность случайного вектора ξ означает его слабую $\mathbf{Q}$ -симметричность, т.е. $\mathbf{Q}$ -симметричность $(\xi | h)$ при всех $h \in H$. Аналогичным образом можно ввести и понятия $\mathbf{C}$ -симметричных и $\mathbf{R}$ -симметричных случайных векторов (требованием инвариантности распределения относительно умножения на i_1 и на -1 соответственно).

Переходим к определению гауссовского случайного вектора. Общая часть определения не зависит от кватернионной структуры пространства и есть типичное определение в слабом смысле: случайный вектор ξ называем гауссовским, если для произвольного $h \in H$ случайная величина $(\xi | h)$ есть гауссовская. Однако гауссовость кватернионной случайной величины ζ можно определить по-разному. Вещественная случайная величина ζ называется гауссовской, если $\chi_\zeta(t) = \exp\{-\frac{1}{2}t^2 \mathbf{E}(\zeta - \mathbf{E}\zeta)^2\}$, $t \in \mathbf{R}$. В комплексном случае естественно заменить $t^2 \mathbf{E}(\zeta - \mathbf{E}\zeta)^2$ на $|z|^2 \mathbf{E}|\zeta - \mathbf{E}\zeta|^2$, $z \in \mathbf{C}$. Следуя этой аналогии, мы придем к определению в узком смысле, в котором, как легко видеть, компоненты ζ' и ζ'' в правильном разложении (т.е. вещественная и мнимая части ζ) являются независимыми гауссовскими случайными величинами с одинаковыми дисперсиями. Можно дать и широкое определение, в котором просто требуется совместная гауссовость ζ' и ζ'' . В кватернионном случае определение можно дать в трех разных уровнях: $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{Q}$. Наиболее низкий уровень (широкое определение) получим, если потребовать только, чтобы четырехмерный вещественный случайный вектор $\hat{\zeta} = (\zeta', \zeta'', \zeta''', \zeta''')$ был гауссовским. Это есть $\mathbf{R}$ -гауссовость. Промежуточный уровень получится, если двумерный комплексный случайный вектор $\tilde{\zeta} = (\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$, $\zeta^{(1)} = \zeta' + i\zeta''$, $\zeta^{(2)} = \zeta''' + i\zeta''''$ есть гауссовский в узком смысле (см. [1]). Это есть $\mathbf{C}$ -гауссовость. Наиболее высокий уровень (узкое определение) есть $\mathbf{Q}$ -гауссовость. В этом определении предполагается $\mathbf{R}$ -гауссовость и дополнительно требуется попарная независимость $\zeta', \zeta'', \zeta''', \zeta''''$ и равенство их дисперсий. Формальной мотивацией для такого определения служит прямая аналогия с вещественным и комплексным случаями (если в последнем случае иметь в виду узкое определение).

Предложение 3. Кватернионная случайная величина ζ является $\mathbf{Q}$ -гауссовской в том и только том случае, если

$$\chi_\zeta(q) = \exp\left\{-\frac{1}{8}|q|^2 \mathbf{E}|\zeta - \mathbf{E}\zeta|^2\right\}, \quad q \in \mathbf{Q}. \quad (4.5)$$

Доказательство совсем просто, и мы его опускаем. Отметим только, что множитель $\frac{1}{8}$ вместо обычного множителя $\frac{1}{2}$ в показателе в (4.5) объясняется тем, что для $\mathbf{Q}$ -гауссовской случайной величины ζ имеем $\mathbf{E}|\zeta - \mathbf{E}\zeta|^2 = 4\sigma^2$, где σ^2 — общее значение дисперсий компонент ζ .

Переходим к случайным векторам. Напомним, что случайный век-

тор ξ со значениями в H был назван $\mathbf{R}$ -, $\mathbf{C}$ - или $\mathbf{Q}$ -гауссовским, если любой линейный непрерывный функционал $(\xi | h)$ от ξ является гауссовской случайной величиной в соответствующем смысле.

Теорема 7. Пусть ξ — случайный вектор со значениями в ква-тернионном гильбертовом пространстве H , ξ и $\tilde{\xi}$ — соответствующие ему случайные векторы в $H_{\mathbf{R}}^4$ и $H_{\mathbf{C}}^2$ соответственно, т.е. $\tilde{\xi} = (\xi', \xi'', \xi''', \xi^{iv})$ и $\tilde{\xi} = (\xi' + i\xi'', \xi''' + i\xi^{iv})$. Тогда

(1) ξ является $\mathbf{R}$ -гауссовским в том и только том случае, если $\tilde{\xi}$ есть гауссовский случайный вектор в $H_{\mathbf{R}}^4$. В этом (и только этом) случае

$$\chi_{\xi}(h) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle K_{\tilde{\xi}} \hat{h} | \hat{h} \rangle \right\}, \quad h \in H, \quad \hat{h} \in H_{\mathbf{R}}^4, \quad (4.6)$$

где $K_{\tilde{\xi}}$ определяется равенством (3.3);

(2) ξ является $\mathbf{C}$ -гауссовским в том и только том случае, если $\tilde{\xi}$ есть гауссовский в узком смысле случайный вектор в $H_{\mathbf{C}}^2$. В этом (и только этом) случае

$$\chi_{\xi}(h) = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \langle K_{\tilde{\xi}} \tilde{h} | \tilde{h} \rangle \right\}, \quad h \in H, \quad \tilde{h} \in H_{\mathbf{C}}^2, \quad (4.7)$$

где $K_{\tilde{\xi}}$ определяется равенством (3.5);

(3) ξ является $\mathbf{Q}$ -гауссовским в том и только том случае, если

$$\chi_{\xi}(h) = \exp \left\{ -\frac{1}{8} \langle K_{\xi} h | h \rangle \right\}, \quad h \in H, \quad (4.8)$$

где K_{ξ} определяется равенством (3.2);

(4) $\mathbf{C}$ -гауссовский случайный вектор является $\mathbf{R}$ -гауссовским и $\mathbf{C}$ -правильным; обратно, $\mathbf{R}$ -гауссовский $\mathbf{C}$ -правильный случайный вектор является $\mathbf{C}$ -гауссовским;

(5) $\mathbf{Q}$ -гауссовский случайный вектор является $\mathbf{C}$ -гауссовским и $\mathbf{Q}$ -правильным; обратно, $\mathbf{C}$ -гауссовский (даже $\mathbf{R}$ -гауссовский) $\mathbf{Q}$ -правильный случайный вектор является $\mathbf{Q}$ -гауссовским.

Доказательство. Напомним, что всюду в этой работе обозначения векторов пространств H , $H_{\mathbf{R}}^4$ и $H_{\mathbf{C}}^2$ согласованы между собой: если задан $h \in H$, то $\hat{h} = (h', h'', h''', h^{iv})$ и $\tilde{h} = (h^{(1)}, h^{(2)})$, где $h^{(1)} = h' + ih''$, $h^{(2)} = h''' + ih^{iv}$; или если задан, например, $(h^{(1)}, h^{(2)}) \in H_{\mathbf{C}}^2$, то $\hat{h} = (h^{(1)'}, h^{(1)''}, h^{(2)'}, h^{(2)''})$ и $h = h^{(1)'} + ih^{(1)''} + jh^{(2)'} + kh^{(2)''}$. Начнем с доказательства утверждения (1). Пусть $\tilde{\xi}$ есть гауссовский случайный вектор в $H_{\mathbf{R}}^4$, т.е. $\langle \tilde{\xi} | \hat{h} \rangle$ есть гауссовская случайная величина для каждого $\hat{h} \in H_{\mathbf{R}}^4$. Покажем, что $(\xi | g)$ есть $\mathbf{R}$ -гауссовская случайная величина для произвольного фиксированного $g \in H$. Для этого надо показать, что $\zeta := \sum_{n=0}^3 t_n \text{Im}^{(n)}(\xi | g)$ есть (вещественная) гауссовская случайная величина при любом выборе вещественных коэффициентов

$t_0, \dots, t_3$. Нетрудно проверить прямым вычислением, что имеет место равенство $\zeta = \langle \hat{\xi} | \hat{h} \rangle$, где $\hat{h} = \hat{A}\hat{g}$ и $\hat{A} = \sum_{n=0}^3 t_n \hat{i}_n$, $\hat{i}_1$ и $\hat{i}_2$ заданы равенствами (2.4), а $\hat{i}_3 = \hat{i}_1 \hat{i}_2$. Следовательно, ξ имеет $\mathbf{R}$ -гауссовское распределение, так как $\hat{\xi}$ есть гауссовский случайный вектор по нашему допущению. Обратно, если ξ есть $\mathbf{R}$ -гауссовский случайный вектор, то $\langle \xi | h \rangle$ есть гауссовская случайная величина для каждого $h \in H$, и поэтому равенство $\langle \hat{\xi} | \hat{h} \rangle = \text{Re}(\xi | h)$ показывает, что $\hat{\xi}$ есть гауссовский случайный вектор в $H_{\mathbf{R}}^4$. Первое равенство в (4.3) показывает, согласно соотношению (3.3), что в этом (и только этом) случае справедливо равенство (4.6).

Теперь докажем утверждение (2). Пусть $\tilde{\xi} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ есть гауссовский в узком смысле случайный вектор в $H_{\mathbf{C}}^2$, т.е. $\langle \tilde{\xi} | \tilde{h} \rangle$ есть гауссовская случайная величина в узком смысле для каждого $\tilde{h} = (h^{(1)}, h^{(2)}) \in H_{\mathbf{C}}^2$. Мы хотим показать, что ξ является $\mathbf{C}$ -гауссовским случайным вектором, т.е. для произвольного $g \in H$ двумерный комплексный случайный вектор $\tilde{\zeta} = (\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$, $\zeta = (\xi | g)$, является гауссовским в узком смысле, или, эквивалентно, случайная величина $z\zeta^{(1)} + w\zeta^{(2)}$ является гауссовской в узком смысле для любого выбора комплексных чисел z и w . Несложным вычислением можно проверить, что справедливо равенство $z\zeta^{(1)} + w\zeta^{(2)} = \langle \tilde{\xi} | \tilde{h} \rangle$, где $\tilde{h} = \tilde{A}\tilde{g}$, $\tilde{A} = \bar{z}1 + \bar{w}\tilde{j}$, 1 и $\tilde{j}$ обозначают, как и выше, единичный оператор и оператор с матрицей (2.6). Это доказывает прямую часть утверждения (2). Обратная часть проще. Мы должны показать, что $\langle \tilde{\xi} | \tilde{h} \rangle$, $\tilde{h} \in H_{\mathbf{C}}^2$, есть гауссовская в узком смысле случайная величина, если ξ есть $\mathbf{C}$ -гауссовский случайный вектор. А это есть простое следствие того легко проверяемого факта, что $\langle \tilde{\xi} | \tilde{h} \rangle = \text{Re}(\xi | h) + i \text{Im}^{(1)}(\xi | h) = \zeta^{(1)}$, где $\zeta = (\xi | h)$. Равенство (4.7) следует из вида характеристического функционала гауссовского в узком смысле случайного вектора в комплексном пространстве (см. утверждение (2) теоремы 6 в [1]) с учетом того, что, согласно (4.3), $\chi_{\xi}(h) = \chi_{\tilde{\xi}}(\tilde{h})$.

Утверждение (3) легко следует из соотношения (4.4), предложения 3 и формулы (3.2).

В силу указанного равенства

$$\langle \tilde{\xi} | \tilde{h} \rangle = \text{Re}(\xi | h) + i \text{Im}^{(1)}(\xi | h)$$

и утверждения (4) теоремы 3, имеем равенство

$$\langle K_{\tilde{\xi}} \tilde{h} | \tilde{h} \rangle = 2 \langle K_{\xi} \hat{h} | \hat{h} \rangle \quad \text{для всех } h \in H, \quad (4.9)$$

где оператор $K_{\tilde{\xi}}$, соответствующий оператору K_{ξ} , есть тот же оператор K_{ξ} , записанный как (4×4) -операторная матрица и поэтому является $\mathbf{C}$ -правильным (поскольку K_{ξ} — как обычный линейный оператор в комплексном пространстве — коммутирует с умножением на i). Обратно,

из равенства (4.9) легко следует $\mathbf{C}$ -правильность оператора $K_{\hat{\xi}}$. Таким образом, форму $\langle K_{\hat{\xi}} \hat{h} | \hat{h} \rangle$ можно записать в виде $\frac{1}{2} \langle K_{\hat{\xi}} \tilde{h} | \tilde{h} \rangle$ только в том случае, если $K_{\hat{\xi}}$ есть $\mathbf{C}$ -правильный оператор. Это рассуждение вместе с утверждением (2) и вторым равенством в (4.3) заканчивает доказательство утверждения (4). Утверждение (5) можно доказать аналогичным образом.

Утверждение (3) доказанной теоремы показывает, что случайный вектор (ξ, η) в гильбертовой прямой сумме H^2 будет $\mathbf{Q}$ -гауссовским в том и только том случае, если его характеристический функционал имеет вид

$$\chi_{(\xi, \eta)}(h, g) = \exp \left\{ -\frac{1}{8} [(K_{\xi} h | h) + (K_{\eta} h | h) + 2 \operatorname{Re}(T_{\xi\eta} h | g)] \right\},$$

где $T_{\xi\eta}$ — оператор взаимной ковариации, определенный соотношением (3.8). Из этого представления $\chi_{(\xi, \eta)}$ сразу следует, что компоненты ξ и η $\mathbf{Q}$ -гауссовского случайного вектора (ξ, η) независимы, если (и только если) они некоррелированы, т.е. $T_{\xi\eta} = 0$. Это свойство можно считать неформальной мотивацией $\mathbf{Q}$ -определения в следующем естественном смысле: оно неверно даже в том случае, когда (ξ, η) есть $\mathbf{C}$ -гауссовский случайный вектор, имеющий $\mathbf{Q}$ -гауссовские компоненты ξ и η . Чтобы в этом убедиться, достаточно взять пример из замечания к теореме 6, предполагая дополнительно, что ξ в этом примере есть $\mathbf{R}$ -гауссовский случайный вектор. Действительно, $\mathbf{Q}$ -гауссовость ξ и η очевидна, а $\mathbf{C}$ -гауссовость вектора (ξ, η) следует из утверждения (4) теоремы 7 и второй части теоремы 4.

Другое неформальное соображение в пользу $\mathbf{Q}$ -определения связано со свойством 2-устойчивости, характеризующей $\mathbf{Q}$ -гауссовские случайные величины. Однако в настоящей работе этот вопрос мы не рассматриваем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вазания Н. Н., Кандаваки Н. П. Случайные векторы со значениями в комплексных гильбертовых пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 31–52.
2. Вазания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 386 с.

Поступила в редакцию
29.X.1996