Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Аншин, О вероятности одновременных экстремумов двух гауссовских нестационарных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 417–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:52:23

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 50
Выпуск 3, 2005 год
июль, август, сентябрь

© 2005 г.

АНШИН А. Б.*

О ВЕРОЯТНОСТИ ОДНОВРЕМЕННЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ДВУХ ГАУССОВСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

В статье рассматривается вероятность одновременных экстремумов двух гауссовских нестационарных процессов:

$$P\left\{\max_{t \in [0, T]} X_1(t) > u, \max_{s \in [0, T]} X_2(s) > u\right\}.$$

Найдена точная асимптотика этой вероятности при $u \rightarrow \infty$. Основным инструментом для нахождения асимптотики является развитие метода двойной суммы.

Ключевые слова и фразы: гауссовские нестационарные процессы, экстремум, метод двойной суммы.

1. Введение. Изучение асимптотических свойств больших уклонений гауссовских процессов является важной задачей в теории случайных процессов и полей. Впервые в работе Д. Пикандса [1] был предложен метод вычисления точной асимптотики вероятности

$$P\left\{\max_{t \in T} X(t) > u\right\}$$

при $u \rightarrow \infty$ для гауссовского стационарного процесса $X(t)$, удовлетворяющего условию **C2** (см. ниже). Впоследствии этот метод был распространен на достаточно широкий класс гауссовских процессов и полей (см. монографию [2] и библиографию в ней). Одним из направлений развития теории больших уклонений является задача нахождения асимптотики вероятности двойного экстремума. Эта задача для стационарных гауссовских процессов была рассмотрена в работе А. Н. Ладневой

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anton_anshin@mail.ru

и В. И. Питербарга [3]. В данной статье исследуется вероятность одно-временных экстремумов двух гауссовских нестационарных процессов

$$P = \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in [0, T]} X_1(t) > u, \max_{s \in [0, T]} X_2(s) > u \right\}. \quad (1)$$

Основным инструментом для нахождения точной асимптотики этой вероятности при $u \rightarrow \infty$ является соответствующее развитие метода двойной суммы, подробно изложенного в [2] и [3].

2. Формулировка основных результатов. Пусть $(X_1(t), X_2(s))$, $t, s \in \mathbf{R}$ — нестационарный векторный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием. Пусть при этом процессы $X_1(t)$, $X_2(s)$, $t, s \in \mathbf{R}$, обладают ковариационными функциями $r_1(t, s)$ и $r_2(t, s)$ соответственно и совместной ковариационной функцией $r(t, s)$. Пусть для этих процессов выполнены следующие условия.

С1. Ковариационные функции $r_1(t, s)$, $r_2(t, s)$, $r(t, s)$ непрерывны и дважды дифференцируемы по обоим аргументам. Кроме того, выполнены следующие ограничения: $r(t, s) < r_1(t, t)$, $r(t, s) < r_2(s, s)$ для любой пары (t, s) .

С2. Существует и единственная точка $(t_m, s_m) = \operatorname{argmax}_{(t, s) \in (0, T)^2} D(t, s)$, где

$$D(t, s) = \mathbf{E} \left(\frac{r_2(s, s) - r(t, s)}{r_1(t, t) - 2r(t, s) + r_2(s, s)} X_1(t) + \frac{r_1(t, t) - r(t, s)}{r_1(t, t) - 2r(t, s) + r_2(s, s)} X_2(s) \right)^2$$

и $D''_{ts}(t_m, s_m) = 0$.

С3. Для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ выполнено $r_i(t, s) = r_i(t_0, t_0) - |t - s|^{\alpha_i}(1 + o(1))$, $i = 1, 2$, при $t \rightarrow t_0$, $s \rightarrow t_0$, для любой точки t_0 , лежащей в некоторой окрестности точки t_m при $i = 1$ и в окрестности точки s_m при $i = 2$.

С4. $\mathbf{D}(X_i(t) - X_i(s)) \leq L|t - s|^\beta$, $i = 1, 2$, для любых t, s , некоторого $\beta \in (0, 2)$ и некоторого $L > 0$.

Введем несколько дополнительных обозначений. Во-первых, обозначим через B_H дробное броуновское движение с параметром Херста $H \in (0, 1)$, т.е. гауссовский процесс с почти наверное непрерывными траекториями, для которого выполнено: $B_H(0) = 0$ почти наверное, $\mathbf{E}B_H(t) \equiv 0$ и $\mathbf{E}(B_H(t) - B_H(s))^2 = |t - s|^{2H}$ для любых $t, s \in \mathbf{R}$. Кроме того, обозначим

$$H_\alpha^c(T) = \mathbf{E} \exp \left(\sup_{t \in T} (\sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha - ct) \right)$$

для любого множества $T \subset \mathbf{R}$ и любого неотрицательного s . Заметим, что согласно [1] существует конечный неотрицательный предел

$$H_\alpha := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} H_\alpha^0([0, \lambda]), \quad (2)$$

называемый константой Пикандса.

Теорема 1. Пусть $X_1(t), X_2(s), t, s \in \mathbf{R}$, — нестационарные гауссовские процессы, и пусть для них выполнены условия **C1–C4**. Тогда верно следующее асимптотическое соотношение:

$$P = \frac{\pi(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2} e^{-u^2 F} H_{\alpha_1} H_{\alpha_2}}{2u^{4-2/\alpha_1-2/\alpha_2} (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r) \sqrt{AB}} \\ \times \left(\frac{\sigma_1^2 - r}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2} \right)^{2/\alpha_2} \left(\frac{\sigma_2^2 - r}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2} \right)^{2/\alpha_1} (1 + o(1))$$

при $u \rightarrow \infty$.

Здесь $\sigma_1^2 = r_1(t_m, t_m)$, $\sigma_2^2 = r_2(s_m, s_m)$, $r = r(t_m, s_m)$,

$$F(t, s) = \frac{r_1(t, t) - 2r(t, s) + r_2(s, s)}{2(r_1(t, t)r_2(s, s) - r^2(t, s))},$$

$F = F(t_m, s_m)$, $A = \frac{1}{2} F''_{tt}(t_m, s_m)$, $B = \frac{1}{2} F''_{ss}(t_m, s_m)$.

3. Вспомогательные результаты. Для произвольного множества $\Lambda \in \mathbf{R}^2$, вектора (a_1, a_2) и числа a будем использовать следующие обозначения: $a\Lambda = \{ax: x \in \Lambda\}$, $(a_1, a_2) + \Lambda = \{(a_1, a_2) + x, x \in \Lambda\}$.

Лемма 1. Пусть $X_1(t), X_2(s)$ — нестационарные гауссовские процессы с нулевым средним, удовлетворяющие условиям **C1–C4**. Пусть Λ_1, Λ_2 — замкнутые, ограниченные множества в $\mathbf{R}$, и пусть, кроме того, для $(\hat{t}_m, \hat{s}_m)$ выполнено: $|\hat{t}_m - t_m| \rightarrow 0$, $|\hat{s}_m - s_m| \rightarrow 0$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in K} \{X_1(t) > u, X_2(s) > u\} \right) = \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2} (1 + o(1))}{2u^2 \pi (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r)} \\ \times \exp \left(- \frac{u^2 (\hat{\sigma}_1^2 - 2\hat{r} + \hat{\sigma}_2^2)}{2(\hat{\sigma}_1^2 \hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)} \right) H_{\alpha_1} \left(\frac{\Lambda_1 (\sigma_2^2 - r)^{2/\alpha_1}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_1}} \right) \\ \times H_{\alpha_2} \left(\frac{\Lambda_2 (\sigma_1^2 - r)^{2/\alpha_2}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_2}} \right) \quad \text{при } u \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$z\partial z K = (\hat{t}_m, \hat{s}_m) + (u^{-2/\alpha_1} \Lambda_1, u^{-2/\alpha_2} \Lambda_2)$, $\hat{\sigma}_1^2 = r_1(\hat{t}_m, \hat{t}_m)$, $\hat{\sigma}_2^2 = r_2(\hat{s}_m, \hat{s}_m)$, $\hat{r} = r(\hat{t}_m, \hat{s}_m)$.

Введем новые обозначения:

$$\begin{aligned} H_\alpha([0, \lambda], [\lambda_0, \lambda_0 + \lambda]) \\ = \int_0^\infty e^x \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in [0, \lambda]} (\sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha) > x, \right. \\ \left. \max_{t \in [\lambda_0, \lambda_0 + \lambda]} (\sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha) > x \right\} dx, \end{aligned}$$

где $\lambda > 0$, $\lambda_0 > 0$;

$$\begin{aligned} H_{\alpha_i}(m) = H_{\alpha_i} \left(\left[0, \frac{\lambda(\sigma_j^2 - r)^{2/\alpha_i}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_i}} \right], \right. \\ \left. \left[\frac{m\lambda(\sigma_j^2 - r)^{2/\alpha_i}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_i}}, \frac{(m+1)\lambda(\sigma_j^2 - r)^{2/\alpha_i}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_i}} \right] \right), \end{aligned}$$

$m \in \mathbf{Z}$, $i, j = 1, 2$ и $i + j = 3$. Заметим, что

$$H_{\alpha_i}(0) = H_{\alpha_i} \left(\left[0, \frac{\lambda(\sigma_j^2 - r)^{2/\alpha_i}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_i}} \right] \right).$$

Лемма 2 (см. [2]). Пусть $\lambda_0 > \lambda > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} H_\alpha([0, \lambda]) + H_\alpha([\lambda_0, \lambda_0 + \lambda]) - H_\alpha([0, \lambda] \cup [\lambda_0, \lambda_0 + \lambda]) \\ = H_\alpha([0, \lambda], [\lambda_0, \lambda_0 + \lambda]). \end{aligned}$$

Лемма 3 (см. [2]). В приведенных выше обозначениях выполнены следующие неравенства: $H_{\alpha_i}(0) \leq \text{const} \cdot \lambda$, $H_{\alpha_i}(1) \leq \text{const} \cdot \sqrt{\lambda}$, $H_{\alpha_i}(n) \leq \text{const} \cdot \lambda^2 e^{-\mu(n-1)^{\alpha_i} \lambda^{\alpha_i}}$ при $n > 1$, где $\mu > 0$ — некоторая константа.

4. Доказательство вспомогательных результатов.

Доказательство леммы 1. Обозначим выражение в левой части (3) через p . Имеем:

$$\begin{aligned} p &= \iint \mathbf{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in K} \{X_1(t) > u, X_2(s) > u\} \mid X_1(\hat{t}_m) = x, X_2(\hat{s}_m) = y \right) \\ &\quad \times f_{X_1(\hat{t}_m), X_2(\hat{s}_m)}(x, y) dx dy \\ &= u^{-2} \iint \mathbf{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in K} \{X_1(t) > u, X_2(s) > u\} \mid \right. \\ &\quad \left. X_1(\hat{t}_m) = u - \frac{x}{u}, X_2(\hat{s}_m) = u - \frac{y}{u} \right) \\ &\quad \times f_{X_1(\hat{t}_m), X_2(\hat{s}_m)} \left(u - \frac{x}{u}, u - \frac{y}{u} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим более подробно функцию плотности f :

$$\begin{aligned} f_{X_1(\hat{t}_m), X_2(\hat{s}_m)}\left(u - \frac{x}{u}, u - \frac{y}{u}\right) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)}\left(\left(u - \frac{x}{u}\right)^2\hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{r}\left(u - \frac{x}{u}\right)\left(u - \frac{y}{u}\right) + \left(u - \frac{y}{u}\right)^2\hat{\sigma}_1^2\right)\right) \\ &= \frac{(1 + o(1))}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)}(\hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{r} + \hat{\sigma}_1^2)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2u^2(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)}(x^2\hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{r}xy + y^2\hat{\sigma}_1^2)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)}(-2x\hat{\sigma}_2^2 + 2\hat{r}(x+y) - 2y\hat{\sigma}_1^2)\right) \end{aligned}$$

при $u \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\begin{aligned} p &= \frac{(1 + o(1))}{2u^2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2}} \exp\left(-\frac{u^2(\hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{r} + \hat{\sigma}_1^2)}{2(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)}\right) \\ &\times \iint \exp\left(-\frac{x^2\hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{r}xy + y^2\hat{\sigma}_1^2}{2u^2(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{x\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}(x+y) + y\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2}\right) \tilde{P} dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tilde{P} = \mathbf{P}(\cup_{(t,s) \in K}(X_1(t) > u, X_2(s) > u) | X_1(\hat{t}_m) = u - x/u, X_2(\hat{s}_m) = u - y/u)$.

Теперь рассмотрим двумерный гауссовский процесс $(\xi_u(t), \eta_u(t))$, $t \in \mathbf{R}$, где

$$\xi_u(t) = u(X_1(\hat{t}_m + u^{-2/\alpha_1}t) - u) + x, \quad \eta_u(t) = u(X_2(\hat{s}_m + u^{-2/\alpha_2}t) - u) + y.$$

Мы будем изучать условное распределение этого вектора, а именно его математическое ожидание и ковариационную функцию, при условии $(\xi_u(0), \eta_u(0)) = (0, 0)$, что эквивалентно $X_1(\hat{t}_m) = u - x/u$, $X_2(\hat{s}_m) = u - y/u$. Для начала рассмотрим условное математическое ожидание. Воспользовавшись формулами из [4], получаем:

$$\mathbf{E} \begin{pmatrix} \xi_u(t) \\ \eta_u(t) \end{pmatrix} \bigg| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \xi_u(t) \\ \eta_u(t) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \xi_u(0) - \mathbf{E}\xi_u(0) \\ \eta_u(0) - \mathbf{E}\eta_u(0) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \mathbf{E}\xi_u(t) \\ \eta_u(t) - \mathbf{E}\eta_u(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_u(0) - \mathbf{E}\xi_u(0) \\ \eta_u(0) - \mathbf{E}\eta_u(0) \end{pmatrix}^T \right) \\ &\times \left[\mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(0) - \mathbf{E}\xi_u(0) \\ \eta_u(0) - \mathbf{E}\eta_u(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_u(0) - \mathbf{E}\xi_u(0) \\ \eta_u(0) - \mathbf{E}\eta_u(0) \end{pmatrix}^T \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Произведем предварительные вычисления:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}\xi_u(0) &= \mathbf{E}\xi_u(t) = x - u^2, & \mathbf{E}\eta_u(0) &= \mathbf{E}\eta_u(t) = y - u^2; \\
 \mathbf{D}\xi_u(0) &= u^2\hat{\sigma}_1^2, & \mathbf{D}\eta(0) &= u^2\hat{\sigma}_2^2; \\
 \text{cov}(\xi_u(0), \eta_u(0)) &= u^2r(\hat{t}_m, \hat{s}_m), \\
 \text{cov}(\xi_u(0), \xi_u(t)) &= u^2r_1(\hat{t}_m, \hat{t}_m + u^{-2/\alpha_1}t), \\
 \text{cov}(\eta_u(0), \eta_u(t)) &= u^2r_2(\hat{s}_m, \hat{s}_m + u^{-2/\alpha_2}t), \\
 \text{cov}(\eta_u(t), \xi_u(0)) &= u^2r(\hat{t}_m, \hat{s}_m + u^{-2/\alpha_2}t), \\
 \text{cov}(\xi_u(t), \eta_u(0)) &= u^2r(\hat{t}_m + u^{-2/\alpha_1}t, \hat{s}_m).
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \mathbf{E}\xi_u(t) \\ \eta_u(t) - \mathbf{E}\eta_u(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_u(0) - \mathbf{E}\xi_u(0) \\ \eta_u(0) - \mathbf{E}\eta_u(0) \end{pmatrix}^T \right) \\
 &= \begin{pmatrix} \text{cov}(\xi_u(0), \xi_u(t)) & \text{cov}(\xi_u(t), \eta_u(0)) \\ \text{cov}(\eta_u(t), \xi_u(0)) & \text{cov}(\eta_u(t), \eta_u(0)) \end{pmatrix} \\
 &= u^2 \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 - u^{-2}|t|^{\alpha_1} + o(u^{-2}) & r(\hat{t}_m + u^{-2/\alpha_1}t, \hat{s}_m) \\ r(\hat{t}_m, \hat{s}_m + u^{-2/\alpha_2}t) & \hat{\sigma}_2^2 - u^{-2}|t|^{\alpha_2} + o(u^{-2}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Подставляя в эту матрицу $t = 0$, получаем, что второй сомножитель в правой части (6) равен

$$\frac{u^{-2}}{\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_2^2 & -\hat{r} \\ -\hat{r} & \hat{\sigma}_1^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2} \\
 &\times \begin{pmatrix} (\hat{\sigma}_1^2 - u^{-2}|t|^{\alpha_1} + o(u^{-2}))\hat{\sigma}_2^2 & -(\hat{\sigma}_1^2 - u^{-2}|t|^{\alpha_1} + o(u^{-2}))\hat{r} \\ -r(\hat{t}_m + u^{-2/\alpha_1}t, \hat{s}_m)\hat{r} & +r(\hat{t}_m + u^{-2/\alpha_1}t, \hat{s}_m)\hat{\sigma}_1^2 \\ -(\hat{\sigma}_2^2 - u^{-2}|t|^{\alpha_2} + o(u^{-2}))\hat{r} & (\hat{\sigma}_2^2 - u^{-2}|t|^{\alpha_2} + o(u^{-2}))\hat{\sigma}_1^2 \\ +r(\hat{t}_m, \hat{s}_m + u^{-2/\alpha_2}t)\hat{\sigma}_1^2 & -r(\hat{t}_m, \hat{s}_m + u^{-2/\alpha_2}t)\hat{r} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Из дифференцируемости функции $r(t, s)$ по обоим аргументам (условие **C1**) следует, что справедливо следующее разложение: $r(\hat{t}_m + u^{-2/\alpha_1}t, \hat{s}_m) = r(\hat{t}_m, \hat{s}_m) + u^{-2/\alpha_1}tr'_t(\hat{t}_m + \theta u^{-2/\alpha_1}t, \hat{s}_m)$, где $|\theta| < 1$. Поскольку $\alpha_1 < 1$, то отсюда получаем, что $r(\hat{t}_m + u^{-2/\alpha_1}t, \hat{s}_m) =$

$r(\hat{t}_m, \hat{s}_m) + o(u^{-2})$. Аналогичные рассуждения можно провести и для $r(\hat{t}_m, \hat{s}_m + u^{-2/\alpha_2}t)$.

Приведенные выше вычисления дают нам возможность получить асимптотическое (при $u \rightarrow \infty$) значение условного математического ожидания рассматриваемого гауссовского вектора. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) \\ \eta_u(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \right) &= \begin{pmatrix} x - u^2 \\ y - u^2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} u^2 - x \\ u^2 - y \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{|t|^{\alpha_1}(\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r})}{\hat{\sigma}_1^2 \hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2}, -\frac{|t|^{\alpha_2}(\hat{\sigma}_1^2 - \hat{r})}{\hat{\sigma}_1^2 \hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2} \right)^T + o(1) \end{aligned} \quad (7)$$

при $u \rightarrow \infty$.

Перейдем теперь к рассмотрению условной ковариации гауссовского вектора.

$$\begin{aligned} \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \xi_u(s) \\ \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right) \\ = \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \xi_u(s) \\ \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1) \end{pmatrix} \right) - C \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right)^{-1} C^T, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$C = \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \xi_u(s) \\ \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right).$$

Произведем предварительные вычисления:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_u(t) - \xi_u(s), \xi_u(0)) &= O(1), \\ \text{cov}(\eta_u(t_1) - \eta_u(s_1), \eta_u(0)) &= O(1), \\ \text{cov}(\xi_u(t) - \xi_u(s), \eta_u(0)) &= O(u^{2-2/\alpha_1}), \\ \text{cov}(\eta_u(t_1) - \eta_u(s_1), \xi_u(0)) &= O(u^{2-2/\alpha_2}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$C \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right)^{-1} C^T = \frac{O(u^{4-2/\alpha_1-2/\alpha_2})}{u^2} = O(u^{2-2/\alpha_1-2/\alpha_2}) = o(1).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\xi_u(t) - \xi_u(s)) &= 2|t - s|^{\alpha_1}(1 + o(1)), \\ \mathbf{D}(\eta_u(t_1) - \eta_u(s_1)) &= 2|t_1 - s_1|^{\alpha_2}(1 + o(1)), \\ \text{cov}(\xi_u(t) - \xi_u(s), \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1)) &= o(1), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем:

$$\text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(t) - \xi_u(s) \\ \eta_u(t_1) - \eta_u(s_1) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2|t - s|^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 2|t_1 - s_1|^{\alpha_2} \end{pmatrix} (1 + o(1)) \quad (9)$$

при $u \rightarrow \infty$. Теперь, используя то, что условная дисперсия не превосходит безусловную, а также условие **C4**, имеем следующие неравенства:

$$\mathbf{D}(\xi_u(t) - \xi_u(s) \mid \xi_u(0) = 0, \eta_u(0) = 0) \leq L|t - s|^\beta, \quad (10)$$

$$\mathbf{D}(\eta_u(t) - \eta_u(s) \mid \xi_u(0) = 0, \eta_u(0) = 0) \leq L|t - s|^\beta \quad (11)$$

для любых t, s . Таким образом, двумерный гауссовский процесс $(\xi_u(t), \eta_u(t))$ условно на $\xi_u(0) = \eta_u(0) = 0$ слабо сходится в $C[-\Lambda, \Lambda]$ для любого $\Lambda > 0$ к гауссовскому процессу $(\xi(t), \eta(t))$, $t \in [-\Lambda, \Lambda]$, у которого

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi(t) &= -\frac{|t|^{\alpha_1}(\sigma_2^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2}, & \mathbf{E}\eta(t) &= -\frac{|t|^{\alpha_2}(\sigma_1^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2}, \\ \mathbf{D}(\xi_u(t) - \xi_u(s)) &= 2|t - s|^{\alpha_1}, & \mathbf{D}(\eta_u(t) - \eta_u(s)) &= 2|t - s|^{\alpha_2}, \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\xi(t) = \sqrt{2}B_{\alpha_1/2} - \frac{|t|^{\alpha_1}(\sigma_2^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2}, \quad \eta(t) = \sqrt{2}B_{\alpha_2/2} - \frac{|t|^{\alpha_2}(\sigma_1^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2},$$

где $B_{\alpha_1/2}$, $B_{\alpha_2/2}$ — два независимых дробных броуновских движения с параметрами Херста $\alpha_1/2$, $\alpha_2/2$ соответственно.

Вернемся к рассмотрению интеграла из формулы (4). Наша ближайшая цель — доказать возможность перехода к пределу под знаком интеграла, для чего докажем сходимост ь интеграла при всех u . Для этого разобьем плоскость на области и докажем, что в каждой из них подынтегральное выражение ограничено сверху функцией, интеграл от которой по данной области заведомо сходится.

1. Для области $(x \leq 0, y \leq 0)$ ограничим вероятность $\tilde{P}$ единицей, а плотность f функцией $\exp\{(x\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}(x+y) + y\hat{\sigma}_1^2)/(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)\}$. Интеграл от этой функции по указанной области сходится, что легко установить, принимая во внимание условие **C1**.

2. Для области $(x > 0, y \leq 0)$ ограничим вероятность $\tilde{P}$ значением $p(x) = \mathbf{P}(\max_{t \in \Lambda_1} \xi_u(t) > x \mid \xi_u(0) = 0, \eta_u(0) = 0)$, а плотность f функцией

$$\exp\left(\frac{x(\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r})}{0.9(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)} + \frac{y(\hat{\sigma}_1^2 - \hat{r})}{\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2}\right).$$

Заметим, что свойства процесса $\xi_u(t)$ при условии $\xi_u(0) = 0, \eta_u(0) = 0$ таковы, что к нему применима теорема D1 [2] (неравенство Бореля). Действительно, поскольку $\mathbf{D}(\xi_u(t) \mid \xi_u(0) = 0, \eta_u(0) = 0) = \mathbf{D}(\xi_u(t) - \xi_u(0) \mid \xi_u(0) = 0, \eta_u(0) = 0) \leq L|t|^\beta \leq LM^\beta$, $M = \text{const}$ (где существование M вытекает из ограниченности Λ_1 и использовано неравенство (9)), то, пользуясь неравенством Чебышёва $\mathbf{P}\{|\xi_u(t) - \mathbf{E}\xi_u(t)| \geq a\} \leq \mathbf{D}\xi_u(t)/a^2$ и полагая $a = \sqrt{2LM^\beta}$, мы получаем условия теоремы D1. Применяя ее, имеем $p(x) \leq C \exp(-x^2\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, откуда вытекает сходимость интеграла и в этой области.

3. Для области $(x \leq 0, y > 0)$, аналогично предыдущему случаю, подынтегральное выражение не превосходит

$$C \exp(-y^2\varepsilon) \exp\left(\frac{y(\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r})}{0.9(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)} + \frac{x(\hat{\sigma}_1^2 - \hat{r})}{\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2}\right).$$

4. Рассмотрим теперь последнюю оставшуюся область, а именно $(x > 0, y > 0)$. В этой области мы оценим вероятность $\tilde{P}$ как $\mathbf{P}(\max_{(t,s) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2} \xi_u(t) + \eta_u(s) > x + y \mid \xi_u(0) = 0, \eta_u(0) = 0)$, а функцию плотности f оценим функцией

$$\exp\left(\frac{x(\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r})}{0.9(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)} + \frac{y(\hat{\sigma}_1^2 - \hat{r})}{0.9\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2}\right).$$

Аналогично предыдущему, используем теорему D1 из [2] и получаем ограничение на вероятность в виде $C \exp(-(x+y)^2\varepsilon)$, что и завершает доказательство сходимости интеграла.

Переходя к пределу при $u \rightarrow \infty$ и обозначая $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, получаем:

$$\begin{aligned} & \iint \exp\left(-\frac{x^2\hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{r}xy + y^2\hat{\sigma}_1^2}{2u^2(\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2)}\right) \exp\left(\frac{x\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}(x+y) + y\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2 - \hat{r}^2}\right) \tilde{P} dx dy \\ & \rightarrow \iint \exp\left(\frac{x\sigma_2^2 - r(x+y) + y\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2}\right) \\ & \quad \times \mathbf{P}\left(\bigcup_{(t,s) \in \Lambda} \{\xi(t) > x, \eta(s) > y\}\right) dx dy \\ & = \iint \exp\left(\frac{x(\sigma_2^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2} + \frac{y(\sigma_1^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2}\right) \\ & \quad \times \mathbf{P}\left(\bigcup_{(t,s) \in \Lambda} \{\xi(t) > x, \eta(s) > y\}\right) dx dy \\ & = \iint \exp\left(\frac{x(\sigma_2^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2} + y\frac{y(\sigma_1^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2}\right) \\ & \quad \times \mathbf{P}\left(\bigcup_{(t,s) \in \Lambda} \left\{\sqrt{2}B_{\alpha_1/2}(t) - \frac{|t|^{\alpha_1}(\sigma_2^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2} > x, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \sqrt{2}B_{\alpha_2/2}(s) - \frac{|s|^{\alpha_2}(\sigma_1^2 - r)}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2} > y\right\}\right) dx dy \\ & = (ab)^{-1} \iint e^{xa+yb} ab \mathbf{P}\left(\bigcup_{(t,s) \in \Lambda} \left\{\sqrt{2}B_{\alpha_1/2}(t) - |t|^{\alpha_1}a > x, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \sqrt{2}B_{\alpha_2/2}(s) - |s|^{\alpha_2}b > y\right\}\right) dx dy, \end{aligned}$$

где $a = (\sigma_2^2 - r)/(\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2)$, $b = (\sigma_1^2 - r)/(\sigma_1^2\sigma_2^2 - r^2)$. Произведя под

интегралом замену, получаем следующее выражение

$$\begin{aligned}
 & (ab)^{-1} \iint e^{x+y} \mathbf{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in \Lambda} \left\{ \sqrt{2} B_{\alpha_1/2}(t) - |t|^{\alpha_1} a > \frac{x}{a}, \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \sqrt{2} B_{\alpha_2/2}(s) - |s|^{\alpha_2} b > \frac{y}{b} \right\} \right) dx dy \\
 & = (ab)^{-1} \iint e^{x+y} \mathbf{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in \Lambda} \left\{ \sqrt{2} B_{\alpha_1/2}(ta^{2/\alpha_1}) - |ta^{2/\alpha_1}|^{\alpha_1} > x, \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \sqrt{2} B_{\alpha_2/2}(sb^{2/\alpha_2}) - |sb^{2/\alpha_2}|^{\alpha_2} > y \right\} \right) dx dy
 \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы воспользовались автомодельностью броуновского движения). Используя независимость процессов $B_{\alpha_1/2}$ и $B_{\alpha_2/2}$, окончательно получаем, что последний интеграл равен

$$\begin{aligned}
 & (ab)^{-1} H_{\alpha_1}(\Lambda_1 a^{2/\alpha_1}) H_{\alpha_2}(\Lambda_2 b^{2/\alpha_2}) \\
 & = \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^2}{(\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r)} H_{\alpha_1} \left(\frac{\Lambda_1 (\sigma_2^2 - r)^{2/\alpha_1}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_1}} \right) H_{\alpha_2} \left(\frac{\Lambda_2 (\sigma_1^2 - r)^{2/\alpha_2}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_2}} \right),
 \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение леммы.

5. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Введем дополнительные обозначения: $\delta = \delta(u) = Cu^{-1} \sqrt{\ln u}$, $\Pi = [0, T]^2$, $D = \{(t, s) \in \Pi; |t - t_m| \leq \delta, |s - s_m| \leq \delta\}$, при этом значение константы C будет определено в дальнейшем. Ниже приведены очевидные ограничения сверху и снизу на вероятность P . Верхняя оценка такова:

$$\begin{aligned}
 P & = \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in [0, T]} X_1(t) > u, \max_{s \in [0, T]} X_2(s) > u \right\} \\
 & = \mathbf{P} \left(\left(\bigcup_{(t,s) \in D} \{X_1(t) > u\} \cap \{X_2(s) > u\} \right) \right. \\
 & \qquad \qquad \left. \bigcup \left(\bigcup_{(t,s) \in \Pi \setminus D} \{X_1(t) > u\} \cap \{X_2(s) > u\} \right) \right) \\
 & \leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in D} \{X_1(t) > u\} \cap \{X_2(s) > u\} \right) \\
 & \quad + \mathbf{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in \Pi \setminus D} \{X_1(t) > u\} \cap \{X_2(s) > u\} \right) =: P_1 + P_2. \quad (12)
 \end{aligned}$$

С другой стороны, $P \geq P_1$.

Наша цель — найти асимптотику последней вероятности при $u \rightarrow \infty$ и показать, что именно эта вероятность и дает главный член асимптотики вероятности (1). Рассмотрим вначале вторую вероятность в

сумме (11) и оценим ее:

$$\begin{aligned} P_2 &\leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{(t,s) \in \Pi \setminus D} \{pX_1(t) > pu\} \cap \{(1-p)X_2(s) > (1-p)u\} \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \max_{(t,s) \in \Pi \setminus D} (pX_1(t) + (1-p)X_2(s)) > u \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $0 < p < 1$. Положим параметр p равным

$$\frac{r_2(s, s) - r(t, s)}{r_1(t, t) - 2r(t, s) + r_2(s, s)} \quad (14)$$

и обозначим $q = 1 - p$. Отметим, что в силу условия **C1** параметр p в (14) будет больше 0 и меньше 1. Теперь заметим, что к вероятности (12) можно применить теорему 8.1 из [2]. Действительно,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left(pX_1(t) + qX_2(s) - pX_1(t_1) - qX_2(s_1) \right)^2 \\ &= p^2 \mathbf{D}(X_1(t) - X_1(t_1)) + q^2 \mathbf{D}(X_2(s) - X_2(s_1)) \\ &\quad + 2pq \mathbf{E}(X_1(t) - X_1(t_1))(X_2(s) - X_2(s_1)) \\ &\leq 2L(p^2|t - t_1|^\beta + q^2|s - s_1|^\beta) \leq L_1(|t - t_1| + |s - s_1|)^\beta \end{aligned}$$

для всех (t, s) , (t_1, s_1) и некоторого L_1 , где в последнем неравенстве использовано условие **C4** и то, что $\mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta \geq 2\mathbf{E}\xi\eta$ для любых случайных величин ξ, η . Применяя упомянутую выше теорему 8.1, получаем, что вероятность в (12) не превосходит

$$\text{const} \cdot u^{-1+2/\beta} \exp \left(- \frac{u^2}{2 \max_{(t,s) \in \Pi \setminus D} \mathbf{E}(pX_1(t) + qX_2(s))^2} \right).$$

Рассмотрим более подробно $\max_{(t,s) \in \Pi \setminus D} \mathbf{E}(pX_1(t) + qX_2(s))^2$, предварительно заметив, что, согласно обозначениям из условия **C2**,

$$\max_{(t,s) \in \Pi \setminus D} \mathbf{E}(pX_1(t) + qX_2(s))^2 = \max_{(t,s) \in \Pi \setminus D} D(t, s).$$

Итак, используя условие **C2**, имеем:

$$\begin{aligned} \max_{(t,s) \in \Pi \setminus D} D(t, s) &\leq D(t_m, s_m) - 0.4 \left(|D''_{tt}(t_m, s_m)| + |D''_{ss}(t_m, s_m)| \right) \delta^2 \\ &\leq D(t_m, s_m) - 0.4 C^2 C_1 u^{-2} \ln u. \end{aligned} \quad (15)$$

Это неравенство дает нам возможность получить желаемую оценку на вероятность в (13):

$$P_2 \leq \text{const} \cdot u^{-1+2/\beta} \exp \left(- \frac{u^2}{2D(t_m, s_m)} \right) u^{-G}, \quad (16)$$

где $G = 0.8 C^2 C_1 / (2D^2(t_m, s_m))$.

Теперь перейдем к рассмотрению вероятности P_1 . Мы получим ограничения сверху и снизу на эту вероятность и затем докажем, что они имеют один и тот же порядок. Покроем множество D прямоугольниками следующего вида: $\Delta_{k,l} = \Delta_k^t \times \Delta_l^s = [t_k, t_{k+1}] \times [s_l, s_{l+1}]$, где $t_k = t_m + k\lambda u^{-2/\alpha_1}$, $s_l = s_m + l\lambda u^{-2/\alpha_1}$, $l, k \in \mathbf{Z}$, λ — некоторое положительное число. Поскольку множество D есть квадрат со сторонами длины $2C\sqrt{\ln u}/u$ и центром в точке (t_m, s_m) , то оно будет полностью покрыто следующей совокупностью описанных выше прямоугольников:

$$\mathbf{T} = \left\{ \Delta_{k,l}: -N_1 - 1 \leq k \leq N_1, -N_2 - 1 \leq l \leq N_2; \right. \\ \left. N_1 = \left\lceil \frac{C\sqrt{\ln u}}{\lambda u^{1-2/\alpha_1}} \right\rceil, N_2 = \left\lceil \frac{C\sqrt{\ln u}}{\lambda u^{1-2/\alpha_2}} \right\rceil \right\},$$

где $\lceil \cdot \rceil$ — целая часть числа. Из изложенного выше следует, что P_1 не превосходит

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{(k,l): \Delta_{k,l} \cap D \neq \emptyset} \bigcup_{t \in \Delta_k^t, s \in \Delta_l^s} \{X_1(t) > u\} \cap \{X_2(s) > u\} \right) \\ \leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{\Delta_{k,l} \in \mathbf{T}} \bigcup_{(t,s) \in \Delta_{k,l}} \{X_1(t) > u\} \cap \{X_2(s) > u\} \right) \\ \leq \sum_{\Delta_{k,l} \in \mathbf{T}} \mathbf{P} \left(\max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_l^s} X_2(s) > u \right). \quad (17)$$

Заметим, что вид множества D позволяет нам применить лемму 1 к вероятностям, стоящим под суммой в (17). Применяя лемму, получаем:

$$P_1 \leq \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2} (1 + \gamma(u))}{2\pi u^2 (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r)} H_{\alpha_1} \left(\frac{\lambda(\sigma_2^2 - r)^{2/\alpha_1}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_1}} \right) H_{\alpha_2} \left(\frac{\lambda(\sigma_1^2 - r)^{2/\alpha_2}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_2}} \right) \\ \times \sum^* e^{-u^2 F(t_k, s_l)}, \quad (18)$$

$\gamma(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, $\sum^*$ обозначает суммирование по $-N_1 - 1 \leq k \leq N_1$, $-N_2 - 1 \leq l \leq N_2$. Перейдем к рассмотрению суммы в (18). Используя разложение функции $F(t, s)$ в окрестности точки (t_m, s_m) , получаем:

$$\sum^* e^{-u^2 F(t_k, s_l)} = e^{-u^2 F(t_m, s_m)} \sum^* e^{-u^2 (F(t_k, s_l) - F(t_m, s_m))} \leq (\geq) e^{-u^2 F(t_m, s_m)} \\ \times \sum^* \exp \left\{ -u^2 \left(\frac{1}{2} F''_{tt}(t_m, s_m)(t_k - t_m)^2 + \frac{1}{2} F''_{ss}(t_m, s_m)(s_l - s_m)^2 \right) \right. \\ \left. \times (1 - (+)\gamma_1(u)) \right\} \\ = (1 + o(1)) e^{-u^2 F} \sum^* e^{-u^2 A(t_k - t_m)^2} e^{-u^2 B(s_l - s_m)^2} \\ = (1 + o(1)) e^{-u^2 F} \sum^* e^{-u^2 A(t_k - t_m)^2} \sum^* e^{-u^2 B(s_l - s_m)^2}, \quad (19)$$

где $\gamma_1(u) \downarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$ и использованы обозначения из условия теоремы 1. Хотелось бы отметить, что в приведенных выше вычислениях использовалось равенство нулю функции $F''_{ts}(t, s)$ в точке (t_m, s_m) . Это равенство легко установить, принимая во внимание то, что, согласно условию **C2**, $D''_{ts}(t_m, s_m) = 0$, ибо $F(t, s) = 1/(2D(t, s))$, а условие **C1** гарантирует непрерывность функции $f(t, s)$ в окрестности точки (t_m, s_m) . Произведем следующую замену: $x_k = (t_k - t_m)u$, $y_l = (s_l - s_m)u$. Тогда правая часть (19) не превосходит

$$\begin{aligned}
 & (1 + o(1))e^{-u^2 F} \sum_{x_k = -[C\sqrt{\ln u}] - 1}^{[C\sqrt{\ln u}]} e^{-Ax_k^2} \sum_{y_l = -[C\sqrt{\ln u}] - 1}^{[C\sqrt{\ln u}]} e^{-By_l^2} \\
 &= (1 + o(1)) \frac{1}{\lambda^2 u^{2-2/\alpha_1-2/\alpha_2}} e^{-u^2 F} \sum_{x_k = -[C\sqrt{\ln u}] - 1}^{[C\sqrt{\ln u}]} e^{-Ax_k^2} (x_{k+1} - x_k) \\
 & \quad \times \sum_{y_l = -[C\sqrt{\ln u}] - 1}^{[C\sqrt{\ln u}]} e^{-By_l^2} (y_{l+1} - y_l) \\
 &= (1 + o(1)) \frac{1}{\lambda^2 u^{2-2/\alpha_1-2/\alpha_2}} e^{-u^2 F} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-By^2} dy \quad (20)
 \end{aligned}$$

при достаточно больших u . Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}},$$

окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 P_1 &\leq \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2} (1 + \gamma_2(u))}{2\sqrt{AB} u^{4-2/\alpha_1-2/\alpha_2} (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r) \lambda^2} e^{-u^2 F} H_{\alpha_1} \left(\frac{\lambda(\sigma_2^2 - r)^{2/\alpha_1}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_1}} \right) \\
 &\quad \times H_{\alpha_2} \left(\frac{\lambda(\sigma_1^2 - r)^{2/\alpha_2}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_2}} \right), \quad (21)
 \end{aligned}$$

где $\gamma_2(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим ограничение снизу на вероятность P_1 :

$$\begin{aligned}
 P_1 &\geq P \left(\bigcup_{(k,l): \Delta_{k,l} \subset D} \bigcup_{t \in \Delta_k^t, s \in \Delta_l^s} \{X_1(t) > u\} \cap \{X_2(s) > u\} \right) \\
 &\geq \sum_{(k,l): \Delta_{k,l} \subset D} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_l^s} X_2(s) > u \right\} \\
 &\quad - \sum \sum \sum \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_{l_1}^s} X_2(s) > u, \max_{s \in \Delta_{l_2}^s} X_2(s) > u \right\} \\
 &\quad - \sum \sum \sum \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_{k_1}^t} X_1(t) > u, \max_{t \in \Delta_{k_2}^t} X_1(t) > u, \right. \\
 &\quad \quad \left. \max_{s \in \Delta_l^s} X_2(s) > u \right\}, \quad (22)
 \end{aligned}$$

где первая и вторая тройные суммы берутся по множествам

$$\{(k, l_1, l_2) : l_1 \neq l_2, \Delta_{k, l_1} \cap D \neq \emptyset, \Delta_{k, l_2} \cap D \neq \emptyset\}$$

и

$$\{(k_1, k_2, l) : k_1 \neq k_2, \Delta_{k_1, l} \cap D \neq \emptyset, \Delta_{k_2, l} \cap D \neq \emptyset\}$$

соответственно. Первая сумма в (22) оценивается снизу аналогично оценке сверху суммы в (17), поэтому приведем соответствующие выкладки сокращенно. Обозначим

$$\mathbf{T}_1 = \left\{ \Delta_{k, l} : -N_1 \leq k \leq N_1 - 1, -N_2 \leq l \leq N_2 - 1; \right. \\ \left. N_1 = \left\lfloor \frac{C\sqrt{\ln u}}{\lambda u^{1-2/\alpha_1}} \right\rfloor, N_2 = \left\lfloor \frac{C\sqrt{\ln u}}{\lambda u^{1-2/\alpha_2}} \right\rfloor \right\}.$$

Используя это обозначение, получаем

$$\sum_{(k, l) : \Delta_{k, l} \subset D} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_l^s} X_2(s) > u \right\} \\ \geq \sum_{\Delta_{k, l} \in \tilde{T}_1} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_l^s} X_2(s) > u \right\}.$$

Применяя лемму 1, получаем:

$$\sum_{\Delta_{k, l} \in \tilde{T}_1} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_l^s} X_2(s) > u \right\} \\ = \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2} (1 + \gamma_3(u))}{2\pi u^2 (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r)} H_{\alpha_1} \left(\frac{\lambda(\sigma_2^2 - r)^{2/\alpha_1}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_1}} \right) \\ \times H_{\alpha_2} \left(\frac{\lambda(\sigma_1^2 - r)^{2/\alpha_2}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_2}} \right) \sum_{-N_1 \leq k \leq N_1 - 1; -N_2 \leq l \leq N_2 - 1} e^{-u^2 F(t_k, s_l)},$$

где $\gamma_3(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Оценим последнюю сумму:

$$\sum_{-N_1 \leq k \leq N_1 - 1; -N_2 \leq l \leq N_2 - 1} e^{-u^2 F(t_k, s_l)} \\ = e^{-u^2 F(t_m, s_m)} \sum_{-N_1 \leq k \leq N_1 - 1; -N_2 \leq l \leq N_2 - 1} e^{-u^2 (F(t_k, s_l) - F(t_m, s_m))} \\ \geq (1 + o(1)) \frac{1}{\lambda^2 u^{2-2/\alpha_1-2/\alpha_2}} e^{-u^2 F} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-By^2} dy \\ = (1 + o(1)) \frac{\pi}{\lambda^2 u^{2-2/\alpha_1-2/\alpha_2} \sqrt{AB}} e^{-u^2 F}$$

при достаточно больших u . Отсюда имеем:

$$\sum_{(k, l) : \Delta_{k, l} \subset D} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_l^s} X_2(s) > u \right\}$$

$$\geq \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2} (1 + \gamma_4(u))}{2\sqrt{AB} u^{4-2/\alpha_1-2/\alpha_2} (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r) \lambda^2} e^{-u^2 F} \\ \times H_{\alpha_1} \left(\frac{\lambda(\sigma_2^2 - r)^{2/\alpha_1}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_1}} \right) H_{\alpha_2} \left(\frac{\lambda(\sigma_1^2 - r)^{2/\alpha_2}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_2}} \right),$$

где $\gamma_4(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$.

Вернемся ко второй вероятности P_2 в правой части (12). Выбирая константу C достаточно большой — так, чтобы $G > 3 - 2/\alpha_1 - 2/\alpha_2 + 2/\beta$, а также учитывая, что $F(t_m, s_m) = 1/(2D(t_m, s_m))$, мы получим, что эта вероятность бесконечно мала при $u \rightarrow \infty$ по сравнению с правой частью (21).

Теперь рассмотрим первую тройную сумму в (22). Обозначим через $\tilde{K}$ множество $\{(k, l_1, l_2): \Delta_{k, l_1} \cap D \neq \emptyset, \Delta_{k, l_2} \cap D \neq \emptyset\}$. Используя это обозначение, получаем

$$\sum_{(k, l_1, l_2) \in \tilde{K}: l_1 \neq l_2} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_{l_1}^s} X_2(s) > u, \max_{s \in \Delta_{l_2}^s} X_2(s) > u \right\} \\ = 2 \sum_{(k, l_1, l_2) \in \tilde{K}: l_1 < l_2} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_{l_1}^s} X_2(s) > u, \right. \\ \left. \max_{s \in \Delta_{l_2}^s} X_2(s) > u \right\}. \quad (23)$$

Преобразуем вероятность, стоящую под знаком суммы в (23), учитывая, что $l_1 < l_2$:

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_{l_1}^s} X_2(s) > u, \max_{s \in \Delta_{l_2}^s} X_2(s) > u \right\} \\ = \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_{l_1}^s} X_2(s) > u \right\} \\ + \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_{l_2}^s} X_2(s) > u \right\} \\ - \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in \Delta_k^t} X_1(t) > u, \max_{s \in \Delta_{l_1}^s \cup \Delta_{l_2}^s} X_2(s) > u \right\}.$$

Выбирая $\hat{t}_m = t_k$, $\hat{s}_m = s_{l_1}$ и применяя леммы 1 и 2, получаем, что выражение (23) не превосходит

$$2 \sum_{(k, l_1, l_2) \in \tilde{K}: l_1 < l_2} \left(\frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2}}{2u^2 \pi (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r)} \right) e^{-u^2 F(t_k, s_{l_1})} \\ \times H_{\alpha_1}(0) H_{\alpha_2}(l_2 - l_1) (1 + o(1)) \\ \leq (1 + o(1)) \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2}}{u^2 \pi (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r)} \\ \times H_{\alpha_1}(0) \sum_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_2}(n) \sum_{(t_k, s_{l_1}): \Delta_{k, l_1} \cap D \neq \emptyset} e^{-u^2 F(t_k, s_{l_1})}. \quad (24)$$

Ограничение сверху на $\sum_{(t_k, s_{t_1}): \Delta_{k, t_1} \cap D \neq \emptyset} e^{-u^2 F(t_k, s_{t_1})}$ было получено выше в (19), (20). Используя это, а также лемму 3, получаем, что правая часть (24) не превосходит

$$(1 + o(1)) \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2}}{u^2 \pi (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r)} H(0) \sum_{n=1}^{\infty} H(n) \frac{u^{-2+2/\alpha_1+2/\alpha_2} \pi}{\lambda^2 \sqrt{AB}} e^{-u^2 F(t_m, s_m)} \\ \leq \text{const} \cdot \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{3/2} (1 + \gamma_4(u))}{2\sqrt{AB} u^{4-2/\alpha_1-2/\alpha_2} (\sigma_1^2 - r)(\sigma_2^2 - r) \lambda^{1/2}} e^{-u^2 F}.$$

Такую же оценку можно получить и для второй тройной суммы в (22). Теперь, используя соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} H_{\alpha_1} \left(\frac{\lambda (\sigma_2^2 - r)^{2/\alpha_1}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_1}} \right) = \left(\frac{\sigma_2^2 - r}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2} \right)^{2/\alpha_1} H_{\alpha_1}, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} H_{\alpha_2} \left(\frac{\lambda (\sigma_1^2 - r)^{2/\alpha_2}}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2)^{2/\alpha_2}} \right) = \left(\frac{\sigma_1^2 - r}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2} \right)^{2/\alpha_2} H_{\alpha_2},$$

получаем, что тройные суммы в (22) можно сделать сколь угодно малыми по сравнению с (21), выбирая достаточно большие λ , откуда и следует утверждение теоремы.

Автору хотелось бы выразить признательность В. И. Питербаргу за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pickands J.* Asymptotic properties of the maximum in a stationary Gaussian process. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 145, p. 75–86.
2. *Piterbarg V. I.* Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1996, 206 p.
3. *Ладнева А. Н., Питербург В. И.* О вероятности двойного экстремума для гауссовского стационарного процесса. — Деп. в ВИНТИ, № 2859-B00, 2000.
4. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.

Поступила в редакцию
30.XII.2004