Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашев, Об асимптотических разложениях в области больших уклонений для биномиального и пуассоновского распределений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 57–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp823>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:40:24

© 1998 г.

ТИМАШЕВ А. Н.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ БИНОМИАЛЬНОГО И ПУАССОНОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассматривается случайная величина ξ , распределенная по биномиальному закону с параметрами n и p ($0 < p < 1$). Решается задача асимптотической оценки при $n \rightarrow \infty$ и постоянном p вероятности $P\{\xi \geq k\}$ при условии, что $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbb{N}$) так, что $p < \alpha_0 \leq \alpha = k/n \leq \alpha_1 < 1$ (α_0, α_1 — постоянные).

Далее рассматривается случайная величина η , распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$. При $\lambda \rightarrow +\infty$ находятся асимптотические оценки вероятности $P\{\eta \geq k\}$ при условии, что $k \rightarrow \infty$ так, что $k \in \mathbb{N}$; $1 < \gamma_0 \leq \gamma = k/\lambda \leq \gamma_1$ (γ_0, γ_1 — постоянные).

Методом перевала получены разложения указанных вероятностей в асимптотические степенные ряды по степеням переменных n^{-1} и λ^{-1} , коэффициенты которых удовлетворяют некоторым линейным рекуррентным соотношениям в комплексной области с заданными начальными условиями.

Ключевые слова и фразы: биномиальное распределение, распределение Пуассона, асимптотическое разложение, метод перевала.

Пусть ξ — случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами n и p ($0 < p < 1$), т.е. $\xi \sim B(n, p)$. Рассматривается задача асимптотической оценки при $n \rightarrow \infty$ вероятности $P\{\xi \geq k\}$ при условии, что $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbb{N}$) так, что p — фиксированное число, принадлежащее интервалу $(0, 1)$, и

$$p < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{k}{n} \leq \alpha_1 < 1 \quad (1)$$

(α_0, α_1 — постоянные).

С помощью метода перевала получено разложение этой вероятности в асимптотический степенной ряд по степеням переменной n^{-1} , коэффициенты которого удовлетворяют некоторым линейным рекуррентным соотношениям в комплексной области с заданными начальными условиями. Заметим, что оценки «хвоста» биномиального распределения имеются во многих монографиях, учебниках и статьях. При этом обычно ограничиваются точными или асимптотическими оценками главного

*Академия ФСБ, Мичуринский пр., 70, 125040 Москва, Россия.

члена разложения при условии (1) либо рассматривают другие области изменения параметров n и p (в частности, область притяжения нормального закона, для которой известно полное асимптотическое разложение). По-видимому, впервые выражение для главного члена асимптотического степенного ряда при условии (1) появилось в [1] (см. также работу автора [2], где этот результат обобщается на случай полиномиального распределения с фиксированными вероятностями исходов и растущим числом испытаний).

Далее рассматривается случайная величина η , распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$, и оценивается «хвост» пуассоновского распределения, т.е. вероятность $P\{\eta \geq k\}$ при условии, что $k \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и

$$1 < \gamma_0 \leq \gamma = \frac{k}{\lambda} \leq \gamma_1 < +\infty \quad (2)$$

($k \in \mathbb{N}$; γ_0, γ_1 — постоянные).

Применяя метод перевала, мы получаем разложение этой вероятности в асимптотический степенной ряд по степеням переменной λ^{-1} , коэффициенты которого удовлетворяют некоторым линейным рекуррентным соотношениям с заданными начальными условиями.

Для получения искомого асимптотического разложения при условии (1) или (2) в обоих случаях применяется один и тот же метод, позволяющий выписать рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения, если величина, которую нужно оценить, может быть представлена в виде контурного интеграла с подынтегральной функцией специального вида. Идея метода имеется в [3, с. 66], [4, с. 165] и [5, с. 79]. По-видимому, таким же способом могут быть получены асимптотические разложения и в некоторых других комбинаторно-вероятностных задачах.

Чтобы оценить вероятность $P\{\xi \geq k\}$ при условии (1), будем исходить из равенств

$$P\{\xi \geq k\} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1 - z(q + pz)^n}{(1 - z)z^{k+1}} dz \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Эти равенства следуют из легко проверяемой формулы

$$\sum_{k=0}^n P\{\xi \geq k\} z^k = \frac{1 - z(q + pz)^n}{1 - z},$$

справедливой при $z \neq 1$. При этом полагаем $q = 1 - p$; интегрирование в этих равенствах осуществляется по окружности радиуса R с центром в нуле, пробегаемой в положительном направлении. Далее будем считать, что $R > 1$. Используя теорему о вычетах, нетрудно убедиться в том, что в этом случае

$$\oint_{|z|=R>1} \frac{dz}{(1 - z)z^{k+1}} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Таким образом,

$$P\{\xi \geq k\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R>1} \varphi(z) \exp(n\omega(z)) dz, \quad (3)$$

где

$$\varphi(z) = (z-1)^{-1} \quad (4)$$

и

$$\omega(z) = \ln(q + pz) - \alpha \ln z, \quad (5)$$

если выполнено условие (1).

Заметим, что в формуле (5) выбирается та непрерывная ветвь логарифма, которая принимает вещественные значения на вещественной положительной полуоси. Кроме того, из уравнения $\omega'(z) = 0$ следует, что $z = z_0 = \alpha(1-p)/[p(1-\alpha)] > 1$, если справедливо (1). В дальнейшем будем считать, что в формуле (3) $R = z_0 > 1$.

Теорема 1. Пусть при $n \rightarrow \infty$ $0 < p = \text{const} < 1$ и $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbb{N}$) так, что выполнено условие (1). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$P\{\xi \geq k\} \sim \frac{1-p}{\alpha-p} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi(1-\alpha)n}} \exp(-nJ) \times \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{m! 2^{2m}} \frac{x_{2m}}{n^m} \right), \quad (6)$$

где

$$J = \alpha \ln \frac{\alpha}{p} + (1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{1-p} > 0$$

и коэффициенты x_m ($m = 1, 2, \dots$) удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям в комплексной области:

$$x_m = -\frac{ip(1-\alpha)^{3/2}}{(1-p)\sqrt{2\alpha}} (m+1) c_{m+1} - \frac{p(1-\alpha)}{\alpha-p} \sum_{r=0}^{m-1} c_{m-r} x_r \quad (7)$$

($m = 1, 2, \dots$) с начальным условием $x_0 = 1$.

В формуле (7) коэффициенты c_r ($r = 1, 2, \dots$) удовлетворяют нелинейным рекуррентным соотношениям в комплексной области:

$$c_{r+1} = \frac{i}{r+2} \sqrt{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \left(\frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha} c_r + \frac{p}{1-p} \sum_{s=1}^{r-1} (2c_s c_{r-s} + (1-\alpha)(s+1) c_{s+1} c_{r-s+1}) \right) \quad (8)$$

($r = 2, 3, \dots$) с начальными условиями

$$c_1 = \frac{i(1-p)}{p(1-\alpha)} \sqrt{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}; \quad c_2 = -\frac{2(1+\alpha)(1-p)}{3p(1-\alpha)^2}.$$

Доказательство. Прежде чем доказывать теорему 1, заметим, что (6) согласно определению асимптотического разложения означает, что при условиях этой теоремы для любого фиксированного значения $M = 1, 2, \dots$ равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо равенство

$$P\{\xi \geq k\} = \frac{1-p}{\alpha-p} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi(1-\alpha)n}} \exp(-nJ) \times \left(1 + \sum_{m=1}^M \frac{(2m)!}{m! 2^{2m}} \frac{x_{2m}}{n^m} + O\left(\frac{1}{n^{M+1}}\right) \right).$$

Для обоснования соотношения (6) используем метод перевала, исходя из интегрального представления (3). В рассматриваемой ситуации имеется единственная точка перевала z_0 функции ω , определяемая равенством $z_0 = \alpha(1-p)/[p(1-\alpha)] > 1$.

Будем интегрировать в (3) по окружности $|z| = z_0$ (пробегаемой в положительном направлении). На этой окружности лежит точка перевала $z = z_0$ функции ω , для которой $\omega'(z_0) = 0$ и

$$\omega''(z_0) = \frac{(1-\alpha)^3 p^2}{\alpha(1-p)^2} > 0.$$

Таким образом, точка $z = z_0$ является точкой перевала первого порядка этой функции, причем из условий $|z| = z_0$, $z \neq z_0$ следует, что

$$\operatorname{Re} \omega(z) < \omega(z_0) = -\alpha \ln \frac{\alpha}{p} - (1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{1-p} < 0.$$

Поскольку функции φ и ω аналитичны в некоторой области (круговом кольце), содержащей контур интегрирования в (3) (с разрезом по отрицательной вещественной полуоси), то при $n \rightarrow \infty$ в условиях теоремы 1 справедливо асимптотическое разложение (см. [3, с. 66]):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=z_0>1} \varphi(z) \exp(n\omega(z)) dz \\ & \sim \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\alpha n} \left(\frac{1-p}{1-\alpha}\right)^{(1-\alpha)n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{m! 2^{2m}} \frac{a_{2m}}{n^m}. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом из условий (1) следует, что разложение (9) имеет место равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Коэффициенты a_m ($m = 0, 1, \dots$) в (9) определяются из соотношений (см. [3, с. 66]):

$$a_0 = i\varphi(z_0) \sqrt{\frac{2}{\omega''(z_0)}} = \frac{i(1-p)}{\alpha-p} \sqrt{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

(последнее равенство следует из (4) и (5));

$$\begin{aligned}\omega(z_0 + \psi(u)) &= \omega(z_0) - u^2; \\ \varphi(z_0 + \psi(u)) \psi'(u) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m.\end{aligned}$$

При этом полагаем

$$\psi(0) = 0; \quad \psi'(0) = i \sqrt{\frac{2}{\omega''(z_0)}} = \frac{i(1-p)}{p(1-\alpha)} \sqrt{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

Подставляя значения функций φ и ω и их производных, получаем, что при всех достаточно малых по модулю значениях u

$$\ln\left(\frac{p}{\alpha} z_0 + p\psi(u)\right) - \alpha \ln(z_0 + \psi(u)) + J + u^2 = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\psi'(u)}{z_0 + \psi(u) - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m. \quad (11)$$

При этом величина J в (10) определена в формулировке теоремы 1. Полагая $x_m = a_m/a_0$ ($m = 0, 1, \dots$), имеем $x_0 = 1$. Из равенства

$$a_0 = \frac{i(1-p)}{\alpha-p} \sqrt{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

получаем, что асимптотическое разложение (9) можно записать в виде (6).

Продифференцировав по переменной u равенство (10), выводим, что функция ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\alpha(1-\alpha) \psi(u) \psi'(u) + 2u(z_0 + \alpha\psi(u)) (z_0 + \psi(u)) = 0. \quad (12)$$

Положим

$$\psi(u) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r u^r,$$

тогда

$$c_0 = \psi(0) = 0, \quad c_1 = \psi'(0) = \frac{i(1-p)}{p(1-\alpha)} \sqrt{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

и

$$\psi'(u) = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) c_{r+1} u^r.$$

Подставляя в (12) разложения в степенные ряды функций ψ и ψ' и перемножая эти ряды по Коши, получаем, что коэффициенты c_r ($r =$

1, 2, ...) удовлетворяют системе нелинейных рекуррентных соотношений (8). Из равенства (12) нетрудно вывести, что

$$c_2 = \frac{1}{2} \psi''(0) = -\frac{2(1+\alpha)(1-p)}{3p(1-\alpha)^2}.$$

Записывая (11) в виде

$$(z_0 - 1 + \psi(u)) \sum_{m=0}^{\infty} a_m u^m = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) c_{r+1} u^r$$

и перемножая соответствующие степенные ряды, убеждаемся в том, что коэффициенты a_m ($m = 0, 1, \dots$) удовлетворяют системе линейных рекуррентных соотношений

$$a_m = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha-p} \left((m+1) c_{m+1} - \sum_{r=0}^{m-1} c_{m-r} a_r \right) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

с начальным условием

$$a_0 = \frac{i(1-p)}{\alpha-p} \sqrt{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

Подставляя в эти соотношения значения $a_m = a_0 x_m$ ($m = 0, 1, \dots$), получаем равенства (7) с начальным условием $x_0 = 1$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\begin{aligned} P\{\xi \geq k\} &= \frac{1-p}{\alpha-p} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi(1-\alpha)n}} \exp(-nJ) \\ &\times \left(1 + \frac{1}{12n} \left(\frac{\alpha^2 + 10\alpha p + p^2 - 12p}{(\alpha-p)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \right) + O(n^{-2}) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Для обоснования формулы (13) используем равенства (8) при $r = 2$. С учетом заданных начальных условий получаем

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{i}{4} \sqrt{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \left(\frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha} c_2 + \frac{p}{1-p} (2c_1^2 + 2(1-\alpha)c_2^2) \right) \\ &= -\frac{i(1-p)(\alpha^2 + 11\alpha + 1)}{9p \sqrt{2\alpha(1-\alpha)^5}}. \end{aligned}$$

Используя равенства (7) при $m = 1$ и $m = 2$ и учитывая начальное условие $x_0 = 1$, последовательно получаем:

$$x_1 = -\frac{2i(\alpha(1-p-2\alpha)+2p)}{3(\alpha-p)\sqrt{2\alpha(1-\alpha)}},$$

$$x_2 = \frac{\alpha^2 + 10\alpha p + p^2 - 12p}{6(\alpha-p)^2} - \frac{1}{6\alpha(1-\alpha)}.$$

Теперь равенство (13) следует из (6), если в соответствующем разложении ограничиться первыми двумя слагаемыми с остаточным членом порядка $O(n^{-2})$.

Заметим, что формула (13) может быть получена также из равенства $x_2 = a_2/a_0$ и соотношения (см. [4, с. 165]):

$$a_2 = -\frac{i}{\sqrt{2(\omega''(z_0))^3}} \left(2\varphi''(z_0) - \frac{2\omega'''(z_0)\varphi'(z_0)}{\omega''(z_0)} + \varphi(z_0) \left(\frac{5(\omega'''(z_0))^2}{6(\omega''(z_0))^2} - \frac{\omega^{(iv)}(z_0)}{2\omega''(z_0)} \right) \right). \quad (\text{iv})$$

Следствие 2. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\mathbf{P}\{\xi \geq k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \frac{\alpha(1-p)}{\alpha-p} \left(1 - \frac{p(1-\alpha)}{(\alpha-p)^2 n} + O(n^{-2}) \right). \quad (14)$$

Равенство (14) следует из (13) по формуле Стирлинга.

Следствие 3. Пусть при $n \rightarrow \infty$ и постоянном $p \in (0, 1)$ $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbf{N}$) так, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (k/n) = \beta \in (p, 1)$.

Тогда

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi = k\}}{\mathbf{P}\{\xi \geq k\}} = \frac{\beta - p}{\beta(1-p)} < 1.$$

Заметим, что утверждение следствия 3 легко выводится из результатов работы [1]. Более общее утверждение для случая полиномиального распределения приведено в [2].

Теорема 2. Пусть при $n \rightarrow \infty$ $0 < p = \text{const} < 1$ и $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbf{N}$) так, что $0 < \alpha_0 \leq \alpha = k/n \leq \alpha_1 < p$ (α_0, α_1 — постоянные). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$\mathbf{P}\{\xi \leq k\} \sim \frac{p}{p-\alpha} \sqrt{\frac{1-\alpha}{2\pi\alpha n}} \exp(-nJ) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{m! 2^{2m}} \frac{y_{2m}}{n^m} \right), \quad (15)$$

где коэффициенты y_m ($m = 1, 2, \dots$) определяются из соотношений (7) и (8) и соответствующих начальных условий с заменой α на $1-\alpha$, p на $1-p$ и x_m на y_m .

Для обоснования формулы (15) достаточно заметить, что с учетом произведенной замены она следует из (6).

Следствие 4. Пусть при $n \rightarrow \infty$ и постоянном $p \in (0, 1)$ $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbb{N}$) так, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (k/n) = \beta \in (0, p)$.

Тогда

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi = k\}}{\mathbf{P}\{\xi \leq k\}} = \frac{p - \beta}{p(1 - \beta)} < 1.$$

Рассмотрим теперь задачу оценки вероятности $\mathbf{P}\{\eta \geq k\}$ при условии (2). Для получения разложения этой вероятности в асимптотический степенной ряд по степеням переменной λ^{-1} будем исходить из равенств

$$\mathbf{P}\{\eta = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{\lambda(z-1)}}{z^{n+1}} dz \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (16)$$

Интегрирование в формуле (16) осуществляется по окружности с центром в нуле, пробегаемой в положительном направлении. Далее будем считать, что $R > 1$, где R — радиус указанной окружности. Если $k \in \mathbb{N}$, то из условия $|z| = R > 1$ следует, что

$$\mathbf{P}\{\eta \geq k\} = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}\{\eta = n\} = \frac{1}{2\pi i} \oint \varphi(z) \exp(\lambda \omega_0(z)) dz, \quad (17)$$

где функция φ определяется из (4) и

$$\omega_0(z) = z - 1 - \frac{k}{\lambda} \ln z = z - 1 - \gamma \ln z, \quad (18)$$

если выполнено условие (2).

Теорема 3. Пусть $\lambda \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbb{N}$) так, что выполнено условие (2). Тогда равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta \geq k\} \sim & \frac{1}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\lambda}} \exp(-\lambda\psi_0(\gamma)) \\ & \times \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{m! 2^{2m}} \frac{v_{2m}}{\lambda^m} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\psi_0(\gamma) = 1 - \gamma + \gamma \ln \gamma > 0$ и коэффициенты v_m ($m = 1, 2, \dots$) удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям

$$v_m = \frac{m+1}{i\sqrt{2\gamma}} d_{m+1} - \frac{1}{\gamma-1} \sum_{r=0}^{m-1} d_{m-r} v_r \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (20)$$

с начальным условием $v_0 = 1$. В формуле (20) коэффициенты d_m ($m =$

1, 2, ...) удовлетворяют нелинейным рекуррентным соотношениям

$$d_m = \frac{i}{(m+1)\sqrt{2\gamma}} \left(2d_{m-1} + \sum_{r=2}^{m-1} (m-r+1) d_r d_{m-r+1} \right) \quad (m = 3, 4, \dots) \quad (21)$$

с начальными условиями

$$d_1 = i\sqrt{2\gamma}, \quad d_2 = -\frac{2}{3}.$$

Доказательство. Используем метод перевала, учитывая интегральное представление (17). Точки перевала функции ω_0 удовлетворяют уравнению $\omega'_0(z) = 0$. Из этого уравнения находим: $z = \gamma > 1$.

Будем интегрировать в (17) по окружности $|z| = \gamma$ (пробегаемой в положительном направлении). На этой окружности имеется единственная точка перевала $z = \gamma$ функции ω_0 , для которой $\omega'_0(\gamma) = 0$ и $\omega''_0(\gamma) = 1/\gamma > 0$. Таким образом, точка $z = \gamma$ является точкой перевала первого порядка этой функции, причем из условий $|z| = \gamma$, $z \neq \gamma$ следует, что

$$\operatorname{Re} \omega_0(z) < \omega_0(\gamma) = \gamma - 1 - \gamma \ln \gamma$$

(заметим, что в (18) выбирается та непрерывная ветвь логарифма, которая принимает вещественные значения на вещественной положительной полуоси). Поскольку функции φ и ω_0 аналитичны в некоторой области (круговом кольце), содержащей контур интегрирования в (17) (с разрезом по отрицательной вещественной полуоси), то при $\lambda \rightarrow +\infty$ (см. [1, с. 66]) справедливо асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint \varphi(z) \exp(\lambda \omega_0(z)) dz \\ & \sim \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \exp(\lambda \omega_0(\gamma)) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{m! 2^{2m}} \frac{b_{2m}}{\lambda^m}. \end{aligned} \quad (22)$$

При этом $\omega_0(\gamma) = -\psi_0(\gamma)$, где функция ψ_0 определена в условии теоремы 1. Кроме того, из (2) следует, что разложение (22) имеет место равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$. Коэффициенты b_m ($m = 0, 1, \dots$) в (22) определяются из соотношений (см. [1, с. 66]):

$$b_0 = i\varphi(\gamma) \sqrt{\frac{2}{\omega''_0(\gamma)}} = \frac{i\sqrt{2\gamma}}{\gamma - 1}$$

(последнее равенство следует из (4));

$$\begin{aligned} \omega_0(\gamma + h(u)) &= \omega_0(\gamma) - u^2; \\ \varphi_0(\gamma + h(u)) h'(u) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m u^m. \end{aligned}$$

При этом

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = i \sqrt{\frac{2}{\omega_0''(\gamma)}}.$$

Подставляя значения функций φ и ω_0 и их производных, получаем, что при всех достаточно малых по модулю значениях u

$$\gamma \ln \left(1 + \frac{h(u)}{\gamma} \right) = h(u) + u^2; \quad (23)$$

$$\frac{h'(u)}{\gamma + h(u) - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m u^m; \quad (24)$$

$$h(0) = 0; \quad h'(0) = i \sqrt{2\gamma}.$$

Полагая $v_m = b_m/b_0$ ($m = 0, 1, \dots$), имеем $v_0 = 1$. Из равенства $b_0 = i \sqrt{2\gamma}/(\gamma-1)$ получаем, что асимптотическое разложение (22) можно записать в виде (19).

Продифференцировав по переменной u равенство (23), выводим, что функция h удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$h(u) (h'(u) + 2u) + 2\gamma u = 0. \quad (25)$$

Положим $h(u) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m u^m$, тогда

$$d_0 = h(0) = 0, \quad d_1 = h'(0) = i \sqrt{2\gamma},$$

$$h'(u) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) d_{m+1} u^m.$$

Подставляя в (25) разложения в степенные ряды функций h и h' и перемножая эти ряды по Коши, получаем, что коэффициенты d_m ($m = 1, 2, \dots$) удовлетворяют системе нелинейных рекуррентных соотношений (21). Из равенства (25) нетрудно вывести, что $d_2 = \frac{1}{2} h''(0) = -\frac{2}{3}$.

Записывая (24) в виде

$$(\gamma - 1 + h(u)) \sum_{m=0}^{\infty} b_m u^m = h'(u) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) d_{m+1} u^m$$

и перемножая соответствующие степенные ряды, убеждаемся в том, что коэффициенты b_m ($m = 0, 1, \dots$) удовлетворяют системе линейных рекуррентных соотношений

$$b_m = \frac{1}{\gamma - 1} \left((m+1) d_{m+1} - \sum_{r=0}^{m-1} d_{m-r} b_r \right) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

с начальным условием $b_0 = i \sqrt{2\gamma}/(\gamma-1)$. Подставляя в эти соотношения $b_m = b_0 v_m$ ($m = 0, 1, \dots$), получаем равенства (20) с начальным условием $v_0 = 1$. Теорема 3 доказана.

Следствие 5. При условиях теоремы 3

$$\begin{aligned} P\{\eta \geq k\} = & \frac{1}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi\lambda}} \exp(-\lambda\psi_0(\gamma)) \\ & \times \left(1 - \frac{\gamma^2 + 10\gamma + 1}{12\gamma(\gamma - 1)^2} \lambda^{-1} \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^4 + 308\gamma^3 + 534\gamma^2 + 20\gamma + 1}{288\gamma^2(\gamma - 1)^4} \lambda^{-2} + O(\lambda^{-3}) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Для обоснования формулы (26) используем равенства (21). С учетом заданных начальных условий путем элементарных выкладок последовательно получаем:

$$d_3 = -\frac{i}{9\sqrt{2\gamma}}, \quad d_4 = -\frac{2}{135\gamma}, \quad d_5 = \frac{i}{540\gamma\sqrt{2\gamma}}.$$

Используя теперь равенства (20) с начальным условием $v_0 = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{2(\gamma + 2)i}{3(\gamma - 1)\sqrt{2\gamma}}, \\ v_2 &= -\frac{\gamma^2 + 10\gamma + 1}{6\gamma(\gamma - 1)^2}, \\ v_3 &= \frac{i(8\gamma^3 + 336\gamma^2 + 204\gamma - 8)}{135\gamma(\gamma - 1)^3\sqrt{2\gamma}}, \\ v_4 &= \frac{\gamma^4 + 308\gamma^3 + 534\gamma^2 + 20\gamma + 1}{216\gamma^2(\gamma - 1)^4}. \end{aligned}$$

Теперь равенство (26) следует из (19), если в соответствующем разложении ограничиться первыми тремя слагаемыми с остаточным членом порядка $O(\lambda^{-3})$.

Следствие 6. При условиях теоремы 3

$$\begin{aligned} P\{\eta \geq k\} = & \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \\ & \times \left(1 - \frac{1}{(\gamma - 1)^2} \lambda^{-1} + \frac{\gamma + 2}{(\gamma - 1)^4} \lambda^{-2} + O(\lambda^{-3}) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Формула (27) следует из (26), если учесть, что в условиях теоремы 3 (см. [5, с. 80]):

$$\begin{aligned} k! = (\gamma\lambda)! &= \sqrt{2\pi\gamma\lambda} \gamma^{\gamma\lambda} \lambda^{\gamma\lambda} \exp(-\gamma\lambda) \\ &\times \left(1 + \frac{1}{12\gamma} \lambda^{-1} + \frac{1}{288\gamma^2} \lambda^{-2} + O(\lambda^{-3}) \right). \end{aligned}$$

Следствие 7. Пусть $k \rightarrow \infty$ так, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{k}{\lambda} = \delta > 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Тогда

$$0 < \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{P}\{\eta = k\}}{\mathbf{P}\{\eta \geq k\}} = 1 - \frac{1}{\delta} < 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Санов И. Н. О вероятности больших отклонений случайных величин. — Матем. сб., 1957, т. 42, в. 1, с. 11–44.
2. Тимашев А. Н. Теоремы о больших уклонениях в полиномиальной схеме испытаний. — Дискретн. матем., 1993, т. 5, в. 2, с. 83–89.
3. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматлит, 1962, 200 с.
4. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978, 376 с.
5. Копсон Э. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966, 159 с.

Поступила в редакцию
20.XII.1996

Исправленный вариант
10.VII.1997