Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Масол, Теорема о предельном распределении числа ложных решений системы нелинейных случайных булевых уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 41–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp822>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:01:02

© 1998 г.

МАСОЛ В. И.*

**ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ
ЧИСЛА ЛОЖНЫХ РЕШЕНИЙ
СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ
БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ**

Доказана теорема о пуассоновском с параметром 2^m предельном ($n \rightarrow \infty$) распределении числа ложных решений заведомо совместной системы нелинейных случайных булевых уравнений со стохастически независимыми коэффициентами. Среди предположений теоремы, в частности, следующие: распределения коэффициентов изменяются в некоторой окрестности точки $\frac{1}{2}$; число n неизвестных и число N уравнений системы отличаются на константу m при $n \rightarrow \infty$; система имеет решение с числом единиц $\rho(n)$, $\rho(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова и фразы: число ложных решений, распределение Пуассона, нелинейные случайные булевы уравнения.

1. Постановка задачи. Формулировка теоремы. Рассмотрим над полем $GF(2)$ систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{g_i(n)} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1 \dots j_k}^{(i)} x_{j_1} \cdots x_{j_k} = b_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.1)$$

удовлетворяющую следующему условию (A).

У с л о в и е (A). 1) Коэффициенты $a_{j_1 \dots j_k}^{(i)}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, $k = 1, \dots, g_i(n)$, $i = 1, \dots, N$, есть независимые случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью $P\{a_{j_1 \dots j_k}^{(i)} = 1\} = p_{ik}$ и значение 0 с вероятностью $P\{a_{j_1 \dots j_k}^{(i)} = 0\} = 1 - p_{ik}$.

2) Элементы b_i , $i = 1, \dots, N$ представляют собой результат подстановки в левую часть системы (1.1) фиксированного n -мерного вектора $\bar{x}^0$, имеющего $\rho(n)$ ($n - \rho(n)$) компонент, равных единице (нулю).

3) Функции $g_i(n)$, $i = 1, \dots, N$, — неслучайные, $g_i(n) \in \{2, \dots, n\}$, $i = 1, \dots, N$.

Обзор результатов для линейного ($g_i(n) \equiv 1$, $i = 1, \dots, N$) варианта (1.1) дан в [1]. В работах [2], [3] изучено распределение числа реше-

*Киевский университет им. Т. Шевченко, мех.-матем. ф-т, кафедра теории вероятн. и матем. статистики, ул. Владимирская, 64, 252601 Киев, Украина.

ний системы (1.1) при специальных ограничениях на индексы $1, \dots, n$ неизвестных $x_1, \dots, x_n$.

Обозначим через ν_n число ложных решений (1.1), т.е. число решений системы (1.1), отличных от $\bar{x}^0$.

Теорема. Пусть выполняются условия (A),

$$n - N = m, \quad n \rightarrow \infty, \quad m = \text{const}, \quad -\infty < m < \infty; \quad (1.2)$$

для произвольного i , $i = 1, \dots, N$, существует такое множество T_i , что при $n \rightarrow \infty$

$$T_i \subseteq \{2, \dots, g_i(n)\}, \quad T_i \neq \emptyset; \quad (1.3)$$

$$\delta_{it}(n) \leq p_{it} \leq 1 - \delta_{it}(n), \quad t \in T_i, \quad i = 1, \dots, N; \quad (1.4)$$

найдется функция $\varphi(n)$, $\varphi(n) \leq n$, при которой

$$\sum_{i=1}^N \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_{f(n)}^t \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

где $f(n)$ принимает целые положительные значения, $f(n) = o(\varphi(n))$, $n \rightarrow \infty$, и существует такое ε_0 , $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, что для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\sum_{t=1}^{[\varepsilon \varphi(n)]} C_{it(n)}^t \leq \exp \{ (\sigma(\varepsilon) + o(1)) \rho(n) \}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

$t(n) \in \{\rho(n), n - \rho(n)\}$, $\sigma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда для $k = 0, 1, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\nu_n = k\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad (1.7)$$

где $\lambda = 2^m$.

Сформулированная теорема анонсирована в [4]. Там же приведены условия, достаточные для выполнения (1.3)–(1.6).

2. Вспомогательные утверждения. Пусть W — совокупность всех непустых подмножеств множества Ω , мощность которого равняется $|\Omega| = k$, $1 \leq k < \infty$. Определим два подмножества W_Δ и I_s множества W :

$$W_\Delta \subseteq W, \quad W_\Delta = \{\omega_1, \dots, \omega_\Delta\}, \quad |W_\Delta| = \Delta, \quad \Delta \geq 1, \quad \omega_i \neq \omega_j$$

для $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, \Delta\}$;

$$I_s \subseteq W, \quad I_s = \{m_1, \dots, m_s\}, \quad |I_s| = s, \quad s \geq 0, \quad m_i \neq m_j$$

для $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, s\}$.

Утверждение 2.1. Пусть

$$|m_i \cap m_j| \equiv 0 \pmod{2}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, \Delta; \quad (2.1)$$

$$\Delta \in [2^{r-1}, 2^r - 1], \quad 1 \leq r \leq k. \quad (2.2)$$

Тогда

$$s \leq 2^{k-r} - 1. \quad (2.3)$$

Доказательство. Если $s = 0$, то, очевидно, (2.3) выполняется. Пусть $s > 0$. Обозначим $L_{\alpha_1, \dots, \alpha_z}$ совокупность всех элементов, принадлежащих $\omega_{\alpha_1}, \dots, \omega_{\alpha_z}$, $|L_{\alpha_1, \dots, \alpha_z}| = l_{\alpha_1, \dots, \alpha_z}$, где $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_z \leq \Delta$, $z = 1, \dots, \Delta$. Обозначим φ общее количество положительных (непустых) элементов множества $\{l_{\alpha_1, \dots, \alpha_z}: 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_z \leq \Delta, z = 1, \dots, \Delta\}$ ($\{L_{\alpha_1, \dots, \alpha_z}: 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_z \leq \Delta, z = 1, \dots, \Delta\}$).

Определим вектор $\bar{x}(v)$, $\bar{x}(v) = \{x_1(v), \dots, x_\varphi(v)\}$, $v \in W$, следующим правилом (II):

$$x_t(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } |v \cap L_{k_t}| \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0, & \text{если } |v \cap L_{k_t}| \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases} \quad t = 1, \dots, \varphi,$$

где k_t , $t = 1, \dots, \varphi$, — попарно различные элементы множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_z\}: 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_z \leq \Delta$, $z = 1, \dots, \Delta$, каждому из которых соответствует положительное (непустое) l_{k_t} (L_{k_t}).

С помощью правила (II) для произвольного $\tilde{m}$, $\tilde{m} \in I_s$, можно построить вектор $\bar{x}(\tilde{m})$, который является решением однородной системы линейных уравнений

$$\sum_{t=1}^{\varphi} a_q^{(t)} x_t = 0, \quad q = 1, \dots, \Delta, \quad (2.4)$$

над полем $\text{GF}(2)$, где коэффициент $a_q^{(t)} = \{1, \text{если } q \in k_t; 0, \text{если } q \notin k_t\}$, $t = 1, \dots, \varphi$, $q = 1, \dots, \Delta$. (В дальнейшем матрицу A , $A = \|a_q^{(t)}\|_{q=1, \dots, \Delta}^{t=1, \dots, \varphi}$, будем называть матрицей, построенной на множестве W_Δ .) В самом деле, из включения $\tilde{m} \in I_s$ следует, в силу (2.1), что $|\tilde{m} \cap \omega_j| \equiv 0 \pmod{2}$, $j = 1, \dots, \Delta$, но $\omega_j = \bigcup_{t=1}^{\varphi} L_{k_t}^{(j)}$, где $L_{k_t}^{(j)} = \{L_{k_t}, \text{если } a_j^{(t)} = 1; \emptyset, \text{если } a_j^{(t)} = 0\}$, значит,

$$|\tilde{m} \cap \omega_j| = \sum_{t=1}^{\varphi} |\tilde{m} \cap L_{k_t}^{(j)}|, \quad j = 1, \dots, \Delta,$$

поэтому $a_j^{(1)} x_1(\tilde{m}) \oplus \dots \oplus a_j^{(\varphi)} x_\varphi(\tilde{m}) = 0$, $j = 1, \dots, \Delta$, где символ $\oplus$ обозначает сложение по модулю 2.

Для совокупности всех элементов множества I_s , соответствующих построенному с помощью правила (II) решению $\bar{x}(\tilde{m})$ системы (2.4), где $\tilde{m} \in I_s$, примем запись $M(\tilde{m})$, т.е. $M(\tilde{m}) \subseteq I_s$, $M(\tilde{m}) = \{v_1, \dots, v_\mu\}$, $v_i \neq v_j$ для $i, j \in \{1, \dots, \mu\}$, $i \neq j$, $\bar{x}(v_t) = \bar{x}(\tilde{m})$ для $t = 1, \dots, \mu$, $\bar{x}(v) \neq \bar{x}(\tilde{m})$ для $v \in I_s \setminus M(\tilde{m})$. Пусть вектор $\bar{x}(\tilde{m})$ содержит κ , $0 \leq \kappa \leq \varphi$, единичных компонент, расположенных на местах с номерами $i_1, \dots, i_\kappa$, и $\varphi - \kappa$ нулевых компонент, расположенных на местах с номерами $j_1, \dots, j_{\varphi-\kappa}$.

Тогда, очевидно, мощность μ множества $M(\tilde{m})$ удовлетворяет неравенству

$$\mu \leq 2^{k-s_1+s_2+s_3} - \chi\{\kappa = 0\}, \quad (2.5)$$

где $s_1 = \sum_{t=1}^{\varphi} l_{k_t}$, 2^{k-s_1} — количество всех подмножеств множества $\Omega \setminus \{\cup_{t=1}^{\varphi} L_{k_t}\}$; $s_2 = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_{\kappa}\}} (l_{k_i} - 1)$, $2^{l_{k_i}-1}$ — количество всех подмножеств множества L_{k_i} , $i \in \{i_1, \dots, i_{\kappa}\}$, каждое из которых содержит нечетное число элементов из Ω ; $s_3 = \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_{\varphi-\kappa}\}} (l_{k_j} - 1)$, $2^{l_{k_j}-1}$ — количество всех подмножеств множества L_{k_j} , $j \in \{j_1, \dots, j_{\varphi-\kappa}\}$, каждое из которых содержит четное число элементов из Ω ; $\chi\{\kappa = 0\} = \{1, \text{ если } \kappa = 0; 0, \text{ если } \kappa \neq 0\}$. Из (2.5) и определений сумм s_1, s_2, s_3 следует, что $\mu \leq 2^{k-\varphi} - \chi\{\kappa = 0\}$. Итак, каждому $\tilde{m} \in I_s$ соответствует построенное с помощью правила (П) решение системы (2.4), и число элементов из I_s , соответствующих этому решению, не превосходит $2^{k-\varphi} - \chi\{\kappa = 0\}$. Очевидно, что

$$s \leq 2^{k-\varphi} R - 1, \quad (2.6)$$

где R — число решений системы (2.4). В силу (2.2) ранг f матрицы A коэффициентов системы (2.4), $\text{rang}(A) = f$, над полем $\text{GF}(2)$ удовлетворяет неравенству $f \geq r$. Поэтому $R = 2^{\varphi-f} \leq 2^{\varphi-r}$. С учетом (2.6) получаем (2.3). Утверждение 2.1 доказано.

З а м е ч а н и е 2.2. Из доказательства утверждения 2.1 следует, что если имеют место (2.1), (2.2) и $f > r$, то $s < 2^{k-r} - 1$. Поэтому при выполнении условий (2.1), (2.2) и $s = 2^{k-r} - 1$, $1 \leq r \leq k$, справедливо равенство $\text{rang}(A) = r$.

Утверждение 2.2. Пусть $\Omega = \{1, \dots, k\}$, $3 \leq k < \infty$. Если для множества W_{Δ} и I_s выполняются условия (2.1),

$$\Delta = 2^r - 1, \quad s = 2^{k-r} - 1, \quad 1 \leq r \leq k - 2; \quad (2.7)$$

$$|\omega_j| \geq 3, \quad j = 1, \dots, \Delta, \quad (2.8)$$

то существует такое число α , $\alpha \in \{1, \dots, \Delta\}$, что для некоторых $m_{i_{\nu}}$, $m_{i_{\nu}} \in I_s$, $\nu = 1, 2, 3$,

$$|\omega_{\alpha} \cap m_{i_{\nu}}| = 2, \quad \nu = 1, 2, 3, \quad |\omega_{\alpha} \cap (a \cup b)| = 3, \quad (2.9)$$

где $a \neq b$, $a, b \in \{m_{i_{\nu}}; \nu = 1, 2, 3\}$.

Доказательство. Пусть матрица A построена на множестве W_{Δ} . На основании условий (2.1), (2.7) и замечания 2.1 заключаем, что $\text{rang}(A) = r$. Обозначим символом B матрицу, имеющую Δ строк и k столбцов, $B = \|b_q^{(\kappa)}\|_{q=1, \dots, \Delta}^{\kappa=1, \dots, k}$, где $b_q^{(\kappa)} = \{1, \text{ если } \kappa \in \omega_q; 0, \text{ если } \kappa \notin \omega_q\}$, $\kappa = 1, \dots, k$, $q = 1, \dots, \Delta$. Используя определения матриц A и B и метод математической индукции по параметру r , $r \geq 1$, нетрудно установить, что над полем $\text{GF}(2)$ выполняется $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = r$. Поскольку матрица B имеет $\Delta = 2^r - 1$ ненулевых строк и $\text{rang}(B) = r$, ее первые

r строк можно выбрать таким образом, чтобы они образовывали канонический базис r -мерного подпространства k -мерного пространства над $\text{GF}(2)$. Тогда согласно правилу задания канонического базиса (один из вариантов изложения этого правила см., например, в [5, с. 219]) в первых r строках матрицы B существует единичная $(r \times r)$ -матрица. Пусть столбцы с номерами $1 < a_1 < \dots < a_r \leq k$ образуют указанную $(r \times r)$ -матрицу. Применим построенный канонический базис к формированию множеств m_{i_1} , m_{i_2} и m_{i_3} , удовлетворяющих (2.9). В качестве α выбираем 1, т.е. $\alpha = 1$. В силу (2.8) в первой строке матрицы B на позициях с номерами j_1 и j_2 расположены единицы, где j_1 и j_2 — некоторые целые числа, удовлетворяющие соотношениям $1 \leq j_1 < j_2 < a_1$. Далее воспользуемся методом математической индукции. Пусть $\text{rang}(B) = 1$. Тогда в m_{i_1} (m_{i_2} ; m_{i_3}) включим лишь следующие элементы: $u_{j_1}^{(1)}$ и $u_{j_2}^{(1)}$ ($u_{j_1}^{(1)}$ и $u_{a_1}^{(1)}$; $u_{j_2}^{(1)}$ и $u_{a_1}^{(1)}$), где $u_{j_1}^{(1)}$, $u_{j_2}^{(1)}$ и $u_{a_1}^{(1)}$ — элементы множества ω_1 ($u_{j_1}^{(1)}$, $u_{j_2}^{(1)}$, $u_{a_1}^{(1)} \in \omega_1$), соответствующие по построению единицам первой строки матрицы B , расположенным на позициях с номерами j_1, j_2 и a_1 . Обоснуем индукционный шаг от $\text{rang}(B) = r - 1$, $r \geq 2$, к $\text{rang}(B) = r$. Если $|m_{i_\nu} \cap \omega_r| \equiv 0 \pmod{2}$, то множество m_{i_ν} оставляем без изменения, иначе дополняем множество m_{i_ν} элементом $u_{a_r}^{(r)}$, $u_{a_r}^{(r)} \in \omega_r$, который соответствует единице, расположенной в r -й строке матрицы B на позиции с номером a_r , $\nu = 1, 2, 3$. Ясно, что построенное таким образом множество m_{i_ν} , $\nu = 1, 2, 3$, удовлетворяет соотношениям (2.9) и

$$|m_{i_\nu} \cap \omega_j| \equiv 0 \pmod{2}, \quad j = \{1, \dots, \Delta\}, \quad \nu = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что $m_{i_\nu} \in I_s$, $\nu = 1, 2, 3$, так как в силу утверждения 2.1 и условия (2.7) множество I_s содержит, очевидно, все совокупности $m_1, \dots, m_s$, для которых выполняется (2.1).

Утверждение 2.2 доказано.

З а м е ч а н и е 2.2. При $r = k - 1$ и $s = 1$ условие (2.8) не выполняется. Действительно, в i -й строке, $i \in \{1, \dots, r\}$, канонического базиса на позициях с номерами $j > a_i$ стоят нули, а позиции с номерами $j < a_i$, $j \notin \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$, $i \in \{2, \dots, r\}$, и $j < a_1$ могут быть заполнены элементами поля $\text{GF}(2)$ произвольным образом. (Здесь сохранены обозначения, введенные при доказательстве утверждения 2.2.) Поэтому если $r = k - 1$ и $s = 1$, то существует такое значение параметра j , $j \in \{1, \dots, \Delta\}$, что $|\omega_j| < 3$.

В дальнейшем $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k$ — попарно различные n -мерные $(0, 1)$ -векторы, не совпадающие с $\bar{x}^0$, $\bar{x}^\nu = (x_1^\nu, \dots, x_n^\nu)$, $\nu = 0, \dots, k$, $1 \leq k < \infty$. Для параметра t , $t \in \{1, \dots, n\}$, набора $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_t \leq n$, параметра ν , $\nu \in \{1, \dots, k\}$, и набора $\{u_1, \dots, u_\nu\}$, $1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k$, рассмотрим множество

$$m(\alpha_1, \dots, \alpha_t; u_1, \dots, u_\nu) = \{x_{\alpha_1}^{u_1} \cdots x_{\alpha_t}^{u_t} \oplus x_{\alpha_1}^0 \cdots x_{\alpha_t}^0; z = 1, \dots, \nu\}.$$

Будем говорить, что $m(\alpha_1, \dots, \alpha_t; u_1, \dots, u_\nu)$ обладает свойством E , если $x_{\alpha_1}^{u_z} \cdots x_{\alpha_t}^{u_z} \oplus x_{\alpha_1}^0 \cdots x_{\alpha_t}^0 = 1$, $z = 1, \dots, \nu$, и для произвольного v , $v \in \{1, \dots, k\} \setminus \{u_1, \dots, u_\nu\}$, $x_{\alpha_1}^v \cdots x_{\alpha_t}^v \oplus x_{\alpha_1}^0 \cdots x_{\alpha_t}^0 = 0$. Обозначим через $\gamma_t^{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$ число всех попарно различных элементов множества $\{m(\alpha_1, \dots, \alpha_t; u_1, \dots, u_\nu): 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_t \leq n\}$, обладающих свойством E . Пусть для $1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k$, $\nu = 1, \dots, k$, $t = 1, \dots, n$

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}} = \sum_{\psi=1}^{\nu} 2^{-1} (1 - (-1)^\psi) \sum_M \sum_{l=0}^{k-\nu} \sum_N \gamma_t^{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}}, \quad (2.11)$$

где $M = \{1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_\psi \leq k, \sigma_z \in \{u_1, \dots, u_\nu\}, z = 1, \dots, \psi\}$, $N = \{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_l \leq k, \mu_z \notin \{u_1, \dots, u_\nu\}, z = 1, \dots, l\}$.

Нас интересуют оценки суммы $\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$, введенной равенством (2.11), и отдельных ее слагаемых. Пусть $i_{\{u_1, \dots, u_s\}}$ ($j_{\{u_1, \dots, u_s\}}$) — число единиц (нулей), расположенных на тех и только тех позициях всех векторов $\bar{x}^{u_1}, \dots, \bar{x}^{u_s}$, на которых у всех векторов $\bar{x}^{u_{s+1}}, \dots, \bar{x}^{u_k}, \bar{x}^0$ расположены нули (единицы), $u_1, \dots, u_k \in \{1, \dots, k\}$, $u_i \neq u_j$ для $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $1 \leq s \leq k$. Для совокупности $\{u_1, \dots, u_\nu\}$, $1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k$, $\nu = 1, \dots, k$, положим

$$I_{\{u_1, \dots, u_\nu\}} = \{i_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}}: A(\psi, l, k)\},$$

$$J_{\{u_1, \dots, u_\nu\}} = \{j_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}}: A(\psi, l, k)\},$$

где $A(\psi, l, k)$ — сокращенная запись следующего набора ограничений: $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_\psi \leq k$, $\sigma_z \in \{u_1, \dots, u_\nu\}$, $z = 1, \dots, \psi$, $\psi = 1, \dots, \nu$, $\psi \equiv 1 \pmod{2}$, $1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_l \leq k$, $\mu_1, \dots, \mu_l \notin \{u_1, \dots, u_\nu\}$, $l = 0, \dots, k - \nu$. Пусть $J = \{j_{\{u_1, \dots, u_\nu\}}: 1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k, \nu = 1, \dots, k\}$ и $s' = \sum_{j \in J} j$.

Утверждение 2.3. Для $1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k$, $\nu \in \{1, \dots, k\}$, $u \in \{1, \dots, n\}$ выполняется неравенство

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}} \geq \sum_{(i,j) \in T} (C_i^t + C_j^t), \quad (2.12)$$

где $T = I_{\{u_1, \dots, u_\nu\}} \times J_{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$; если

$$\rho(n) - s' \geq t, \quad (2.13)$$

то

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}} \geq C_{\rho(n)-s'}^{t-1} \sum_{(i,j) \in T} (i+j). \quad (2.14)$$

Пусть $1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k$, $\nu \in \{3, 4, \dots, k\}$; $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \subseteq \{u_1, \dots, u_\nu\}$, $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \leq k$; $\{u_1, \dots, u_\nu\} \cap \{\mu_1, \dots, \mu_l\} = \emptyset$, $1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_l \leq k$, $l = 0, \dots, k - \nu$. Если

$$j_* \geq t, \quad (2.15)$$

где t — целое число, $t \geq 1$, $j_* = \min\{j_a, j_b\}$, $a = \tilde{\sigma} \cup \tilde{\mu}$, $b = \hat{\sigma} \cup \hat{\mu}$, $\tilde{\sigma} \cup \hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\tilde{\sigma} \neq \hat{\sigma}$, $|\tilde{\sigma}| = |\hat{\sigma}| = 2$, $\tilde{\mu} \cup \hat{\mu} = \{\mu_1, \dots, \mu_l\}$, то

$$\gamma_t^{\{a \cup b\}} \geq t^{-1} j_* (j_* - 2^{-1}(j_* - 1)) C_{(j_*/2)+(3j_*/4)-(5/4)}^{t-2}, \quad (2.16)$$

где $j^* = \max\{j_a, j_b\}$.

Доказательство. Используя определения чисел $\gamma_t^{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$, $i_{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$ и $j_{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$, находим следующие оценки для слагаемых из правой части (2.11):

$$\gamma_t^{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}} \geq C_{i_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}}}^t + C_{j_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}}}^t, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \gamma_t^{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}} &\geq C_{i_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}} + \rho(n) - s'}^t \\ &\quad + C_{j_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}} + \rho(n) - s'}^t - 2C_{\rho(n) - s'}^t, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\gamma_t^{\{a \cup b\}} \geq C_{j_a + j_b}^t - C_{j_a}^t - C_{j_b}^t. \quad (2.19)$$

Из (2.11) и (2.17) немедленно следует (2.12). Оценивая правую часть (2.18) с помощью установленного в [6] неравенства

$$C_\alpha^t - C_{\alpha - \beta}^t \geq \beta C_{\alpha - 2^{-1}(1 + \beta)}^{t-1}, \quad (2.20)$$

где α, β и t — целые положительные числа, $\alpha - \beta \geq t$, с учетом (2.11) и (2.13) легко получить соотношение (2.14). Далее, в силу (2.15) и (2.20), имеем:

$$\begin{aligned} C_{j^* + j_*}^t - C_{j_*}^t &\geq j_* C_{j^* + 2^{-1}(j_* - 1)}^{t-1}, \\ C_{j^* + 2^{-1}(j_* - 1)}^{t-1} - C_{j^* - 1}^{t-1} &\geq (j^* - 2^{-1}(j_* - 1)) C_{(j^*/2)+(3j_*/4)-(5/4)}^{t-2}. \end{aligned}$$

Последние два неравенства позволяют заключить, что

$$C_{j^* + j_*}^t - C_{j_*}^t - C_{j^* - 1}^{t-1} \geq t^{-1} j_* (j^* - 2^{-1}(j_* - 1)) C_{(j^*/2)+(3j_*/4)-(5/4)}^{t-2}.$$

Из последнего соотношения с учетом (2.19) непосредственно следует (2.16).

Утверждение 2.3 доказано.

Обозначим через $E\nu_n^{[k]}$, k -й, $k \geq 0$, факториальный момент случайной величины ν_n , т.е. $E\nu_n^{[k]} = E\nu_n(\nu_n - 1) \cdots (\nu_n - k + 1)$; положим $E\nu_n^{[0]} \equiv 1$.

Утверждение 2.4. Если выполняется условие (A), то для $k \geq 1$

$$E\nu_n^{[k]} = 2^{-kN} S(n, k; Q), \quad (2.21)$$

где

$$S(n, k; Q) = \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} \sum (n - \rho(n))! \left((n - \rho(n) - s)! \prod_{i \in I} i! \right)^{-1}$$

$$\times \sum_{\substack{\rho(n) \\ s'=0, \\ s'+s \geq 1}} \sum' \rho(n)! \left((\rho(n) - s')! \prod_{j \in J} j! \right)^{-1} Q, \quad (2.22)$$

$$Q = \prod_{i=1}^N \left(1 + \sum_{\nu=1}^k \sum_{1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k} \prod_{t=1}^{g_i(n)} (1 - 2p_{it})^{\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}}} \right);$$

суммирование $\sum (\sum')$ осуществляется по всем $i \in I$ ($j \in J$), где $I = \{i_{\{u_1, \dots, u_\nu\}}: 1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k, \nu = 1, \dots, k\}$, таким, что

$$\sum_{i \in I} i = s \quad \left(\sum_{j \in J} j = s' \right); \quad (2.23)$$

в равенстве (2.22) числа i ($i \in I$), j ($j \in J$) удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i \in I_{\{u\}}, j \in J_{\{u\}}} (i + j) \geq 1, \quad u = 1, \dots, k, \quad (2.24)$$

$$\sum_{l=0}^{k-2} \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_l \leq k} (i_{\{u_1, \mu_1, \dots, \mu_l\}} + j_{\{u_1, \mu_1, \dots, \mu_l\}} + i_{\{u_2, \mu_1, \dots, \mu_l\}} + j_{\{u_2, \mu_1, \dots, \mu_l\}}) \geq 1, \quad 1 \leq u_1 < u_2 \leq k; \quad (2.25)$$

для $\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$, $1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k$, $\nu = 1, \dots, k$, $t = 1, \dots, g_i(n)$, $i = 1, \dots, N$, справедливо (2.11).

Доказательство утверждения 2.4 осуществляется аналогично доказательству теоремы 1 из [6]. (Заметим, что в [6] утверждение 2.4 установлено при дополнительном предположении: $g_i(n) = n$, $i = 1, \dots, N$.)

Положим

$$\delta_i = \min \left\{ \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^{t-1}, \frac{2(\ln n)}{\sqrt{\varepsilon}} n \right\},$$

где

$$i = 1, \dots, N, \quad r = [\varepsilon \varphi(n)], \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \varepsilon = \text{const}, \quad \varphi(n) \leq n.$$

Утверждение 2.5. Если выполняются условия (1.2), (1.3) и

$$\sum_{i=1}^N \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

то

$$\sqrt{\varepsilon} \sum_{i=1}^N \delta_i - \ln n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. В силу (1.3) и (2.26) для $0 < \varepsilon < 1$ имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \\ & \geq \sum_{i=1}^N \exp \left\{ -\sqrt{\varepsilon} n \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^{t-1} \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N e^{-\sqrt{\varepsilon} n \delta_i} & \leq \sum_{i=1}^N \exp \left\{ -\sqrt{\varepsilon} n \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^{t-1} \right\} \\ & + \sum_{i=1}^N e^{-2 \ln n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Неравенство Йенсена для выпуклой функции дает оценку

$$\sum_{i=1}^N e^{-\sqrt{\varepsilon} n \delta_i} \geq \exp \left\{ (\ln N) - \frac{\sqrt{\varepsilon} n}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

которая с учетом (1.2) доказывает утверждение 2.5.

3. Доказательство теоремы. Покажем, что для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E} \nu_n^{[k]} \rightarrow 2^{mk}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

При $k = 0$ соотношение (3.1) очевидно. Докажем (3.1) для $1 \leq k < \infty$. С этой целью выражение (2.21) для $\mathbf{E} \nu_n^{[k]}$ разобьем на конечное число слагаемых:

$$\mathbf{E} \nu_n^{[k]} = 2^{-kN} \sum_{\Delta \geq 0} S^{(\Delta)}(n, k; Q), \quad (3.2)$$

где $S^{(\Delta)}(n, k; Q)$ отличается от $S(n, k; Q)$ тем, что все i и j ($i \in I, j \in J$), участвующие в записи $S(n, k; Q)$ согласно (2.22), принимают лишь такие значения, что существуют в точности Δ попарно различных наборов $\omega_\alpha = \{u_1^{(\alpha)}, \dots, u_{\xi_\alpha}^{(\alpha)}\}$, $1 \leq u_1^{(\alpha)} < \dots < u_{\xi_\alpha}^{(\alpha)} \leq k$, $\xi_\alpha \in \{1, \dots, k\}$, $\alpha = 1, \dots, \Delta$, для каждого из которых найдется такое $t^{(\alpha)} \in \{2, \dots, r\}$, что выполняется неравенство

$$\Gamma_{t^{(\alpha)}, k}^{\omega_\alpha} < C_r^{t^{(\alpha)}}, \quad (3.3)$$

и для наборов $\{v_1, \dots, v_\gamma\}$, $1 \leq v_1 < \dots < v_\gamma \leq k$, $\gamma = 1, \dots, k$, удовлетворяющих соотношению $\{v_1, \dots, v_\gamma\} \neq \omega_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, \Delta$, имеет место оценка

$$\Gamma_{t, k}^{\{v_1, \dots, v_\gamma\}} \geq C_r^t \quad (3.4)$$

для всех $t \in \{2, \dots, r\}$. Убедимся в том, что для $k = 1, 2, \dots$

$$2^{-kN} S^{(0)}(n, k; Q) \longrightarrow 2^{mk}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Предварительно заметим, что при достаточно малом $\varepsilon, \varepsilon > 0$, по крайней мере одно из двух неравенств $i \geq r$ или $j \geq r$ может выполняться для всех $i \in I$ или всех $j \in J$. Но если $i \geq r$ и (или) $j \geq r$ для всех $i \in I$ и (или) всех $j \in J$, то в силу (2.12) оценка (3.4) имеет место для всех наборов $\{v_1, \dots, v_\gamma\}$, $1 \leq v_1 < \dots < v_\gamma \leq k$, $\gamma = 1, \dots, k$, и $t \in \{2, \dots, r\}$. Значит, равенство $\Delta = 0$ может достигаться.

При $\Delta = 0$ с учетом оценки (3.4) и условия (1.4) находим:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N \left(1 - (2^k - 1) \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \right) &\leq Q \\ &\leq \prod_{i=1}^N \left(1 + (2^k - 1) \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из условия (1.5) и неравенства $r > f(n)$ следует, что

$$\sum_{i=1}^N \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Используя (3.6), (3.7) и соотношения $\ln(1+u) = u + O(u^2)$, $u \rightarrow 0$,

$$\max_{1 \leq i \leq N} \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

нетрудно получить, что

$$Q \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Если для некоторого набора $\{u_1, \dots, u_\nu\}$, $1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k$, $\nu = 1, \dots, k$, и некоторого $t \in \{2, \dots, r\}$

$$\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}} < C_r^t, \quad (3.9)$$

то соотношение (2.12) позволяет заключить, что

$$0 \leq i < r, \quad i \in I_{\{u_1, \dots, u_\nu\}}; \quad 0 \leq j < r, \quad j \in J_{\{u_1, \dots, u_\nu\}}. \quad (3.10)$$

Поэтому сумма $S^{(0)}(n, k; 1)$ (здесь $S^{(\Delta)}(n, k; 1) = S^{(\Delta)}(n, k; Q)$ при условии $Q \equiv 1$, $\Delta \geq 0$; аналогично $S(n, k; 1) = S(n, k; Q)$ при условии $Q \equiv 1$) равняется $S^{(0)}(n, k; 1) = 2^{nk} - \sigma_0$, где σ_0 отличается от $S(n, k; 1)$ тем, что суммирование $\sum (\sum')$ (см. (2.22)) осуществляется по всем $i \in I$ ($j \in J$) таким, что выполняется (2.23), и по крайней мере один из элементов множества $\{\Gamma_{t,k}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}}: 1 \leq u_1 < \dots < u_\nu \leq k, \nu = 1, \dots, k, t = 2, \dots, r\}$ удовлетворяет (3.9). Поскольку при выполнении (3.9) имеет место (3.10),

то в левой части каждого из равенств (2.23) найдется 2^{k-1} слагаемых, ограниченных величиной r . Следовательно,

$$0 \leq \sigma_0 \leq \exp \left\{ (\sigma(\varepsilon) + o(1)) n \right\} 2^{n(k-1)},$$

где $\sigma(\varepsilon) > 0$, $\sigma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что было использовано, в частности, следующее легко проверяемое неравенство:

$$\sum_{i=1}^r C_n^i \leq \exp \left\{ (\sigma(\varepsilon) + o(1)) n \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Итак,

$$S^{(0)}(n, k; 1) = 2^{nk} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Соотношения (1.2), (3.8) и (3.12) очевидно доказывают (3.5).

Покажем, что для $\Delta \geq 1$ и $k = 1, 2, \dots$

$$2^{-kN} S^{(\Delta)}(n, k; Q) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Действительно, пусть $I = M_1 \cup M_2$ и $J = \widetilde{M}_1 \cup \widetilde{M}_2$, где

$$M_1 = \bigcup_{i \in I, i \notin I_{\omega_\alpha}, \alpha=1, \dots, \Delta} i, \quad \widetilde{M}_1 = \bigcup_{j \in J, j \notin J_{\omega_\alpha}, \alpha=1, \dots, \Delta} j$$

и $M_2 = I \setminus M_1$, $\widetilde{M}_2 = J \setminus \widetilde{M}_1$. Мощность множества M_1 ($\widetilde{M}_1$) обозначим R_1 ($\widetilde{R}_1$). Пусть z — наименьшее целое число, для которого выполняется неравенство $\Delta \leq 2^z - 1$. Ясно, что

$$1 \leq z \leq k. \quad (3.14)$$

На основании утверждения 2.1 получаем:

$$R_1 \leq 2^{k-z} - 1; \quad \widetilde{R}_1 \leq 2^{k-z} - 1. \quad (3.15)$$

При выполнении (3.4) с учетом условия (1.4) имеем следующее неравенство для Q из левой части (3.13):

$$|Q| \leq 2^{zN} \prod_{i=1}^N \left(1 + 2^{-z} (2^k - \Delta - 1) \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \right). \quad (3.16)$$

Далее, из (3.3), в силу (3.9) и (3.10), следует, что

$$0 \leq i < r \quad (0 \leq j < r) \quad (3.17)$$

для всех $i \in M_2$ ($j \in \widetilde{M}_2$). Используя (1.6), (3.15), (3.17) и ограничение $\mathcal{C}_0$:

$$\rho(n) - r + 1 \leq s' \leq \rho(n),$$

находим при $n \rightarrow \infty$

$$S^{(\Delta)}(n, k; 1) \leq \exp \left\{ (\sigma(\varepsilon) + o(1)) \rho(n) \right\} 2^{n(k-z)} (1 - 2^{z-k})^{\rho(n)}. \quad (3.18)$$

Из (1.5) и (1.6) вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\rho(n) \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

С помощью (1.2), (3.7), (3.14), (3.16), (3.18) и (3.19) нетрудно получить (3.13) при ограничении $\mathcal{C}_0$.

Пусть выполняются ограничения $\mathcal{C}_1$:

$$s' \leq \rho(n) - r; \quad (3.20)$$

существует $i \in M_2$ и (или) существует $j \in \widetilde{M}_2$ такое, что $i \in (r/E_n, r]$ и (или) $j \in (r/E_n, r]$, где при $n \rightarrow \infty$

$$E_n \rightarrow \infty, \quad E_n = o(\ln n). \quad (3.21)$$

При выполнении $\mathcal{C}_1$ можно воспользоваться неравенством (2.14) и установить

$$\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha} \geq C_r^{t-1} \frac{r}{E_n} \quad (3.22)$$

для всех $t \in \{2, \dots, r\}$ и некоторого α , $\alpha = 1, \dots, \Delta$. С помощью (3.22) и (1.4) находим для i , $i = 1, \dots, N$, оценку

$$\left| \prod_{t=1}^{g_i(n)} (1 - 2p_{it})^{\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha}} \right| \leq \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^{t-1} \frac{r}{E_n} \right\},$$

с учетом которой получаем

$$\begin{aligned} |Q| \leq 2^{zN} \exp \left\{ -2^{-z} \left(N - \sum_{i=1}^N \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^{t-1} \frac{r}{E_n} \right\} - (2^k - \Delta - 1) \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{i=1}^N \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В силу неравенства Гёльдера имеем соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^{t-1} \frac{r}{E_n} \right\} \\ \leq \left(\sum_{i=1}^N \exp \left\{ - \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^{t-1} \varphi(n) \right\} \right)^{A_n} N^{1-A_n}, \end{aligned}$$

где $A_n = 2\varepsilon/E_n$, использование которого совместно с (3.7) и неравенством

$$\sum_{i=1}^N \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \geq \sum_{i=1}^N \exp \left\{ - \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^{t-1} \varphi(n) \right\},$$

справедливым на основании (1.3), позволяет прийти от (3.23) к оценке

$$|Q| \leq 2^{zN} \exp \left\{ -2^{-z} (N - N^{1-A_n}) + o(1) \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Далее, нетрудно проверить, что при выполнении (3.15) и (3.17) в силу (3.11)

$$S^{(\Delta)}(n, k; 1) \leq 2^{n(k-z)} \exp \left\{ (\sigma(\varepsilon) + o(1)) n \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

Соотношения (3.21), (3.24), (3.25) и условие (1.2) дают возможность заключить, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$2^{-kN} |S^{(\Delta)}(n, k; Q)| \leq \exp \left\{ -2^{-z} N (1 - N^{-A_n} - \sigma(\varepsilon) + o(1)) \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

т.е. (3.13) справедливо при ограничениях $\mathcal{C}_1$.

Пусть выполняются ограничения $\mathcal{C}_2$: (3.20); существует $i \in M_2$ и (или) существует $j \in \widetilde{M}_2$ такое, что $i \in (r/\ln n, r/E_n]$ и (или) $j \in (r/\ln n, r/E_n]$.

При выполнении $\mathcal{C}_2$ аналогично (3.24) (с тем лишь отличием, что в (3.24) вместо A_n будет $\widetilde{A}_n = 2\varepsilon/\ln n$) получаем

$$|Q| \leq 2^{zN} \exp \left\{ -\sigma(\varepsilon) n \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Если параметры i и j изменяются так, как указано в ограничениях $\mathcal{C}_2$, то, используя (3.15) и вариант неравенства (3.11), а именно,

$$\sum_{i=0}^{n/E_n} C_n^i \leq \exp \left\{ |o(n)| \right\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

имеем

$$S^{(\Delta)}(n, k; 1) \leq 2^{n(k-z)} \exp \left\{ |o(n)| \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

С помощью (3.26), (3.27) и условия (1.2) получаем (3.13) при ограничениях $\mathcal{C}_2$.

Пусть выполняется ограничение $\mathcal{C}_3$: (3.20); для всех $i \in M_2$ и $j \in \widetilde{M}_2$

$$0 \leq i \leq \frac{r}{\ln n}, \quad 0 \leq j \leq \frac{r}{\ln n}. \quad (3.28)$$

При выполнении (3.20) можно воспользоваться неравенством (2.14) и установить

$$\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha} \geq C_r^{t-1} (s^{(\alpha)} + \widetilde{s}^{(\alpha)}) \quad (3.29)$$

для всех $t \in \{2, \dots, r\}$ и $\alpha = 1, \dots, \Delta$, где $s^{(\alpha)} = \sum_{i \in I_{\omega_\alpha}} i$, $\widetilde{s}^{(\alpha)} = \sum_{j \in J_{\omega_\alpha}} j$. В силу (1.3) и (1.4) для $i = 1, \dots, N$ и $\alpha = 1, \dots, \Delta$

$$\left| \prod_{t=1}^{g_i(n)} (1 - 2p_{it})^{\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha}} \right| \leq \prod_{t \in T_i} (1 - 2\delta_{it}(n))^{\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha}}. \quad (3.30)$$

К правой части (3.30) можно применить (3.29) так, что

$$\prod_{i \in T_i} (1 - 2\delta_{it}(n))^{\Gamma_{i,k}^{\omega,\alpha}} \leq \exp \{ -2\delta_i(s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)}) \}. \quad (3.31)$$

Принимая во внимание (3.28) и равенство $e^{-y} = 1 - y + O(y^2)$, $0 \leq y < \infty$, получаем для $i = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, \dots, \Delta$ и $n \rightarrow \infty$

$$\exp \{ -2\delta_i(s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)}) \} \leq 1 - 2\delta_i(s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)}) (1 + O(\sqrt{\varepsilon})). \quad (3.32)$$

С помощью (1.4), (3.4) и (3.30)–(3.32) находим при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 2^{-kN} |S^{(\Delta)}(n, k; Q)| &\leq 2^{-kN} (\Delta + 1)^N \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C_{n-\rho(n)}^s \sum_{s_*=0}^s R_1^{s-s_*} \\ &\times \left(\sum_{\sum_{i \in M_2} i = s_*} \frac{s!}{(s-s_*)!} \prod_{i \in M_2} i! \right) \sum_{\substack{s'=0, \\ s'+s \geq 1}}^{\rho(n)} C_{\rho(n)}^{s'} \sum_{\tilde{s}_*=0}^{s'} \tilde{R}_1^{s'-\tilde{s}_*} \\ &\times \left(\sum_{\sum_{j \in \tilde{M}_2} j = \tilde{s}_*} \frac{s!}{(s'-\tilde{s}_*)!} \prod_{j \in \tilde{M}_2} j! \right) \\ &\times \exp \left\{ -2^{-z+1} \sum_{i=1}^N \delta_i (1 + O(\sqrt{\varepsilon})) \sum_{\alpha=1}^{\Delta} (s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)}) \right. \\ &\quad \left. + (2^k - \Delta - 1) 2^{-z} \sum_{i=1}^N \exp \left\{ -2 \sum_{t \in T_i} \delta_{it}(n) C_r^t \right\} \right\}. \quad (3.33) \end{aligned}$$

Если $\Delta < 2^z - 1$, то из (3.33) с учетом (1.2), (3.7), (3.15) и неравенства $\max\{s_*, \tilde{s}_*\} \leq \sigma(\varepsilon) n / \ln n$ легко получить (3.13). Пусть $\Delta = 2^z - 1$. Тогда, используя (1.2), (3.7), (3.15), (3.33) и очевидное неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta} (s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)}) \geq s_* + \tilde{s}_*,$$

где

$$s_* = \sum_{i \in M_2} i, \quad \tilde{s}_* = \sum_{j_1 \in \tilde{M}_2} j,$$

находим оценку

$$\begin{aligned} 2^{-kN} |S^{(\Delta)}(n, k; Q)| &\leq 2^{mk} (1 + o(1)) \\ &\times \sum_{q=0}^{\infty} \left(|M_2| (n - \rho(n)) \exp \left\{ -2^{-z+1} (1 + O(\sqrt{\varepsilon})) \sum_{i=1}^N \delta_i \right\} \right)^q (q!)^{-1} \\ &\times \sum_{\substack{\tilde{q}=0, \\ \tilde{q}+q \geq 1}}^{\infty} \left(|\tilde{M}_2| \rho(n) \exp \left\{ -2^{-z+1} (1 + O(\sqrt{\varepsilon})) \sum_{i=1}^N \delta_i \right\} \right)^{\tilde{q}} (\tilde{q}!)^{-1}, \quad (3.34) \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$, для случая

$$s_* + \tilde{s}_* \geq 1. \quad (3.35)$$

Принимая во внимание утверждение 2.5, нетрудно от (3.34) прийти к (3.13).

Покажем, что (3.35) выполняется, если в (3.14) либо $k \in \{1, 2\}$, либо $z \in \{k, k-1\}$. Действительно, если $z = k$ (или $k \in \{1, 2\}$), то, очевидно, существует $\alpha \in \{1, \dots, \Delta\}$, для которого $\xi_\alpha \leq 2$. Если $z = k-1$, то на основании замечания 2.2 убеждаемся в существовании такого $\alpha \in \{1, \dots, \Delta\}$, что $\xi_\alpha \leq 2$. Далее, соотношения (2.24) и (2.25) позволяют установить, что если $\xi_\alpha \leq 2$ для некоторого $\alpha \in \{1, \dots, \Delta\}$, то $s^{(\alpha)} + \tilde{s}^{(\alpha)} \geq 1$, следовательно выполняется (3.35).

Значит, для завершения доказательства (3.13) осталось проверить, что (3.13) имеет место при ограничениях $\mathcal{C}_4$:

$$s_* + \tilde{s}_* = 0, \quad (3.36)$$

$$\xi_\alpha \geq 3, \quad \alpha = 1, \dots, \Delta, \quad \Delta = 2^z - 1, \quad 1 \leq z \leq k-2, \quad 3 \leq k < \infty, \quad (3.37)$$

и (3.20). Если выполняется (3.36), $\Delta = 2^z - 1$ и $\tilde{R}_1 < 2^{k-z} - 1$, то оценку (3.33) можно переписать с учетом (3.7) и (3.15) в виде

$$2^{-kN} |S^{(\Delta)}(n, k; Q)| \leq 2^{mk} (1 + o(1)) (1 - 2^{z-k})^{\rho(n)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Принимая во внимание (3.19), получаем (3.13).

Убедимся в справедливости (3.13) при ограничениях $\mathcal{C}_4$ и

$$\tilde{R}_1 = 2^{k-z} - 1. \quad (3.38)$$

При выполнении (3.37) и (3.38) множество $\tilde{M}_1$ содержит согласно утверждению 2.2 не менее трех таких элементов $j_{m_\nu} \in \tilde{M}_1$, $\nu = 1, 2, 3$, что для некоторого $\alpha \in \{1, \dots, \Delta\}$

$$|\omega_\alpha \cap m_\nu| = 2, \quad \nu = 1, 2, 3; \quad |\omega_\alpha \cap (a \cup b)| = 3 \quad (3.39)$$

для произвольных $a, b \in \{m_\nu: \nu = 1, 2, 3\}$, $a \neq b$. Для указанного α в силу (2.11) и (3.39) имеем:

$$\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha} \geq \gamma_t^{\{a \cup b\}}, \quad t \in \{2, \dots, r\}. \quad (3.40)$$

Оценивая правую часть (3.40) с помощью (2.16), находим

$$\gamma_t^{\{a \cup b\}} \geq t^{-1} j_*^* (j_*^* - 2^{-1}(j_*^* - 1)) C_{(j_*^*/2)+(3j_*/4)-(5/4)}^{t-2} \quad (3.41)$$

при условии, что $j_* \geq t$, где $j_* = \min\{j_a, j_b\}$, $j_*^* = \max\{j_a, j_b\}$. Если $j_* > [\sqrt{\varepsilon} \varphi(n)]$, то неравенство $j_* \geq t$, $t \in \{2, \dots, r\}$, заведомо выполняется для $0 < \varepsilon < 1$, и поэтому из (3.40) и (3.41) следует для указанных j_* и t при $n \rightarrow \infty$

$$\Gamma_{t,k}^{\omega_\alpha} \geq \varepsilon (2t)^{-1} \varphi^2(n) C_{(5\sqrt{\varepsilon} \varphi(n)/4)-(5/4)}^{t-2},$$

что противоречит (3.3) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $t \in \{2, \dots, r\}$. Таким образом, при ограничениях (3.37) и (3.38) по крайней мере один элемент j_* множества $\widetilde{M}_1$, $j_* \in \widetilde{M}_1$, удовлетворяет неравенству $j_* < [\sqrt{\varepsilon} \varphi(n)]$. Поэтому при ограничениях $\mathcal{C}_4$ и (3.38) в условиях теоремы получаем при $n \rightarrow \infty$

$$2^{-kN} |S^{(\Delta)}(n, k; Q)| \leq \exp \left\{ (\sigma(\varepsilon) + o(1)) \rho(n) \right\} (1 - 2^{z-k})^{\rho(n)} \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Соотношение (3.42) доказывает (3.13) в предположениях $\mathcal{C}_4$ и (3.38).

Анализируя ограничения $\mathcal{C}_i$, $i = 0, 1, \dots, 4$, нетрудно убедиться в том, что полученное при этих ограничениях соотношение (3.13) справедливо для всех значений параметров s, s', i, j ($i \in I, j \in J$) суммирования в (2.22), при которых неравенство (3.3) имеет место для $\Delta \geq 1$. Из (3.2), (3.5) и (3.13) немедленно следует (3.1) для $k = 1, 2, \dots$. Так как λ^k есть k -й, $k \geq 1$, факториальный момент для распределения Пуассона с параметром λ и выполняется (3.1), то по известной теореме (см., например, [7, с. 260]) распределение случайной величины ν_n сходится при $n \rightarrow \infty$ к распределению Пуассона с тем же параметром λ . Соотношение (1.7) установлено. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kovalenko I. N., Levitskaya A. A. Stochastic properties of systems of random linear equations over finite algebraic structures. — В сб.: Вероятностные методы дискретной математики. / Под. ред. В. Ф. Колчина и др. (Труды третьей Петрозаводской конференции. Петрозаводск, 12–15 мая, 1992.) Москва/Утрехт: ТВП/VSP, 1993, с. 64–70.
2. Балакин Г. В. Графы систем двучленных уравнений с булевыми неизвестными. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 241–259.
3. Копытцев В. А. О распределении числа решений случайных заведомо совместных систем уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 430–437.
4. Масол В. И. Пуассоновские теоремы для предельного распределения числа решений системы нелинейных случайных булевых уравнений. — В сб.: Вторая Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов. М.: ТВП, 1995, с. 95–96.
5. Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982, 256 с.
6. Masol V. I. Moments of the number of solutions of a system of random. Boolean equations. — Random Operators and Stochastic Equations, 1993, v. 1, № 2, p. 171–179.
7. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982, 384 с.

Поступила в редакцию
8.IV.1996