Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. А. Хашимов, Г. Р. Абдурахманов, Об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для обобщенных U -статистик, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 69–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:50:10

© 1998 г. ХАШИМОВ Ш. А.* , АБДУРАХМАНОВ Г. Р.*

ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ
В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ
ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ U -СТАТИСТИК

В статье устанавливаются оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для обобщенных невырожденных U -статистик. Полученная оценка уточняет и обобщает известные ранее результаты в этом направлении.

Ключевые слова и фразы: обобщенная U -статистика, характеристическая функция, нормальное распределение.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — последовательность независимых случайных величин со значениями в каком-либо измеримом пространстве $\mathcal{X}$.

Рассмотрим последовательность статистик

$$U_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} h_{ij}(X_i, X_j), \quad n \geq 2, \quad (1)$$

образованных семейством борелевских функций $\{h_{ij}(x, y), x, y \in \mathcal{X}, i, j = 1, \dots, n, i \neq j\}$, предполагая, что последние могут зависеть от n (и обязательно зависят от n , если они одинаковы при всех $i \neq j, i, j = 1, \dots, n$), а распределения величин X_i могут зависеть от i и n .

Пусть, далее, для всех $i \neq j, n \geq 2$,

$$h_{ij}(x, y) = h_{ji}(y, x), \quad x, y \in \mathcal{X}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{E}|h_{ij}(X_i, X_j)| < \infty, \quad \mathbf{E}h_{ij}(X_i, X_j) = 0. \quad (1b)$$

Статистики вида (1) назовем обобщенными U -статистиками (степени 2), а функции $h_{ij}(x, y)$ — их ядрами. Для классической модели U -статистик (впервые подробно рассмотренных в [1]), порожденных одной бесконечной последовательностью независимых величин $X_1, X_2, \dots$ и одним фиксированным симметричным ядром $h(x, y)$, известны аналоги многих предельных теорем для сумм независимых случайных величин.

В частности, в работе [1] при условии $\mathbf{E}h^2(X_1, X_2) < \infty$ в случае, когда $X_1, X_2, \dots$ одинаково распределены и ядро невырождено, т.е.

$$\mathbf{DE}[h(X_1, X_2) | X_1] \neq 0, \quad (2)$$

*Институт математики АН РУз, ул. Ф. Ходжаева, 29, 700143 Ташкент, Узбекистан.

установлена центральная предельная теорема (ц.п.т.) для U -статистик. Там же получена ц.п.т. и для U -статистик от различно распределенных величин. Позднее ц.п.т. была доказана при условии (2) и условии конечности левой части (2) и момента $E|h(X_1, X_2)|^{4/3}$ (см. [2, теоремы 1 и 4.2.2]).

Далее на протяжении многих лет рядом авторов с той или иной степенью точности и при различных моментных условиях оценивалась скорость сходимости в ц.п.т. для классической модели U -статистик степени $r \geq 2$ (см., например, работы [3]–[7], а также [2]).

В случае обобщенной модели U -статистик со степенью $r \geq 2$ предельные распределения изучались в работах [8]–[12]. В работе [13] получена равномерная оценка в ц.п.т. при условии

$$E h_{ij}^2(X_i, X_j) < \infty \quad \text{для всех } i \neq j \quad (3)$$

в случае, когда хотя бы одно ядро $h_{ij}(x, y)$ является невырожденным, т.е. для него верно условие типа (2).

В работе [11] была доказана асимптотическая нормальность обобщенных U -статистик при более слабом требовании, чем (3):

$$\sup_{n \geq 2} \max_{1 \leq i < j \leq n} E |h_{ij}(X_i, X_j)|^{4/3} I(|h_{ij}(X_i, X_j)| > \rho) \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty.$$

Настоящая работа посвящена установлению равномерной оценки скорости сходимости в ц.п.т. для обобщенных U -статистик при нарушении условия (3). Полученная здесь теорема уточняет основной результат работы [11].

Введем обозначения

$$U_{n1} = \left. \begin{aligned} \Psi_{ij}(x) &= E[h_{ij}(X_i, X_j) | X_i = x], \\ \tilde{h}_i(x) &= \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} \Psi_{ij}(x), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{n2} &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \tilde{h}_{ij}(X_i, X_j), \\ \tilde{h}_{ij}(x, y) &= h_{ij}(x, y) - \Psi_{ij}(x) - \Psi_{ij}(y). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} \beta_{in}^2 &= E \tilde{h}_i^2(X_i) = D \tilde{h}_i(X_i), \quad \sigma_m^2 = \sum_{i=1}^m \beta_{in}^2, \\ \beta_n^2 &= \min_{1 \leq i \leq n} \beta_{in}^2, \quad \beta^2 = \inf_{n \geq 2} \beta_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Обозначим также

$$\left. \begin{aligned} \mu_p^{(n)} &= \max_{1 \leq i \neq j \leq n} E |h_{ij}(X_i, X_j)|^p, \quad \mu_p = \sup_{n \geq 2} \mu_p^{(n)}, \\ \nu_q^{(n)} &= \max_{1 \leq i \neq j \leq n} E |\Psi_{ij}(X_i)|^q, \quad \nu_q = \sup_{n \geq 2} \nu_q^{(n)}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$B_p^{(n)} = \frac{[\mu_p^{(n)}]^{1/p}}{\beta_n}, \quad \Gamma_q^{(n)} = \frac{[\nu_q^{(n)}]^{1/q}}{\beta_n}. \quad (8)$$

Условимся далее через $C(\cdot)$ обозначать постоянные, зависящие только от параметра, стоящего в скобках, через C — абсолютные постоянные, а через $\mathcal{N}(\cdot)$ — функцию распределения стандартного нормального закона.

Теорема. Пусть $\beta_n^2 \neq 0$, $\frac{1}{3} < \gamma \leq \frac{2}{3}$, $0 < \delta \leq 1$. Тогда при всех $n \geq 2$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sup_x |\mathbf{P}\{n\sigma_n^{-1}2^{-1}U_n < x\} - \mathcal{N}(x)| \\ &\leq C(\delta) [\Gamma_{2+\delta}^{(n)}]^{2+\delta} n^{-\delta/2} + C(\gamma) [\Gamma_2^{(n)}]^{2\gamma} [B_{1+\gamma}^{(n)}]^{1+\gamma} n^{-(3\gamma-1)/2}. \end{aligned}$$

Из данной теоремы, обозначений (6)–(8) и неравенств $\nu_p^{(n)} \leq \nu_p \leq \mu_p$, $\mu_p^{(n)} \leq \mu_p$, $p \geq 2$, вытекают три следствия.

Следствие 1. Пусть $\beta_n^2 \neq 0$, $\nu_3^{(n)} < \infty$, $\mu_{5/3}^{(n)} < \infty$. Тогда при $n \geq 2$ верна оценка

$$\Delta_n \leq C\beta_n^{-3} (\nu_3^{(n)} + (\nu_2^{(n)})^{2/3} \mu_{5/3}^{(n)}) n^{-1/2}.$$

Следствие 2. Если $\beta^2 \neq 0$ и $\nu_{2+\delta} < \infty$, $\mu_{(4+\delta)/3} < \infty$ для какого-либо δ , $0 < \delta \leq 1$, то

$$\Delta_n = O(n^{-\delta/2}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Следствие 3. Если $\beta^2 \neq 0$ и $\mu_{2+\delta} < \infty$ для некоторого δ , $0 < \delta \leq 1$, то выполняется соотношение (9).

Заметим, что результаты теоремы и следствий 1–3 сохраняются и для классической модели U -статистик. В частности, для такой модели следствие 1 превращается (с точностью до постоянной C) в теорему 6.2.3 из [2], а следствие 3 — в теорему 6.2.4 из [2] (с $\delta \neq 0$).

Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (1а), (1б). Тогда справедливы следующие утверждения.

1°. Статистика U_n представима в виде $U_n = 2U_{n1} + U_{n2}$, где U_{n1} , U_{n2} определены равенствами (4), (5).

2°. U_{n2} есть U -статистика с вырожденными ядрами, т.е.

$$\mathbf{P}\left\{\mathbf{E}[\tilde{h}_{ij}(X_i, X_j) \mid X_i] = 0\right\} = 1.$$

3°. Для любого $p \geq 1$

$$\mathbf{E}|\tilde{h}_i(X_i)|^p \leq \nu_p^{(n)}, \quad \mathbf{E}|\tilde{h}_{ij}(X_i, X_j)|^p \leq 3^p \mu_p^{(n)}.$$

4°. Для любого p , $1 \leq p \leq 2$,

$$E|n(n-1)U_{n2}|^p \leq C(p)n^2\mu_p^{(n)}.$$

Доказательство. Утверждения 1°–3° почти очевидны. Утверждение 4° вытекает из 2°, 3° и двукратного применения теоремы [14].

Лемма 2 (см. [2, с. 205]). Для любого вещественного x и α , $0 < \alpha \leq 1$, при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$\left| e^{ix} - \sum_{j=0}^k \frac{(ix)^j}{j!} \right| \leq 2^{1-\alpha} \alpha \prod_{j=0}^k \frac{1}{\alpha + j} |x|^{k+\alpha}.$$

Доказательство сразу вытекает из неравенств

$$\begin{aligned} |e^{ix} - 1| &\leq |e^{ix} - 1|^{1-\alpha} |e^{ix} - 1|^\alpha \leq 2^{1-\alpha} |x|^\alpha, \\ \left| e^{ix} - \sum_{j=0}^k \frac{(ix)^j}{j!} \right| &\leq \int_0^{|x|} \left| e^{ix} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(ix)^j}{j!} \right| dx, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $E\xi_i = 0$, $b_{jn}^2 = D\xi_j > 0$, $d_{jn}^{2+\delta} = E|\xi_j|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, $j = 1, \dots, n$. Пусть, далее,

$$\begin{aligned} b_n &= \min\{b_{1n}, \dots, b_{nn}\}, & d_n &= \max\{d_{1n}, \dots, d_{nn}\}, \\ B_n^2 &= b_{1n}^2 + \dots + b_{nn}^2, \end{aligned}$$

$f(t)$ — характеристическая функция суммы $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/B_n$. Тогда при условии $a_n = (d_n/b_n)^{2+\delta} n^{-\delta/2} \leq C_0$ в области $D_n = \{t: |t| \leq C_0 d_n^{-(2+\delta)} b_n^2 B_n^\delta\}$, $C_0 = 2^\delta/8$, справедлива оценка

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq \frac{4}{2^\delta 3} e^{-t^2/3} \left(\frac{d_n}{b_n} \right)^{2+\delta} \frac{|t|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

Доказательство. Как и при получении оценок для $f_n(t)$ в случае $\delta = 1$ (см., например, [15, гл. V, лемма 1]), запишем разложение для характеристической функции (х.ф.) $f_{jn}(t)$ величины ξ_j/B_n :

$$f_{jn}(t) = 1 - \frac{t^2 b_{jn}^2}{2B_n^2} + R_{jn}(t), \quad (10)$$

в котором, согласно лемме 2 и неравенствам

$$b_n \leq b_{jn} \leq d_{jn} \leq d_n, \quad (11)$$

для $R_{jn}(t)$ имеет место оценка

$$|R_{jn}(t)| \leq \frac{2^{1-\delta} |t|^{2+\delta} d_{jn}^{2+\delta}}{2B_n^{2+\delta}} \leq \frac{t^2 b_{jn}^2}{2^\delta B_n^2} |\tilde{R}_n(t)|, \quad (12)$$

где

$$\tilde{R}_n(t) = \frac{t^\delta d_n^{2+\delta}}{b_n^2 B_n^\delta}. \quad (13)$$

Поскольку $|t|^\delta \leq \max\{1, |t|\}$ и, в силу (11),

$$b_n \sqrt{n} \leq B_n \leq d_n \sqrt{n}, \quad (14)$$

то при условии $a_n \leq C_0 = 2^\delta/8$ получаем при $t \in D_n$

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_n(t)| &\leq |t|^\delta a_n, \quad |\tilde{R}_n(t)| \leq C_0, \\ \frac{t^2 b_{jn}^2}{B_n^2} &\leq C_0^2 \frac{b_n^4 B_n^{2\delta} d_n^2}{d_n^{4+2\delta} B_n^2} \leq C_0^2 \frac{n^\delta b_n^2}{n d_n^2} \leq C_0^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда на основании (10), (12), (13) $|f_{jn}(t) - 1| \leq 2^{-1} C_0^2 + 2^{-\delta} C_0^3 < \frac{1}{2}$, откуда получаем

$$\ln f_{jn}(t) = -\frac{t^2 b_{jn}^2}{B_n^2} + \tilde{R}_{jn}(t), \quad (16)$$

где с учетом (12)

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_{jn}(t)| &\leq |R_{jn}(t)| + 2 \left(\frac{t^2 b_{jn}^2}{2 B_n^2} \right)^2 + 2 R_{jn}^2(t) \\ &\leq \frac{t^2 b_{jn}^2}{2^\delta B_n^2} \left[|\tilde{R}_n(t)| + \frac{t^4 b_{jn}^4}{2 B_n^4} + 2 \frac{t^4 b_{jn}^4}{2^{2\delta} B_n^4} \tilde{R}_n^2(t) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (11), (13), (14) и определения области D_n имеем при $t \in D_n$

$$\begin{aligned} \frac{t^2 b_{jn}^2}{B_n^2} &\leq \frac{t^\delta d_n^{2+\delta}}{b_n^2 B_n^\delta} \left(C_0 \frac{b_n^2 B_n^\delta}{d_n^{2+\delta}} \right)^{2-\delta} \frac{b_n^2 d_n^2}{d_n^{2+\delta} B_n^{2-\delta}} \\ &\leq C_0^{2-\delta} |\tilde{R}_n(t)| \left(\frac{b_n}{d_n} \right)^{4-\delta} n^{(2-\delta)(1-\delta)/2} \leq C_0 |\tilde{R}_n(t)|. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (15) и (17) выводим

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_{jn}(t)| &\leq \frac{t^2 b_{jn}^2}{2^\delta B_n^2} |\tilde{R}_n(t)| \left(1 + \frac{C_0}{2^{1-\delta}} + 2^{1-\delta} C_0^4 \right) \\ &\leq \frac{t^2 b_{jn}^2}{2^\delta B_n^2} |\tilde{R}_n(t)| \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \right) \leq \frac{4}{3} \frac{t^2 b_{jn}^2}{2^\delta B_n^2} |\tilde{R}_n(t)|. \end{aligned}$$

Суммируя (16) по $j = 1, \dots, n$ и используя последнее неравенство, устанавливаем

$$\ln f_n(t) = -\frac{t^2}{2} + R_n(t), \quad |R_n(t)| \leq \frac{4}{3} \frac{t^2}{2^\delta} |\tilde{R}_n(t)|. \quad (18)$$

Оценка (18) с учетом (15) и неравенства $|e^x - 1| \leq e^{|x|}$, справедливого для любого комплексного x , приводит к утверждению леммы 3.

Лемма 4. Для характеристической функции $f_n(t)$ из леммы 3 при $t \in D_n$ выполняется неравенство

$$|f_n(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \frac{|t|^{1+\delta}}{8} \right\}.$$

Доказательство. Снова используем разложение (10), в котором

$$|R_{jn}(t)| \leq \frac{|t|^{1+\delta} b_{jn}^2}{2^\delta B_n^2} |\bar{R}_n(t)|, \quad \bar{R}_n(t) = \frac{t d_n^{2+\delta}}{b_n^2 B_n^\delta}. \quad (19)$$

Далее, из последнего неравенства в (15), полученного без учета условия $a_n \leq C_0$, видно, что $t^2 b_{jn}^2 / B_n^2 < 1$, откуда в силу (10) имеем

$$|f_{jn}(t)| \leq 1 - \frac{t^2 b_{jn}^2}{2 B_n^2} + |R_{jn}(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t^2 b_{jn}^2}{2 B_n^2} + |R_{jn}(t)| \right\}. \quad (20)$$

Из (19) и (20) с учетом определения B_n^2 и D_n вытекает, что

$$|f_n(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \left(\frac{|t|^{1+\delta}}{2^\delta} \right) |\bar{R}_n(t)| \right\},$$

где $|\bar{R}_n(t)| \leq 2^\delta / 8$ при $t \in D_n$. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. Утверждение теоремы при $n \leq 8^{2/\delta} 2^{-2} [\Gamma_{2+\delta}^{(n)}]^{2(2+\delta)/\delta}$ вытекает из тривиального неравенства $\Delta n \leq 1 \leq n^{-\delta/2} 8 \cdot 2^{-\delta} [\Gamma_{2+\delta}^{(n)}]^{2+\delta}$.

Поэтому будем предполагать выполненным условие

$$[\Gamma_{2+\delta}^{(n)}]^{2+\delta} n^{-\delta/2} \leq \frac{2^\delta}{8} \quad (21)$$

(так что при $\beta_n^2 \neq 0$ в силу (8) $\nu_{2+\delta}^{(n)} < \infty$). Будем использовать метод доказательства теоремы 6.2.3 из [2], основанный, в свою очередь, на идеях работы [5].

Введем обозначения

$$v_j = \sigma_n^{-1} \tilde{h}_j(X_j), \quad w_{jk} = \sigma_n^{-1} (n-1)^{-1} \tilde{h}_{jk}(X_j, X_k), \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} v(m) &= \sum_{j=1}^m v_j, & w(m) &= \sum_{1 \leq j \neq k \leq m} w_{jk}, \\ v &= v(n), & w &= w(n). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Принимая во внимание (4), (5), (22), (23) и утверждение 1° леммы 1, введем х.ф.

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E} \exp \{ it n \sigma_n^{-1} 2^{-1} U_n \} = \mathbb{E} \exp \{ it(v + w) \}.$$

Согласно известному неравенству (см., например, теорему 2 гл. V в [15]),

$$\Delta_n \leq \int_0^{T_n} \frac{|\varphi_n(t) - e^{-t^2/2}|}{t} dt + \frac{C}{T_n}. \quad (24)$$

Обозначим через $J(T_n)$ интеграл в правой части (24) и положим

$$T_n = \frac{2^\delta \beta_n^2 \sigma_n^\delta}{8\nu_{2+\delta}^{(n)}}, \quad (25)$$

где $\beta_n, \nu_{2+\delta}^{(n)}$ определены в (6), (7).

Тогда можем записать

$$J(T_n) \leq \int_0^{T_n} \frac{|\mathbf{E} e^{itv} - e^{-t^2/2}|}{t} dt + \int_0^{T_n} \frac{\mathbf{E} e^{itv} (e^{itw} - 1)}{t} dt = J_1 + J_2. \quad (26)$$

На основании леммы 3, условия (21), обозначений (6), (8) и (25) получаем при $t \in [0, T_n]$

$$J_1 \leq \frac{4}{2^\delta \cdot 3} \frac{\nu_{2+\delta}^{(n)}}{\beta_n^{2+\delta} n^{\delta/2}} \int_0^\infty t^{1+\delta} e^{-t^2/3} dt \leq C(\delta) [\Gamma_{2+\delta}^{(n)}]^{2+\delta} n^{-\delta/2}. \quad (27)$$

Для оценки подынтегрального выражения в J_2 положим при $m = 1, \dots, n-1$

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_m &= w - w(n-m), & \bar{v}_m &= v - v(n-m), \\ w_j(n-m) &= \sum_{\substack{k=1, \dots, n-m \\ k \neq j}} (w_{jk} + w_{kj}) = 2 \sum_{\substack{k=1, \dots, n-m \\ k \neq j}} w_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

и напомним

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{itv} (e^{itw} - 1) &= \mathbf{E} e^{itv} [e^{itw(n-m)} - 1 - itw(n-m)] \\ &\quad + \mathbf{E} e^{itv} e^{itw(n-m)} (e^{it\bar{w}_m} - 1 - it\bar{w}_m) \\ &\quad + it \mathbf{E} e^{itv} w(n-m) + it \mathbf{E} e^{itv} e^{itw(n-m)} \bar{w}_m \\ &= S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) + S_4(t). \end{aligned} \quad (29)$$

Согласно лемме 2 и в силу независимости величин $w(n-m)$ и $\bar{v}_m$,

$$|S_1(t)| \leq 2^{1-\gamma} \mathbf{E} |w(n-m)|^{1+\gamma} |\mathbf{E} e^{it\bar{v}_m}| |t|^{1+\gamma}, \quad (30)$$

$$|S_2(t)| \leq 2^{1-\gamma} \mathbf{E} |\bar{w}_m|^{1+\gamma} |t|^{1+\gamma}. \quad (31)$$

Далее, из (22), (23), (28) с учетом симметрии w_{jk} относительно j, k и независимости величин $\{w_{jk}, v_j, v_k, w_{jl}\}$ и $\{v_i, i \neq j, k, l\}$ устанавливаем, что

$$|S_3(t)| \leq |t| \sum_{1 \leq i \neq k \leq n-m} |\mathbf{E} w_{jk} e^{itv_j} e^{itv_k}| |\mathbf{E} e^{it(v-v_j-v_k)}|, \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
|S_4(t)| \leq & |t| \sum_{n-m \leq j \neq k \leq n} |E w_{jk} e^{itv_j} e^{itv_k}| |E e^{it(\bar{v}_m - v_j - v_k)}| \\
& + 2|t| \sum_{j=1}^{n-m} \sum_{k=n-m+1}^n |E w_{jk} e^{itv_j} e^{itv_k} e^{it\bar{w}_j}| \\
& \times \exp \{it[v(n-m) + w(n-m) - v_j - w_j(n-m)]\} \Big| \\
& \times |E e^{it(\bar{v}_m - v_k)}| = S_{41}(t) + S_{42}(t). \quad (33)
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$a_n(t) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E |w_{jk} (e^{itv_j} - 1)(e^{itv_k} - 1)|, \quad (34)$$

$$b_n(t) = \sum_{i=1}^{n-m} \sum_{k=n-m+1}^n E |w_{jk} (e^{itw_j(n-m)} - 1)(e^{itv_k} - 1)|, \quad (35)$$

$$C_n(t) = \max_{1 \leq l \leq n} |E e^{itv_l} - 1|. \quad (36)$$

Поскольку в силу (22) и утверждения 2° леммы 1 для любой функции $f(\cdot)$ при $i_1 \neq i_2$

$$E w_{i_1 i_2} f(v_{i_3}, w_{i_4 i_5}, i_3, i_4, i_5 = 1, \dots, n, i_3, i_4, i_5 \neq i_1) = 0,$$

то из (32)–(36) и независимости величин $\{v_j\}$ вытекают неравенства

$$|S_3(t)| \leq |t| a_n(t) [1 - C_n(t)]^{-2} |E e^{itv}|, \quad (37)$$

$$|S_{41}(t)| \leq |t| a_n(t) [1 - C_n(t)]^{-2} |E e^{it\bar{v}_m}|, \quad (38)$$

$$|S_{42}(t)| \leq |t| [a_n(t) + 2b_n(t)] [1 - C_n(t)]^{-1} |E e^{it\bar{v}_m}|. \quad (39)$$

Для дальнейших оценок величин $S_1(t) - S_4(t)$ нам понадобится ряд вспомогательных предложений.

Предложение 1. Для любых $q, p \geq 1$

(а) $E|v_j|^q \leq \sigma_n^{-q} \nu_q^{(n)}(n)$; (б) $E|w_{jk}|^p \leq 6^{-p} \sigma_n^{-p} n^{-p} \mu_p^{(n)}$.

Это вытекает из (22) и утверждения 3° леммы 1.

Предложение 2. Для любых $p, 1 < p \leq 2$, и $m = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n$ справедливы неравенства

(а) $E|w(n-m)|^p \leq C(p) \sigma_n^{-p} n^{-p+2} \mu_p^{(n)}$,

(б) $E|\bar{w}_m|^p \leq C(p) \sigma_n^{-p} n^{-p+1} m \mu_p^{(n)}$,

(с) $E|w_j(n-m)|^p \leq C(p) \sigma_n^{-p} n^{-p+1} \mu_p^{(n)}$.

Здесь (а) непосредственно следует из утверждения 4° леммы 1, примененного к статистике U_{n-m} , а (б) и (с) выводятся аналогично.

Предложение 3. Для любых $i = 1, \dots, n, q > 2$ верны неравенства

(а) $\beta_n \leq \beta_{in} \leq \sqrt{\nu_2^{(n)}} \leq (\nu_q^{(n)})^{1/q}$; (б) $1 \leq \Gamma_2^{(n)} \leq \Gamma_q^{(n)}$.

Эти неравенства вытекают из (4), (6)–(8) и утверждения 3° леммы 1.

Предложение 4. Для любых $m = 1, \dots, n-1$, $n \geq 2$

(а) $\beta_n^2 n \leq \sigma_n^2 \leq \nu_2^{(n)}(n)$; (б) $\beta_n^2 m \leq \sigma_n^2 - \sigma_{n-m}^2$.

Это следует из (6) и предложения 3(а).

Предложение 5. При $0 < \delta < 1$, $\frac{1}{3} < \gamma \leq \frac{2}{3}$ для величины (34) справедлива оценка

$$|a_n(t)| \leq \frac{2}{3} \left[\frac{\nu_{2+\delta}^{(n)} n}{\sigma_n^{2+\delta}} |t|^{2+\delta} + \frac{(\nu_2^{(n)})^\gamma \mu_{1+\gamma}^{(n)} n}{\sigma_n^{3\gamma+1}} |t|^{2\gamma} \right].$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha = \min \{ (2+\delta) \gamma (1+\gamma)^{-1}, 1 \},$$

$$\bar{\alpha} = \max \{ 0, (2+\delta) \gamma (1+\gamma)^{-1} - 1 \}, \quad \bar{\gamma} = 2\gamma(1+\gamma)^{-1},$$

J_{jk} — индикаторная функция множества $\{v_k \leq v_j\}$. Учитывая, что

$$\alpha + \bar{\alpha} = (2+\delta) \gamma (1+\gamma)^{-1}, \quad \bar{\alpha} + \bar{\gamma} \leq 1, \quad \alpha + \bar{\alpha} + \bar{\gamma} \geq 1, \quad 1 - J_{jk} \leq J_{kj}.$$

получаем в силу леммы 2

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} |w_{jk}(e^{itv_j} - 1)(e^{itv_k} - 1)| \\ & \leq 2^{1-\alpha} 2^{1-\bar{\alpha}-\bar{\gamma}} \mathbf{E} |w_{jk}| [|tv_j|^\alpha |tv_k|^{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}} J_{jk} + |tv_j|^{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}} |tv_k|^\alpha J_{kj}] \\ & \leq 2|t|^{[(2+\delta)\gamma+2\gamma]/(1+\gamma)} \mathbf{E} |w_{jk}| \\ & \quad \times [|v_j|^{(2+\delta)\gamma/(1+\gamma)} |v_k|^{2\gamma/(1+\gamma)} + |v_j|^{2\gamma/(1+\gamma)} |v_k|^{(2+\delta)\gamma/(1+\gamma)}]. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь неравенством Гёльдера и независимостью величин v_j, v_k при $j = k$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |w_{jk}(e^{itv_j} - 1)(e^{itv_k} - 1)| & \leq 2|t|^{[(2+\delta)\gamma+2\gamma]/(1+\gamma)} (\mathbf{E} |w_{jk}|^{1+\gamma})^{1/(1+\gamma)} \\ & \quad \times \left[(\mathbf{E} |v_j|^{2+\delta} \mathbf{E} v_k^2)^{\gamma/(1+\gamma)} + (\mathbf{E} v_j^2 \mathbf{E} |v_k|^{2+\delta})^{\gamma/(1+\gamma)} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Из (34), (40) и предложений 1(а), (б) выводим

$$\begin{aligned} |a_n(t)| & \leq \frac{2}{3} |t|^{[(2+\delta)\gamma+2\gamma]/(1+\gamma)} [\nu_{2+\delta}^{(n)}]^{\gamma/(1+\gamma)} \\ & \quad \times (\nu_2^{(n)})^{\gamma/(1+\gamma)} [\mu_{1+\gamma}^{(n)}]^{1/(1+\gamma)} \left(\frac{n}{\sigma_n^{2+\delta}} \right)^{\gamma/(1+\gamma)} \left(\frac{n}{\sigma_n^{3\gamma+1}} \right)^{1/(1+\gamma)}. \end{aligned}$$

Последняя оценка и неравенство $|ab| \leq |a|^p + |b|^q$, справедливое при $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, доказывают предложение 5.

Предложение 6. При $0 < \gamma \leq 1$ для величин (35) верна оценка

$$|b_n(t)| \leq C(\gamma) |t|^{(3\gamma+\gamma^2)/(1+\gamma)} \mu_{1+\gamma}^{(n)} [\nu_2^{(n)}]^{2\gamma/(1+\gamma)} \frac{n^{1-\gamma}}{\sigma_n^{1+\gamma}} \left(\frac{n}{\sigma_n^2} \right)^{\gamma/(1+\gamma)}.$$

Доказательство. Применяя лемму 2, а затем неравенство Гёльдера, с учетом (28) и независимости величин $w_j(n-m)$, v_k при $j \leq n-m$, $k > n-m$ получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} |w_{jk}(e^{itw_j(n-m)} - 1)(e^{itv_k} - 1)| \\ & \leq 2^{1-\gamma} 2^{1-2\gamma/(1+\gamma)} |t|^{\gamma+2\gamma/(1+\gamma)} \mathbf{E} |w_{jk}| |w_j(n-m)|^\gamma |v_k|^{2\gamma/(1+\gamma)} \\ & \leq 2\sqrt{2} |t|^{(3\gamma+\gamma^2)/(1+\gamma)} (\mathbf{E} |w_{jk}|^{1+\gamma})^{1/(1+\gamma)} \\ & \quad \times (\mathbf{E} |w_j(n-m)|^{1+\gamma})^{\gamma/(1+\gamma)} (\mathbf{E} v_k^2)^{\gamma/(1+\gamma)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Соотношения (35), (41) и предложения 1(a), 1(b), 2(b) доказывают предложение 6.

Предложение 7. При $\beta_n^2 \neq 0$, $\nu_{2+\delta}^{(n)} < \infty$, $0 < \delta \leq 1$, $t \in [0, T_n]$ величина (36) удовлетворяет неравенству $|C_n(t)| \leq \frac{1}{4}$.

Доказательство вытекает из соотношения

$$|C_n(t)| \leq \max_{1 \leq l \leq n} T_n \sqrt{\mathbf{E} v_l^2},$$

обозначения (25) и предложений 1(a), 3(a).

Предложение 8. Пусть $\beta_n^2 \neq 0$, выполнено условие (21) и

$$m = \min \left\{ n-1, \sigma_n^2 \beta_n^{-2} |t|^{-(1+\gamma+\varepsilon)} + 1 \right\}, \quad \varepsilon = \frac{1-\gamma}{2}. \quad (42)$$

Тогда при $t \in [0, T_n]$ верны оценки

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & |\mathbf{E} e^{itv}| \leq e^{1/8} e^{-3t^2/8}, \\ \text{(b)} \quad & |\mathbf{E} e^{it\bar{v}_m}| \leq e^{1/8} (e^{-9t^2/32} + e^{-3t^2/8}). \end{aligned}$$

Доказательство. Оценка (a) следует из леммы 4, обозначений (6), (22), (23), (25), предложения 1(a) и неравенства

$$|t|^{1+\delta} \leq \max\{1, t^2\}.$$

Далее, обозначим через $\Psi_m(\cdot)$ х.ф. величины $\bar{\sigma}_m^{-1} \sum_{i=n-m+1}^n \tilde{h}_i(X_i)$, где $\bar{\sigma}_m^2 = \mathbf{D}[\sum_{i=n-m+1}^n \tilde{h}_i(X_i)]$. Нетрудно видеть, что, согласно (6), (22), (28),

$$\mathbf{E} e^{it\bar{v}_m} = \psi_m(\tau_n), \quad \tau_n = \frac{t \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{n-m}^2}}{\sigma_n}, \quad (43)$$

и, кроме того, в силу (6), (25) и утверждения 3° леммы 1

$$0 < \tau_n \leq \frac{2^\delta}{8} \frac{\bar{\beta}_n^2}{\nu_{2+\delta}^{(n)}} \bar{\sigma}_m^\delta \left(\frac{\bar{\sigma}_m}{\sigma_n} \right)^{1-\delta} \leq \frac{2^\delta \bar{\beta}_n^2}{\bar{\nu}_{2+\delta}^{(n)}} \bar{\sigma}_m^\delta,$$

где $\bar{\beta}_m^2 = \min \mathbf{D} \tilde{h}_i(X_i)$, $\bar{\nu}_{2+\delta}^{(m)} = \max \mathbf{E} |\tilde{h}_i(X_i)|^{2+\delta}$, а min и max берутся по $i = n-m+1, \dots, n$.

Тогда к х.ф. $\psi_m(\tau_n)$ можно применить оценку (а), откуда следует, что

$$|\psi_m(\tau_n)| \leq e^{1/8} e^{-3\tau_n^2/8},$$

или же, на основании (43),

$$|E e^{it\bar{v}_m}| \leq e^{1/8} \exp \left\{ -\frac{3}{8} t^2 \frac{\sigma_n^2 - \sigma_{n-m}^2}{\sigma_n^2} \right\}. \quad (44)$$

Теперь заметим, что при $m = n - 1$ благодаря предложениям 3(а), 4(а)

$$(\sigma_n^2 - \sigma_{n-m}^2) \sigma_m^{-2} = 1 - \beta_{1n}^2 \sigma_n^{-2} \geq 1 - \frac{(\nu_{2+\delta}^{(n)})^{2/(2+\delta)}}{\beta_n^2 n},$$

а при $m = [\sigma_n^2 \beta_n^{-2} |t|^{-(1+\gamma+\varepsilon)}] + 1$ в силу предложения 4(б)

$$(\sigma_n^2 - \sigma_{n-m}^2) \sigma_m^{-2} \geq \beta_n^2 m \sigma_n^{-2} \geq |t|^{-(1+\gamma+\varepsilon)}.$$

Последние два неравенства с учетом (8) и условия (21) дают

$$(\sigma_n^2 - \sigma_{n-m}^2) \sigma_m^{-2} \geq \min \left\{ \frac{3}{4}, |t|^{-(1+\gamma+\varepsilon)} \right\}. \quad (45)$$

Из неравенств (44), (45) и равенства $\varepsilon = (1 - \gamma)/2$ следует оценка (б). Предложение 8 доказано.

Перейдем к получению окончательных оценок для слагаемых из правой части (29), всюду пользуясь обозначениями (8) и предполагая, что выполнено условие (21), $t \in [0, T_n]$ и m определяется равенством (42). В силу (30) и предложений 2(а), 4(а), 8(б),

$$\begin{aligned} |S_1(t)| &\leq C(\gamma) \sigma_n^{-(1+\gamma)} n^{1-\gamma} \mu_{1+\gamma}^{(n)} t^{1+\gamma} (e^{-9t^2/32} + e^{-3t^2/8}) \\ &\leq C(\gamma) [B_{1+\gamma}^{(n)}]^{1+\gamma} n^{-(3\gamma-1)/2} t^{1+\gamma} (e^{-9t^2/32} + e^{-3t^2/8}). \end{aligned} \quad (46)$$

Далее, из (31) и предложения 2(б)

$$\begin{aligned} |S_2(t)| &\leq C(\gamma) \sigma_n^{-(1+\gamma)} n^{1-\gamma} \mu_{1+\gamma}^{(n)} t^{1+\gamma} \\ &\quad \times \min \left\{ \frac{n-1}{n}, \frac{\sigma_n^2 \beta_n^{-2} t^{-(1+\gamma+\varepsilon)} + 1}{n} \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Поскольку в силу (25), предложения 4(а) и условия (21) $1 \leq T_n \leq \sqrt{n}$ и, значит, $\sigma_n^2 \beta_n^{-2} t^{-(1+\gamma+\varepsilon)} \geq n T_n^{-2} \geq 1$, то, согласно (47)

$$|S_2(t)| \leq C(\gamma) \sigma_n^{-(1+\gamma)} n^{1-\gamma} \mu_{1+\gamma}^{(n)} t^{1+\gamma} \min \left\{ 1, \frac{2\sigma_n^2 \beta_n^{-2} t^{-(1+\gamma+\varepsilon)}}{n} \right\}.$$

Отсюда, применяя нижнюю и верхнюю оценки для σ_n в предложении 4(а), устанавливаем

$$|S_2(t)| \leq C(\gamma) [B_{1+\gamma}^{(n)}]^{1+\gamma} \left(1 + [\Gamma_2^{(n)}]^{1-\gamma}\right) \min\{t^{1+\gamma}, t^{-\varepsilon}\}. \quad (48)$$

Теперь на основании неравенства (37) и предложений 5, 7, 8(а) получаем

$$|S_3(t)| \leq C \left([\Gamma_{2+\delta}^{(n)}]^{2+\delta} n^{-\delta/2} t^{3-\delta} + [\Gamma_2^{(n)}]^{2\gamma} [B_{1+\gamma}^{(n)}]^{1+\gamma} n^{-(3\gamma-1)/2} t^{1+2\gamma} \right) e^{-3t^2/8}. \quad (49)$$

Наконец, из (33), (38), (39), и предложений 5–7 и 8(б) выводим

$$\begin{aligned} |S_4(t)| \leq & \left\{ C([\Gamma_{2+\delta}^{(n)}]^{2+\delta} n^{-\delta/2} t^{3+\delta} + [\Gamma_2^{(n)}]^{2\gamma} \right. \\ & \times [B_{1+\gamma}^{(n)}]^{1+\gamma} n^{-(3\gamma-1)/2} t^{1+2\gamma}) \\ & + C(\gamma) [\Gamma_2^{(n)}]^{2\gamma/(1+\gamma)} [B_{1+\gamma}^{(n)}]^{1+\gamma} \\ & \times n^{-(3\gamma-1)/2} t^{1+(3\gamma+\gamma^2)/(1+\gamma)} \left. \right\} (e^{-9t^2/16} + e^{-3t^2/8}). \quad (50) \end{aligned}$$

Вернемся к интегралу J_2 из неравенства (26). Согласно (29),

$$J_2 \leq \sum_{i=1}^4 \int_0^{T_n} \frac{1}{t} |S_i(t)| dt,$$

откуда на основании оценок (46), (48)–(50) и неравенства

$$\max \left\{ 1, [\Gamma_2^{(n)}]^{1-\gamma}, [\Gamma_2^{(n)}]^{2\gamma/(1+\gamma)} \right\} \leq [\Gamma_2^{(n)}]^{2\gamma}$$

при $\frac{1}{3} < \gamma \leq \frac{2}{3}$, вытекающего из предложения 3(б), получаем

$$J_2 \leq C(\delta) [\Gamma_{2+\delta}^{(n)}]^{2+\delta} n^{-\delta/2} + C(\gamma) [\Gamma_2^{(n)}]^{2\gamma} [B_{1+\gamma}^{(n)}]^{1+\gamma} n^{-(3\gamma-1)/2}. \quad (51)$$

Заметим еще, что в силу (8), (25) и предложения 4(а)

$$T_n \geq \frac{n^{\delta/2}}{[\Gamma_{2+\delta}^{(n)}]^{2+\delta}}. \quad (52)$$

Соотношения (24), (26), (27), (51), (52) завершают доказательство теоремы.

Авторы благодарны рецензенту за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution. — *Ann. Math. Statist.*, 1948, v. 19, p. 293–325. (Перев. на русск. яз.: Сб. перев. «Математика», 1958, т. 2, № 3, с. 129–158.)
2. *Королюк В. С., Боровский Ю. В.* Теория U -статистик. Киев: Наукова думка, 1989, 383 с.
3. *Hsu P. Z.* The approximate distribution of mean and variance of a sample of independent variables. — *Ann. Math. Statist.*, 1945, v. 16, № 1, p. 1–29.
4. *Bickel P. J.* Edgeworth expansions in non-parametric statistics. — *Ann. Math. Statist.*, 1974, v. 2, № 1, p. 1–20.
5. *Chen Y. K., Wierman T.* On the Berry–Esseen theorem for U -statistics. — *Ann. Probab.*, 1977, v. 5, № 1, p. 136–139.
6. *Callaert H., Janssen P.* The Berry–Esseen theorem for U -statistics. — *Ann. Statist.*, 1978, v. 6, № 2, p. 417–421.
7. *Малевиц Т. Л., Абдалимов Б.* Об оценке уклонения распределения U -статистики от нормального распределения. — *Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук*, 1979, № 3, с. 10–13.
8. *Михайлов В. Г.* Центральная предельная теорема для неоднородных U -статистик от конечно-зависимых случайных величин. — *Матем. сб.*, 1975, т. 98, № 4, с. 624–634.
9. *Гирко В. П.* Предельные теоремы для функций случайных величин. Киев: Вища школа, 1983, 207 с.
10. *Хашимов Ш. А.* Предельные теоремы для обобщенных U -статистик и их статистические применения. — *Докл. АН УзССР*, 1984, № 6, с. 5–7.
11. *Малевиц Т. Л., Абдурагманов Г. Р.* Центральная предельная теорема для обобщенных (неоднородных) U -статистик от различно распределенных случайных величин. — *Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук*, 1986, № 2, с. 28–33.
12. *Малевиц Т. Л., Абдурагманов Г. Р.* Необходимые и достаточные условия сходимости к безгранично делимым законам для обобщенных U -статистик. — *Узб. матем. журн.* 1991, № 5, с. 30–37.
13. *Абдурагманов Г. Р.* Равномерная оценка в центральной предельной теореме для обобщенных U -статистик. Деп. в ВИНТИ, Ташкент, 1985, № 3179-85, 24 с.
14. *Bahr V. von, Esseen C. G.* Inequalities for the r -th absolute moment of a sum of random variables. — *Ann. Math. Statist.*, 1965, v. 36, p. 299–303.
15. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1974, 414 с.

Поступила в редакцию
21.V.1996