Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, А. В. Колесников, Интегрируемость абсолютно непрерывных преобразований мер и применения к оптимальному переносу, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 433–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp87>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:47:23

© 2005 г.

БОГАЧЕВ В. И.*, КОЛЕСНИКОВ А. В.**

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕР И ПРИМЕНЕНИЯ К ОПТИМАЛЬНОМУ ПЕРЕНОСУ¹⁾

Для двух заданных борелевских вероятностных мер μ и ν на $\mathbf{R}^d$ таких, что $d\nu/d\mu = g$, рассматриваются некоторые отображения вида $T(x) = x + F(x)$, преобразующие μ в ν . Наши основные результаты дают оценки вида

$$\int_{\mathbf{R}^d} \Phi_1(|F|) d\mu \leq \int_{\mathbf{R}^d} \Phi_2(g) d\mu$$

для некоторых функций Φ_1 и Φ_2 при подходящих предположениях относительно μ . Даны применения к оптимальному переносу масс в задаче Монжа.

Ключевые слова и фразы: оптимальный перенос, гауссовская мера, выпуклая мера, логарифмическое неравенство Соболева, неравенство Пуанкаре, неравенство Талагранна.

1. Введение. В последнее десятилетие наблюдается возрастающий интерес к изучению связей между двумя классическими задачами оптимизации, поставленными Г. Монжем и Л. В. Канторовичем. В частности, были обнаружены плодотворные связи между этими задачами, нелинейными преобразованиями мер, нелинейными дифференциальными уравнениями и нелинейными функциональными неравенствами (см. [1]–[20], где можно найти дополнительные ссылки). Напомним, что общая задача Монжа имеет дело с измеримыми отображениями T из

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

** Scuola Normale Superiore, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, I-56100 Pisa, Italy; e-mail: sascha77@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ 04-01-00748, НШ 1758.2003.1, DFG Grant 436 RUS 113/343/0(R), INTAS 03-51-5018 и DFG-Forschergruppe «Spectral Analysis, Asymptotic Distributions, and Stochastic Dynamics».

Эта работа была завершена во время нашего визита в университет Билефельда. Мы благодарим М. Рекнера за полезные обсуждения. Второй автор признателен за поддержку Центру математических исследований Эннио Де Джорджи (Высшая Нормальная Школа Пизы).

заданного вероятностного пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$ в вероятностное пространство $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, преобразующими μ в ν и минимизирующими интегралы

$$K(\mu, \nu, h, T) := \int_X h(x, T(x)) \mu(dx)$$

для заданной неотрицательной измеримой функции h на $X \times Y$ (называемой функцией стоимости). Соответствующий инфимум обозначается через $K(\mu, \nu, h)$. При широких предположениях существует отображение T , на котором инфимум достигается. Такое отображение называется оптимальным переносом между μ и ν . Если $X = Y$ — метрическое пространство с расстоянием d , то типичными функциями стоимости являются $h(x, y) = d(x, y)^p$. М. Талаграном [19] было показано, что если $X = Y = \mathbf{R}^d$, $h(x, y) = |x - y|^2$, $\mu = \gamma$ — стандартная гауссовская мера и $\nu = g \cdot \gamma$, где $g \ln g \in L^1(\gamma)$ с обычным соглашением $0 \ln 0 = 0$, то

$$K(\gamma, g \cdot \gamma, h) \leq 2 \operatorname{Ent}_\gamma(g),$$

где

$$\operatorname{Ent}_\gamma(g) := \int_X g \ln g d\gamma.$$

Записав T как $T(x) = x + F(x)$, представим неравенство Талаграна в виде

$$\int_X |F|^2 d\gamma \leq 2 \int_X g \ln g d\gamma.$$

В этой работе мы рассматриваем более общую задачу, когда отображение $T = I + F$, где $I(x) = x$, преобразует меру μ в меру $g \cdot \mu$, а интерес представляет интегрируемость функций от $|F|$ при подходящих предположениях интегрируемости g . Интересный результат в этом направлении принадлежит К. Фернику [21], который рассматривал гауссовскую меру γ на сепарабельном пространстве Фреше и вероятностную меру $g \cdot \gamma$ такую, что $g \in L^p(\gamma)$ для некоторого $p > 1$. В [21] было показано, что существует такое отображение $T = U + S$, где отображение U сохраняет меру γ и S — отображение со значениями в пространстве Камерона–Мартина H меры γ , что функция $\exp(\omega |S|_H^2)$ интегрируема при достаточно малых ω (однако отображение T не обязательно является оптимальным переносом). Наш основной результат в п. 2 содержит неравенство Талаграна и оценку Ферника для оптимальных переносов как частные случаи и применим к более общим преобразованиям. Все результаты этой работы имеют следующий вид: если вероятностная мера μ преобразуется в вероятностную меру $\nu = g \cdot \mu$ отображением $T(x) = x + F(x)$, то

$$\int_{\mathbf{R}^d} \Phi_1(|F(x)|) \mu(dx) \leq \int_{\mathbf{R}^d} \Phi_2(g(x)) \mu(dx)$$

для некоторых функций Φ_1 и Φ_2 при подходящих предположениях относительно μ . Множество специальных случаев получается при варьировании класса мер μ , преобразований T и функций Φ_2 . Например, если мера μ — гауссовская (или удовлетворяет логарифмическому неравенству Соболева) и $\Phi_2(g) = g^p$, то $\Phi_1(|F|) = \exp(\omega|F|^2)$, а если $\Phi_2(g) = g|\ln g|^p$, то $\Phi_1(|F|) = |F|^r$. В п. 2 мы имеем дело со случаем, где μ — гауссовская или строго выпуклая мера, T — довольно общее обратимое преобразование или оптимальный перенос для функций стоимости $h(x, y) = |x - y|^p$, $p \in (1, 2]$. В пп. 3 и 4 рассматриваются оптимальные переносы для $h(x, y) = |x - y|^2$ в случае мер, удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева и неравенству Пуанкаре соответственно.

Введем некоторые обозначения и терминологию. Для заданных меры μ и μ -интегрируемой функции g обозначим через $g \cdot \mu$ меру с плотностью g относительно μ . Символ $W^{p,k}(U)$ обозначает классическое пространство Соболева функций на открытом множестве $U \subset \mathbf{R}^d$, которые входят в $L^p(U)$ вместе со своими обобщенными производными до порядка k . Символ $W^{p,k}(U, \mathbf{R}^d)$ обозначает пространство отображений из U в $\mathbf{R}^d$, компоненты которых принадлежат $W^{p,k}(U)$. Класс $W_{\text{loc}}^{p,k}$ состоит из таких отображений (или функций) f на $\mathbf{R}^d$, что $\zeta f \in W^{p,k}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ (соответственно $\zeta f \in W^{p,k}(\mathbf{R}^d)$) для всех $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$.

Предположим, что μ — борелевская мера на $\mathbf{R}^d$ с плотностью $\varrho \in W_{\text{loc}}^{1,1}$. Для заданного отображения $F \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ пусть

$$\delta_\mu F(x) := \operatorname{div} F(x) + \left\langle F(x), \frac{\nabla \varrho(x)}{\varrho(x)} \right\rangle,$$

где мы полагаем $\nabla \varrho(x)/\varrho(x) = 0$ при $\varrho(x) = 0$. Если $|F| \varrho$, $|F| |\Delta \varrho|$, $\|DF\| \varrho \in L_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^d)$, то для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi \delta_\mu F d\mu = - \int_{\mathbf{R}^d} \langle \nabla \varphi, F \rangle d\mu.$$

Пусть $x^2 := |x|^2$, если $x \in \mathbf{R}^d$. Для заданного линейного оператора A на $\mathbf{R}^d$ положим

$$\det_2 A := \det A \exp(\operatorname{Trace}(I - A)).$$

Если A симметричен и имеет собственные значения $a_1, \dots, a_d$, то $\det_2 A = \prod_{i=1}^d a_i e^{1-a_i}$. В частности, если $A \geq 0$, то $0 \leq \det_2 A \leq 1$. Если $A = I + B$, то

$$\det_2 A = \det(I + B) \exp(-\operatorname{Trace} B).$$

Абсолютно непрерывная мера μ на $\mathbf{R}^d$ называется выпуклой, если ее плотность имеет вид $\exp(-V)$, где V — выпуклая функция.

Говорят, что вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^d$ удовлетворяет логарифмическому неравенству Соболева, если существует такое число $C > 0$, что следующее неравенство выполнено для каждой функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2 \ln \varphi^2 d\mu - \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2 d\mu \right) \ln \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2 d\mu \right) \leq 2C \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varphi|^2 d\mu. \quad (1.1)$$

Необходимым условием, чтобы μ удовлетворяла (1.1), является существование такого $\varepsilon > 0$, что $\exp(\varepsilon|x|^2) \in L^1(\mu)$ (на самом деле это верно для всякого $\varepsilon < (2C)^{-1}$, см. [22, гл. 5]). В [23] показано, что если μ — выпуклая мера, причем $\exp(\varepsilon|x|^2) \in L^1(\mu)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то μ удовлетворяет (1.1) с некоторым $C(\varepsilon)$. В качестве примера меры, удовлетворяющей (1.1), можно взять вероятностную меру с плотностью $\exp(-V)$, где V — дважды дифференцируемая выпуклая функция с $D^2V(x) \geq C^{-1}I$ (см. [22]).

Говорят, что вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^d$ удовлетворяет неравенству Пуанкаре, если для всех $\varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \left(\varphi - \int_{\mathbf{R}^d} \varphi d\mu \right)^2 d\mu \leq C_2 \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varphi|^2 d\mu. \quad (1.2)$$

Согласно [24], всякая выпуклая мера удовлетворяет (1.2). Отметим, что всякая мера μ , удовлетворяющая (1.2), удовлетворяет также неравенству

$$\int_{\mathbf{R}^d} \left| \varphi - \int_{\mathbf{R}^d} \varphi d\mu \right|^p d\mu \leq C_p \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varphi|^p d\mu, \quad \varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d), \quad (1.3)$$

для каждого $p \geq 2$ и $C_p = C_2^{p/2}(1 + p^2/4)^{p/2}$. В самом деле, без потери общности можно считать, что $\int_{\mathbf{R}^d} \varphi d\mu = 0$. Пусть $p = 2 + t$. По неравенствам Пуанкаре и Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^{2+t} d\mu &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} \varphi |\varphi|^{t/2} d\mu \right)^2 + C_2 \left(1 + \frac{t}{2} \right)^2 \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varphi|^2 |\varphi|^t d\mu \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2 d\mu \int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^t d\mu + C_2 \left(1 + \frac{t}{2} \right)^2 \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varphi|^{2+t} d\mu \right)^{2/(2+t)} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^{2+t} d\mu \right)^{t/(2+t)} \\ &\leq \left[\int_{\mathbf{R}^d} C_2 |\nabla \varphi|^2 d\mu + C_2 \left(1 + \frac{t}{2} \right)^2 \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varphi|^{2+t} d\mu \right)^{t/(2+t)} \right] \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^{2+t} d\mu \right)^{t/(2+t)} \leq C_2 \left[1 + \left(1 + \frac{t}{2} \right)^2 \right] \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \varphi|^{2+t} d\mu \right)^{t/(2+t)} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\varphi|^{2+t} d\mu \right)^{t/(2+t)}, \end{aligned}$$

что дает наше утверждение.

Отметим, что если μ удовлетворяет (1.1) или (1.2) с некоторыми постоянными, то такова же и всякая вероятностная мера вида $\exp U \cdot \mu$, где функция U ограничена (см. [22, с. 96]).

Наконец, напомним, что по теореме Бренье [9] (см. [20, с. 66]) для всякой пары борелевских вероятностных мер μ и ν на $\mathbf{R}^d$ с конечными вторыми моментами такой, что μ абсолютно непрерывна, найдется такая выпуклая функция V на $\mathbf{R}^d$ (которая конечна на выпуклом множестве полной μ -меры), что отображение $T = \nabla V$ преобразует μ в ν и является единственным оптимальным переносом между μ и ν для функции стоимости $h(x, y) = |x - y|^2$. Более того, предположим, что ν также абсолютно непрерывна. Зададим преобразование Лежандра V^* функции V посредством

$$V^*(x) = \sup_y [\langle x, y \rangle - V(y)].$$

Тогда функция V^* конечна и выпукла на выпуклом множестве полной ν -меры, отображение $S = \nabla V^*$ преобразует ν в μ , является единственным оптимальным переносом между ν и μ и для μ -почти всех x и y удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \nabla V^*(\nabla V(x)) &= x, \quad V(x) + V^*(\nabla V(x)) = \langle x, \nabla V(x) \rangle, \\ V(x) + V^*(y) &\geq \langle x, y \rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Р. Маккэн [16] (см. также [20]) следующим образом уточнил теорему Бренье: для двух заданных борелевских вероятностных мер μ и ν на $\mathbf{R}^d$ таких, что μ абсолютно непрерывна (никаких моментных условий не накладывается), существует отображение T , являющееся градиентом выпуклой функции и преобразующее μ в ν . Такое отображение единственно в том смысле, что всякие два таких отображения совпадают μ -почти всюду.

2. Оценки нелинейных преобразований. Сначала мы рассмотрим преобразования стандартной гауссовской меры γ на $\mathbf{R}^d$.

Теорема 2.1. Пусть $T = I + F$ — борелевское отображение в $\mathbf{R}^d$, которое инъективно на множестве полной γ -меры и преобразует γ в меру $g \cdot \gamma$, причем $F \in W_{\text{loc}}^{1,1}$. Предположим, что для некоторого $\kappa \geq 0$ почти всюду $\langle DF(x)a, a \rangle \geq -\kappa|a|^2$ при всех $a \in \mathbf{R}^d$, а также $\det_2(I + DF) > 0$ почти всюду (т.е. $\det(I + DF) > 0$ почти всюду). Пусть θ — такая неотрицательная возрастающая локально липшицева функция на $[0, +\infty)$, что для некоторого $\omega \in (0, (4\kappa)^{-1})$ почти всюду $\theta' \leq \omega\theta$. Предположим также, что найдутся число $\alpha > 2(1 - 4\omega\kappa)^{-1}$ и функция $\Psi \in L^1(\gamma)$ такие, что

$$g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|) \in L^1(\gamma), \quad \ln \det_2(I + DF)\theta(|F|^2) \leq \Psi. \quad (2.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) d\gamma \\ & \leq \left(\frac{1}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \left[\int_{\mathbf{R}^d} g |\ln g| \theta(\alpha |\ln g|) d\gamma + \int_{\mathbf{R}^d} \Psi d\gamma \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В частности, если $\det_2(I + DF) \leq 1$ почти всюду (что выполнено, если, например, операторы $I + DF(x)$ симметричны и неотрицательны), то

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) d\gamma \leq \left(\frac{1}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} g |\ln g| \theta(\alpha |\ln g|) d\gamma. \quad (2.3)$$

Наконец, если θ удовлетворяет указанным условиям на всей прямой, то в (2.1), (2.2) и (2.3) можно заменить $\theta(\alpha |\ln g|)$ на $\theta(\alpha \ln g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что имеется такое число τ , что θ постоянна на $[\tau, +\infty)$. Заметим, что $\theta(|F|^2) \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ и имеют место равенство

$$\nabla \theta(|F|^2) = 2\theta'(|F|^2) DF \cdot F \quad (2.4)$$

и оценка

$$\theta'(|F(x)|^2) |DF(x) \cdot F(x)| \leq \sqrt{\tau} \sup_{t \in [0, \tau]} \theta'(t) \|DF(x)\|. \quad (2.5)$$

Чтобы это обосновать, зафиксируем шар U и возьмем последовательность отображений $F_j \in C_0^\infty$, сходящуюся к F по норме $W^{1,1}(U, \mathbf{R}^d)$ и почти всюду. Тогда $\theta(|F_j|^2) \rightarrow \theta(|F|^2)$ в $L^1(U)$. Кроме того, отображения $\nabla \theta(|F_j|^2) = 2\theta'(|F_j|^2) DF_j \cdot F_j$ сходятся в $L^1(U, \mathbf{R}^d)$ к отображению $2\theta'(|F|^2) DF \cdot F$, что доказывает, что $\theta(|F|^2)$ на U входит в $W^{1,1}(U)$ и выполнено (2.4) и (2.5).

Зафиксируем функцию $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ такую, что $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ и $|\nabla \zeta(x)| \leq M$. Из наших предположений вытекает, что T обладает борелевской версией, которая инъективна на множестве полной меры и имеет свойство Лузина (N). Значит, выполняется обычная формула замены переменных

$$\ln g(T) = -\delta_\gamma F + \frac{1}{2} |F|^2 - \ln \det_2(I + DF),$$

где $\delta_\gamma F(x) = \operatorname{div} F(x) - \langle F(x), x \rangle$ (см. [25] и [26, теорема 5.8.29], [27, § 6.3]). Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} \ln g(T) \theta(|F|^2) \zeta d\gamma \geq - \int_{\mathbf{R}^d} \delta_\gamma F \theta(|F|^2) \zeta d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) \zeta d\gamma \\ & - \int_{\mathbf{R}^d} \Psi \zeta d\gamma = 2 \int_{\mathbf{R}^d} \langle DF \cdot F, F \rangle \theta'(|F|^2) \zeta d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mathbf{R}^d} \theta(|\dot{F}|^2) \langle F, \nabla \zeta \rangle d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) \zeta d\gamma - \int_{\mathbf{R}^d} \Psi \zeta d\gamma \\
& \geq -2\kappa \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta'(|F|^2) \zeta d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) \zeta d\gamma \\
& \quad + \int_{\mathbf{R}^d} \theta(|F|^2) \langle F, \nabla \zeta \rangle d\gamma - \int_{\mathbf{R}^d} \Psi \zeta d\gamma \\
& \geq \left(\frac{1}{2} - 2\omega\kappa \right) \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) \zeta d\gamma + \int_{\mathbf{R}^d} \theta(|F|^2) \langle F, \nabla \zeta \rangle d\gamma - \int_{\mathbf{R}^d} \Psi \zeta d\gamma.
\end{aligned}$$

Равенство в цепочке соотношений выше выполнено ввиду формулы интегрирования по частям, которая применима в силу (2.4). Используя неравенство

$$x\theta(y) \leq \alpha^{-1}y\theta(y) + |x|\theta(\alpha|x|), \quad (2.6)$$

которое выполнено для каждого x и каждого $y \geq 0$ (имеем либо $x \leq y/\alpha$, либо $x > y/\alpha$), получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d} \ln g(T) \theta(|F|^2) \zeta d\gamma & \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) \zeta d\gamma \\
& \quad + \int_{\mathbf{R}^d} |\ln g(T)| \theta(\alpha |\ln g(T)|) \zeta d\gamma.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha} \right) \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) \zeta d\gamma & \leq \int_{\mathbf{R}^d} \theta(|F|^2) \langle F, \nabla \zeta \rangle d\gamma \\
& \quad + \int_{\mathbf{R}^d} |\ln g(T)| \theta(\alpha |\ln g(T)|) \zeta d\gamma + \int_{\mathbf{R}^d} \Psi \zeta d\gamma. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Возьмем последовательность функций $\zeta_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ таких, что

$$\sup_{j,x} |\nabla \zeta_j(x)| \leq M, \quad 0 \leq \zeta_j(x) \leq 1 \quad \text{и} \quad \zeta_j(x) = 1 \quad \text{при} \quad |x| \leq j.$$

Полагая $\zeta = \zeta_j$ в (2.7), заметим, что при $j \rightarrow \infty$ первый интеграл в правой части стремится к нулю, так как $\theta(|F|^2)|F|$ является ограниченной функцией, а последовательность $\{|\nabla \zeta_j|\}$ равномерно ограничена и стремится к нулю поточечно. Значит, (2.7) выполнено с $\zeta = 1$. Формула замены переменных дает

$$\left(\frac{1}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha} \right) \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) d\gamma \leq \int_{\mathbf{R}^d} g |\ln g| \theta(\alpha |\ln g|) d\gamma + \int_{\mathbf{R}^d} \Psi d\gamma,$$

что завершает доказательство в рассматриваемом случае. В общем случае положим $\theta_j(t) = \theta(t)$, если $t \leq j$, и $\theta_j(t) = \theta(j)$, если $t \geq j$. Поскольку $\theta_j \leq \theta$, то оценка (2.2) для каждого θ_j вместо θ дает эту же самую оценку для θ .

Если $\det_2(I + DF) \leq 1$ почти всюду, то берем $\Psi = 0$. Наконец, если θ удовлетворяет указанным условиям на всей прямой, то в неравенстве (2.6) можно заменить $\theta(\alpha|x|)$ на $\theta(\alpha x)$, что приведет к замене $\theta(\alpha|\ln g|)$ на $\theta(\alpha \ln g)$ в (2.1), (2.2) и (2.3). Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. Пусть $T_j = I + F_j$ — борелевские отображения в $\mathbf{R}^d$, инъективные на множествах полной меры и преобразующие γ в такие меры $g_j \cdot \gamma$, что плотности g_j сходятся по мере γ к вероятностной плотности g относительно γ , а отображения F_j сходятся по мере γ к отображению F . Предположим, что $F_j \in W_{\text{loc}}^{1,1}$, для некоторого $\kappa \geq 0$ почти всюду $\langle DF_j(x)a, a \rangle \geq -\kappa|a|^2$ при всех $a \in \mathbf{R}^d$, а также $0 < \det_2(I + DF_j) \leq 1$ почти всюду. Пусть θ — неотрицательная возрастающая локально липшицева функция на $[0, +\infty)$ такая, что для некоторого $\omega \in (0, (4\kappa)^{-1})$ почти всюду $\theta' \leq \omega\theta$. Предположим, что $\sup_j \|g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|)\|_{L^1(\gamma)} < \infty$, где $\alpha > 2(1 - 4\omega\kappa)^{-1}$. Тогда $\gamma \circ (I + F)^{-1} = g \cdot \gamma$ и

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) d\gamma \leq \left(\frac{1}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \sup_j \int_{\mathbf{R}^d} g_j |\ln g_j| \theta(\alpha |\ln g_j|) d\gamma.$$

Следствие 2.2. Пусть $T = I + F$ — оптимальный перенос между γ и $g \cdot \gamma$ для функции стоимости $h(x, y) = |x - y|^2$. Пусть функция θ — такая же, как и в теореме, где $\omega < \frac{1}{4}$. Предположим, что $g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|) \in L^1(\gamma)$, где $\alpha > 2(1 - 4\omega)^{-1}$. Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) d\gamma \leq \left(\frac{1}{2} - 2\omega - \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} g |\ln g| \theta(\alpha |\ln g|) d\gamma.$$

Доказательство. Возьмем последовательность гладких положительных вероятностных плотностей $g_j \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$ (относительно меры γ) таких, что $g_j \rightarrow g$ почти всюду и интегралы функций $g_j |\ln g_j| \theta(\alpha |\ln g_j|)$ относительно γ сходятся к интегралу функции $g |\ln g| \theta(\alpha |\ln g|)$. Соответствующие оптимальные переносы $T_j = I + F_j$ сходятся по мере γ к оптимальному переносу $T = I + F$ для g ввиду леммы ниже. Кроме того, имеем $I + DF_j > 0$ и $0 < \det_2(I + DF_j) \leq 1$. Наконец, согласно теории регулярности Кафарелли, отображения T_j являются гладкими (см. [20, с. 140]).

Как и в теореме 2.1, если θ удовлетворяет указанным условиям на всей прямой, то в обоих следствиях можно заменить $\theta(\alpha|\ln g|)$ на $\theta(\alpha \ln g)$.

Лемма 2.1. Пусть μ — борелевская вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$ с плотностью, локально отделенной от нуля. Предположим, что последовательность борелевских вероятностных мер ν_j на $\mathbf{R}^d$ слабо сходится к борелевской вероятностной мере ν . Пусть V_j и V — такие

конечные выпуклые функции, что $\mu \circ (\nabla V_j)^{-1} = \nu_j$ и $\mu \circ (\nabla V)^{-1} = \nu$. Предположим, что

$$\sup_j \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V_j| d\mu < \infty.$$

Тогда отображения ∇V_j сходятся μ -почти всюду к ∇V . То же самое верно, если предположения выполнены на открытом выпуклом множестве в $\mathbf{R}^d$.

Доказательство. Сначала проверим сходимость ∇V_j к ∇V по мере μ . Пусть U_k — замкнутый шар радиуса k с центром в начале координат. Добавляя постоянные, мы можем считать, что $\int_{U_1} V_j(x) dx = 0$ для всех j . Из нашего предположения и компактности вложения $W^{1,1}(U_1) \rightarrow L^1(U_1)$ вытекает, что последовательность функций $V_j|_{U_1}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в $L^1(U_1)$. Обозначим эту подпоследовательность снова через $\{V_j\}$. По той же причине для каждого фиксированного k последовательность функций $V_j - c_{k,j}$, где $c_{k,j} = \int_{U_k} V_j(x) dx$, имеет подпоследовательность $\{V_{j_n} - c_{k,j_n}\}$, которая сходится в $L^1(U_k)$. Тогда последовательность $\{c_{k,j_n}\}$ сходится, что дает сходимость $\{V_{j_n}\}$ в $L^1(U_k)$. С помощью диагонального процесса можно выбрать подпоследовательность, обозначаемую через $\{W_j\}$, которая сходится в $L^1(U_k)$ для каждого k и сходится почти всюду. Легко видеть, что если последовательность выпуклых функций на вещественной прямой сходится почти всюду, то она сходится поточечно. Применяя теорему Фубини, заключаем, что последовательность $\{W_j\}$ сходится поточечно к выпуклой функции W . Хорошо известно (см. [28, теоремы 24.5 и 25.4]), что тогда последовательность отображений ∇W_j , которые определены почти всюду, сходится почти всюду к ∇W . Значит, эта последовательность сходится в $L^1(U_k)$ для всякого k , так как она равномерно интегрируема на каждом шаре U_k с мерой Лебега ввиду оценки

$$|\partial_{x_i} \Psi(x)| \leq |\Psi(x + e_i)| + |\Psi(x)| + |\Psi(x - e_i)|,$$

которая выполнена для всякой выпуклой функции Ψ и всякого i . Меры $\mu \circ (\nabla W_j)^{-1}$ сходятся слабо к мере $\mu \circ (\nabla W)^{-1}$. Это означает, что $\nu = \mu \circ (\nabla W)^{-1}$. Следовательно, $\nabla V = \nabla W$ почти всюду, ибо выпуклая функция, градиент которой преобразует μ в ν , определена однозначно с точностью до постоянной. Наконец, наше рассуждение применимо ко всякой подпоследовательности в исходной последовательности, откуда следует утверждение о сходимости по мере μ .

Чтобы увидеть, что мы имеем сходимость почти всюду всей последовательности, рассмотрим последовательность $\{\nabla V_j\}$, сходящуюся по мере μ к отображению ∇V (как показано выше), и предположим, что функции V_j и V имеют нулевые интегралы по U_1 , что достигается добавлением постоянных. Тогда последовательность $\{V_j\}$ сходится к V по

мере μ . Если последовательность $\{V_j(x_0)\}$ не сходится к $V(x_0)$ в некоторой точке x_0 , то она содержит подпоследовательность $\{V_{j_n}(x_0)\}$, отделенную от $V(x_0)$. С помощью приведенных выше рассуждений можно найти дальнейшую подпоследовательность в $\{V_{j_n}\}$, обозначаемую тем же символом, которая сходится поточечно к выпуклой функции W , отличной от V . Это дает противоречие, так как $V(x) = W(x)$ почти всюду, ибо $\{V_{j_n}\}$ сходится по мере μ к W и к V . Как отмечено выше, поточечная сходимость функций V_j влечет сходимость почти всюду их градиентов. Лемма 2.1 доказана.

Следствие 2.3. Пусть μ — борелевская вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$ с плотностью, локально отделенной от нуля. Предположим, что последовательность борелевских вероятностных мер ν_j слабо сходится к борелевской вероятностной мере ν и что меры μ, ν_j и ν имеют конечные вторые моменты. Пусть T_j — оптимальные переносы между μ и ν_j для функции стоимости $h(x, y) = |x - y|^2$. Если

$$\sup_j \int_{\mathbf{R}^d} |T_j| d\mu < \infty,$$

то отображения T_j сходятся μ -почти всюду к оптимальному переносу между μ и ν .

Пример 2.1. (i) Предположим, что борелевская вероятностная мера μ имеет плотность, локально отделенную от нуля, и конечный второй момент. Пусть $\mathcal{PD}_2(\mu)$ обозначает класс всех таких вероятностных плотностей g относительно μ , что функция $g(x)|x|^2$ является μ -интегрируемой. Для каждой функции $g \in \mathcal{PD}_2(\mu)$ пусть T_g — оптимальный перенос между μ и $g \cdot \mu$ для функции стоимости $h(x, y) = |x - y|^2$. Предположим также, что μ удовлетворяет неравенству Талагранна

$$\int_{\mathbf{R}^d} |T_g(x) - x|^2 \mu(dx) \leq c \operatorname{Ent}_\mu(g)$$

для всех $g \in \mathcal{PD}_2(\mu)$. Пусть функции $g_j \in \mathcal{PD}_2(\mu)$ сходятся по мере μ к $g \in \mathcal{PD}_2(\mu)$, и пусть $\sup_j \operatorname{Ent}_\mu(g_j) < \infty$. Тогда $|T_{g_j} - T_g| \rightarrow 0$ в $L^r(\mu)$ для каждого $r < 2$ и $T_{g_j} \rightarrow T_g$ почти всюду. Хорошо известно, что предположения этого примера выполнены для всякой меры μ , имеющей локально отделенную от нуля плотность и удовлетворяющую логарифмическому неравенству Соболева, например, для стандартной гауссовской меры.

(ii) Пусть μ — мера Лебега на кубе $K = [0, 1]^d$. Для каждой борелевской вероятностной меры ν на K обозначим через T_ν : $K \rightarrow K$ оптимальный перенос между μ и ν . Как известно, существует борелевское (даже непрерывное) отображение η : $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^d$, переводящее меру Лебега λ на $[0, 1]$ в меру Лебега на $[0, 1]^d$ (см. [26, гл. 9]). Тогда отображения $\nu \mapsto \xi_\nu := T_\nu \circ \eta$ задают параметризацию борелевских вероятностных

мер на K отображениями из $[0, 1]$ в K со следующим свойством непрерывности: $\lambda \circ \xi_\nu^{-1} = \nu$ для всех ν и $\xi_{\nu_j} \rightarrow \xi_\nu$ λ -почти всюду, если $\nu_j \rightarrow \nu$ слабо. Напомним, что такое представление называется параметризацией Скорохода вероятностных мер на K и может быть получено для каждого польского пространства. Этот результат для общих польских пространств принадлежит Блэкуэллу, Дуббинсу и Фернику; см. соответствующие ссылки и обсуждение в [29] и [26, гл. 8], где объяснено, как частный случай $[0, 1]^3$ дает общий результат.

Теорема может быть использована для установления интегрируемости функций $|F|^r$ и $\exp(\omega|F|^2)$ при подходящих предположениях интегрируемости $g|\ln g|^p$ или g^p .

П р и м е р 2.2. (i) Положим $\theta(t) = \exp(\omega t)$. В предположении, что почти всюду $\langle DF(x)a, a \rangle \geq -|a|^2$ для всех $a \in \mathbf{R}^d$ и $0 < \det_2(I + DF) \leq 1$ (что выполнено, если $I + DF(x)$ — неотрицательный симметричный оператор), получаем

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \exp(\omega|F|^2) d\gamma \leq \left(\frac{1}{2} - 2\omega - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} g^{1+\alpha} |\ln g| d\gamma, \quad (2.8)$$

если $\omega < \frac{1}{4} - 1/(2\alpha)$. Значит, при $\omega < (p-3)(4p-4)^{-1}$ и $g \in L^p(\gamma)$ $|F|^2 \exp(\omega|F|^2) \in L^1(\gamma)$.

(ii) Положим $\alpha = 3$ и $\omega = \frac{1}{20}$. Пусть $\theta(t) = (20r)^r + t^r$, где $r \geq 1$. Тогда $\theta' \leq \omega\theta$, и при тех же предположениях относительно DF , что и в (i), получаем, что существует такое число $C(r)$, зависящее лишь от r , что

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^{2+r} d\gamma \leq C(r) \int_{\mathbf{R}^d} g |\ln g|^{r+1} d\gamma.$$

При $0 < r < 1$ аналогичным образом получаем оценку

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^{2+r} d\gamma \leq C(r) \int_{\mathbf{R}^d} g[|\ln g|^{r+1} + 1] d\gamma,$$

используя функцию $\theta(t) = 20r + \max(1, |t|^r)$. Наконец, взяв $\theta = 1$, приходим к оценке

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 d\gamma \leq C \int_{\mathbf{R}^d} g |\ln g| d\gamma,$$

которую, однако, легко усилить до оценки Талагранна

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 d\gamma \leq C \int_{\mathbf{R}^d} g \ln g d\gamma,$$

вернувшись непосредственно к доказательству теоремы при $\theta = 1$.

Более внимательное рассмотрение доказательства теоремы 2.1 показывает, что оно применимо к более общим мерам. Предположим, что μ — вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$ с плотностью $f = \exp(-V)$, где V — дважды дифференцируемая выпуклая функция.

Теорема 2.2. Пусть $D^2V \geq \sigma I$ с некоторым $\sigma > 0$, и пусть $T = I + F$ — борелевское отображение в $\mathbf{R}^d$, инъективное на множестве полной меры и преобразующее μ в меру $g \cdot \mu$. Предположим, что F и θ удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме 2.1. Пусть существуют такие число $\alpha > 0$ с $1/\alpha < \sigma/2 - 2\omega\kappa$ и функция $\Psi \in L^1(\mu)$, что

$$g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|) \in L^1(\mu), \quad \ln \det_2(I + DF)\theta(|F|^2) \leq \Psi.$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) d\mu \leq \left(\frac{\sigma}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \left[\int_{\mathbf{R}^d} g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|) d\mu + \int_{\mathbf{R}^d} \Psi d\mu \right].$$

Если $\det_2(I + DF) \leq 1$ почти всюду, то

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) d\mu \leq \left(\frac{\sigma}{2} - 2\omega\kappa - \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} g|\ln g|\theta(\alpha|\ln g|) d\mu.$$

Наконец, если θ удовлетворяет указанным условиям на всей прямой, то можно заменить $\theta(\alpha|\ln g|)$ на $\theta(\alpha \ln g)$.

Доказательство. Рассуждение аналогично. Заметим, что $\delta_\mu F = \operatorname{div} F - \langle F, \nabla V \rangle$. Формула замены переменных принимает вид

$$\ln g(T) = -\delta_\mu F + V(T) - V - \langle \nabla V, F \rangle - \ln \det_2(I + DF).$$

Из наших предположений вытекает, что

$$V(x + F(x)) - V(x) - \langle \nabla V(x), F(x) \rangle \geq \sigma |F(x)|^2.$$

Следовательно, в ситуации первого шага доказательства теоремы 2.1 аналогичное рассуждение дает оценку

$$\int_{\mathbf{R}^d} \ln g(T) \theta(|F|^2) d\mu \geq \left(\frac{\sigma}{2} - 2\omega\kappa \right) \int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) d\mu - \int_{\mathbf{R}^d} \Psi d\mu.$$

Оставшаяся часть доказательств совершенно аналогична рассуждениям предыдущей теоремы.

З а м е ч а н и е 2.1. Для некоторых специальных функций θ наша общая оценка (2.2) может быть слегка улучшена с тем же самым доказательством. Например, предположим, что в ситуации теоремы 2.1 имеем $\theta(t) = \exp(\omega t)$ (как в примере 2.2(i)). Повторим доказательство теоремы, используя неравенство $xy \leq e^{x-1} + y \ln y$ вместо неравенства (2.6). Тогда для всяких фиксированных $\alpha > 0$ и $\omega < \alpha/(1 + 2\alpha\kappa)$ получаем

$$\begin{aligned} \alpha \ln g(T) \theta(|F|^2) &\leq \frac{1}{e} \exp[\alpha \ln g(T)] + \theta(|F|^2) \ln \theta(|F|^2) \\ &\leq \frac{1}{e} \exp[\alpha \ln g(T)] + \omega |F|^2 \theta(|F|^2), \end{aligned}$$

поскольку $\ln \theta(t) \leq \omega t$ (в общем случае $\ln \theta(t) \leq \omega t + \ln \theta(0)$, если $\theta(0) > 0$). Окончательно имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \exp(\omega |F|^2) d\gamma \leq \frac{2}{e(\alpha - 4\omega\kappa\alpha - 2\omega)} \left[\int_{\mathbf{R}^d} g^{1+\alpha} d\gamma + e\alpha \int_{\mathbf{R}^d} \Psi d\gamma \right], \quad (2.9)$$

что точнее, чем (2.8). Действительно, если $\kappa = 1$, то $\exp(\omega |F|^2) \in L^1(\gamma)$ при условии, что $g \in L^{1+\alpha}(\gamma)$ и $\omega < \alpha/(4\alpha + 2)$, в то время как (2.8) требует, чтобы $\omega < (\alpha - 2)/(4\alpha)$, в частности, чтобы получить $\omega > 0$, следует брать $\alpha > 2$. Однако при $\alpha \rightarrow \infty$ оба ограничения на ω стремятся к $\frac{1}{4}$. То же самое касается теоремы 2.2.

Стоит отметить, что в общем случае функция $\exp(\omega |F|^2)$ может не быть γ -интегрируемой при $\omega > \frac{1}{2}$, даже если g ограничена. Достаточно рассмотреть функции $T(x) := x - sx$ с $s \in (0, 1)$ на вещественной прямой со стандартной гауссовской мерой γ . Ограничение $s < 1$ здесь необходимо, чтобы обеспечить наше предположение, что $T' \geq 0$. Без этого предположения функция $\exp(\omega |F|^2)$ не обязана быть γ -интегрируемой даже при $\omega = \frac{1}{8}$ в случае сохраняющего меру γ отображения (пример: $T(x) := x - 2x = -x$).

З а м е ч а н и е 2.2. Более внимательный анализ доказательства теоремы 2.1 показывает, что можно следующим образом ослабить предположения относительно отображения T , которое преобразует γ в $g \cdot \gamma$. Достаточно предполагать лишь, что выполняется формула замены переменных

$$G(T(x)) = \exp \left[-\text{Trace } \Lambda(x) + \langle F(x), x \rangle + \frac{|F(x)|^2}{2} \right] (\det_2(I + \Lambda(x)))^{-1},$$

где $x \mapsto \Lambda(x)$ — некоторое локально интегрируемое операторнозначное отображение такое, что $\delta_\gamma F(x) := \text{Trace } \Lambda(x) - \langle F(x), x \rangle$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbf{R}^d} \delta_\gamma F \theta(|F|^2) d\gamma \leq -2\kappa \int_{\mathbf{R}^d} \theta'(|F|^2) |F|^2 d\gamma.$$

Реализация этого подхода могла бы основываться на неравенстве

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) \text{Trace } \Lambda(x) dx \leq - \int_{\mathbf{R}^d} \langle \nabla \varphi(x), T(x) \rangle dx$$

для всех неотрицательных $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, установленном в [10] для оптимальных переносов, соответствующих достаточно общим функциям стоимости (тогда Λ есть вторая производная в смысле Александрова некоторого потенциала). Было бы интересно распространить результаты [10] на более общие функции стоимости.

З а м е ч а н и е 2.3. (i) Результат К. Ферника [21] установлен при таком же ограничении на ω , как и в оценке (2.9). Однако, как отмечено

выше, Ферник рассматривал несколько иные отображения, так что было неясно, будет ли верна его оценка для оптимальных переносов.

(ii) Рассмотрим обратное отображение $S = T^{-1}$, которое является оптимальным переносом между $g \cdot \gamma$ и γ в случае функции стоимости $h(x, y) = |x - y|^2$. Заметим, что S преобразует γ в $(1/g(T)) \cdot \gamma$. Значит,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |S(x) - x|^2 \gamma(dx) \leq \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{g(T)} \ln \frac{1}{g(T)} d\gamma = \int_{\mathbf{R}^d} \ln \frac{1}{g} d\gamma.$$

Таким же образом, как и выше, можно показать, что если $1/g \in L^\tau(\gamma)$ для некоторого $\tau > 0$, то существует такое $\alpha > 0$, что $\exp(\alpha|S(x) - x|^2) \in L^1(\gamma)$, а если $\ln g \in L^{1+\tau}(\gamma)$, то $|S(x) - x|^{2(1+\beta)} \in L^1(\gamma)$ при некотором $\beta > 0$.

(iii) Пусть γ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X , и пусть H — ее пространство Камерона–Мартина с нормой $|\cdot|_H$ (см. [27]). Можно считать, что γ является счетным произведением стандартных гауссовских мер на прямой и задана на $\mathbf{R}^\infty$, тогда $H = l^2$ с обычной нормой. Предположим, что g — такая вероятностная плотность относительно γ , что $g \ln g \in L^1(\gamma)$. Как показано в [12], существует такое борелевское отображение $T: X \rightarrow X$ вида $T(x) = x + F(x)$, где $F: X \rightarrow H$, что $\gamma \circ T^{-1} = g \cdot \gamma$ и

$$\int_X |F(x)|_H^2 \gamma(dx) = \inf \int_X |R(x)|_H^2 \gamma(dx),$$

где $\inf$ берется по всем таким борелевским отображениям $I + R$, что $R: X \rightarrow H$ и $\gamma \circ (I + R)^{-1} = g \cdot \gamma$. Используя методы работ [12] и [6], можно показать, что следствие 2.2 распространяется на эту ситуацию и

$$\int_X |F|^2 \theta(|F|_H^2) d\gamma \leq \left(\frac{1}{2} - 2\omega - \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \int_X g |\ln g| \theta(\alpha |\ln g|) d\gamma.$$

Рассмотрим теперь функции стоимости $h(x, y) = p^{-1}|x - y|^p$, где $1 < p \leq 2$. Легко доказать, что сопряженная функция для $h_0(x) := p^{-1}|x|^p$ равна

$$h_0^*(x) = \frac{p-1}{p^{1/(p-1)}} |x|^q,$$

где $1/p + 1/q = 1$. Известно, что соответствующий оптимальный перенос T между γ и $g \cdot \gamma$ имеет вид

$$T(x) = x + \nabla h_0^*(\nabla \Phi(x))$$

для некоторого h -вогнутого локально липшицева потенциала Φ (см. [13] или [20, с. 92]). Здесь h -вогнутость Φ означает, что $\Phi = (\Phi^h)^h$, где $\psi^h(x) = \inf_y [h(x, y) - \psi(y)]$. Ренормализуя Φ , можно считать, что

$$T(x) = x + |\nabla \Phi(x)|^{q-2} \nabla \Phi(x).$$

Пусть $A_p(x) := D[|x|^{q-2}x]$. Имеем

$$(A_p(x))_{ij} = |x|^{q-2} \left(\delta_{ij} + (q-2) \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right).$$

Предположим дополнительно, что $\nabla\Phi \in W_{\text{loc}}^{1,1}$. Тогда можно показать, что упомянутая выше h -вогнутость Φ дает

$$A_p^{-1}(\nabla\Phi) + D^2\Phi \geq 0.$$

Это проверено в [20, с. 103] при более ограничительных предположениях относительно h (которые не выполнены в нашем случае), но дополнительная дифференцируемость $\nabla\Phi$ позволяет прийти к тому же самому заключению. Из оценки $|x|^{q-2}I \leq A_p(x) \leq (q-1)|x|^{q-2}I$ следует, что

$$D^2\Phi \geq -|\nabla\Phi|^{2-q}I.$$

Теорема 2.3. Пусть $T = I + F$ — оптимальный перенос между γ и $g \cdot \gamma$ для функции стоимости $h(x, y) = p^{-1}|x - y|^p$, где $1 < p \leq 2$. Предположим дополнительно, что $\nabla\Phi \in W_{\text{loc}}^{1,1}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Для каждого $\beta > 0$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^{2(\beta+1)} d\gamma \leq 2^{\beta+1} \int_{\mathbf{R}^d} |2\beta(q-1) + \ln g|^{\beta+1} g d\gamma. \quad (2.10)$$

(ii) При $\alpha > 0$ и $0 < \omega < \alpha/(2 + 4(q-1)\alpha)$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \exp(\omega|F|^2) d\gamma \leq \frac{2}{e(\alpha - 4\alpha\omega(q-1) - 2\omega)} \int_{\mathbf{R}^d} g^{1+\alpha} d\gamma. \quad (2.11)$$

В частности, $\exp(\omega|F|^2) \in L^1(\gamma)$, если $g \in L^{1+\alpha}(\gamma)$.

(iii) Если θ — неотрицательная возрастающая локально липшицева функция на $[0, +\infty)$, причем $\theta' \leq \omega\theta$ для некоторого $\omega < (\alpha - 1) \times (4\alpha(q-1))^{-1}$, где $\alpha > 1$, то

$$\int_{\mathbf{R}^d} |F|^2 \theta(|F|^2) d\gamma \leq 2 \left(1 - 4\omega q + 4\omega - \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} g |\ln g| \theta(\alpha |\ln g|) d\gamma. \quad (2.12)$$

Доказательство. Рассуждение совершенно такое же, как и выше. Заметим лишь, что $F = |\nabla\Phi|^{q-2}\nabla\Phi$, значит, $|F| = |\nabla\Phi|^{q-1}$. Следовательно, в случае (iii) имеем

$$\begin{aligned} \langle \nabla\theta(|\nabla\Phi|^{2q-2}), F \rangle &= (2q-2) \theta'(|\nabla\Phi|^{2q-2}) |\nabla\Phi|^{3q-6} \langle D^2\Phi \cdot \nabla\Phi, \nabla\Phi \rangle \\ &\geq -(2q-2) \omega \theta(|\nabla\Phi|^{2q-2}) |\nabla\Phi|^{2q-2} = -(2q-2) \omega |F|^2 \theta(|F|^2). \end{aligned}$$

Важно также, что $0 \leq \det_2 DT \leq 1$, поскольку $DT = A_p(\nabla\Phi)(A_p^{-1}(\nabla\Phi) + D^2\Phi)$ есть произведение двух неотрицательных матриц. Оставшаяся

часть доказательства повторяет рассуждения из теоремы 2.1 применительно к оцениванию интеграла от функции $\ln g(T) \theta(|\nabla \Phi|^{2(q-1)})$, дающей в итоге неравенство для интеграла от функции

$$|\nabla \Phi|^{2(q-1)} \theta(|\nabla \Phi|^{2(q-1)}) = |F|^2 \theta(|F|^2).$$

Теорема 2.3 доказана.

Как отмечено выше, предположение $\nabla \Phi \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ является довольно ограничительным и представляется необязательным. По-видимому, избавиться от этого предположения можно с помощью приближения $\nabla \Phi$ в общем случае переносами с более хорошими свойствами дифференцируемости (что, однако, все еще нуждается в обосновании) или путем развития идеи из замечания 2.2 в настоящей ситуации.

3. Случай мер, удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева. В этом пункте мы рассматриваем только квадратичную функцию стоимости. Покажем, что результат предыдущего пункта верен (качественно) также для мер, удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева. Оценки, которые мы получаем здесь для произвольных мер μ , удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева, в общем слабее, чем в гауссовском случае. Однако выполнено то же самое соотношение: если $g \in L^{1+\varepsilon}(\mu)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то функция $\exp(\omega|T(x) - x|^2)$ интегрируема для достаточно малых ω . Похожий результат установлен для степенных оценок.

Мы применим следующий замечательный результат, доказанный С.Г. Бобковым и Ф. Гётце в [3]: для всякой меры, удовлетворяющей (1.1), выполняется неравенство

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp \left[f - \int_{\mathbf{R}^d} f \, d\mu \right] d\mu \leq \int_{\mathbf{R}^d} \exp(C|\nabla f|^2) d\mu. \quad (3.1)$$

В гауссовском случае это неравенство было доказано в [30] с худшей постоянной (см. также [27, § 5.6]).

Для доказательства основного результата этого пункта нам понадобится вспомогательная оценка. Предположим, что μ удовлетворяет (1.1). Пусть V — такая выпуклая функция, что $T = \nabla V$ есть оптимальный перенос между μ и $g \cdot \mu$. Заметим, что $|\nabla V| \in L^2(\mu)$, так как μ и ν обладают конечными вторыми моментами, так что $|T| \in L^2(\mu)$. Функции V и V^* выпуклы, значит, $V(x) \geq M_1 - M_2|x|$ и $V^*(x) \geq M_1 - M_2|x|$ для некоторых чисел M_1 и M_2 . Это показывает, что функции $\exp[t(x^2/2 - V(x))]$ и $\exp[t(x^2/2 - V^*(x))]$ являются μ -интегрируемыми, если $t < C^{-1}$. Более того, справедливо следующее неравенство:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp \left[\frac{1}{C} \left(\frac{x^2}{2} - V^*(x) \right) \right] \mu(dx) \leq \exp \left[\frac{1}{C} \int_{\mathbf{R}^d} \left(V(x) - \frac{x^2}{2} \right) \mu(dx) \right]. \quad (3.2)$$

Обоснование аналогично доказательству неравенства инфимум-свертки в [22, гл. 6]. Для простоты обозначений предположим, что $C = 1$. Для данной вещественной функции f на $\mathbf{R}^d$ положим

$$\tilde{f}(x) = \inf_y \left[f(y) + \frac{|x - y|^2}{2} \right].$$

В [22, гл. 6] показано, что для всякой ограниченной измеримой функции f имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp \tilde{f} d\mu \leq \exp \int_{\mathbf{R}^d} f d\mu. \quad (3.3)$$

Желаемый результат формально получается подстановкой $f(x) := V(x) - x^2/2$, поскольку тогда $\tilde{f}(x) - x^2/2 = -V^*(x)$. Однако сведение к ограниченным функциям не является непосредственным и легче модифицировать соответствующее рассуждение. Таким образом, для заданной функции $f \in L^1(\mu)$ нам надо показать, что $\exp \tilde{f} \in L^1(\mu)$ и выполнено (3.3). Можно считать, что интеграл f относительно μ равен нулю. Пусть

$$g_n := \exp \min(\tilde{f}, n) \left(\int_{\mathbf{R}^d} \exp \min(\tilde{f}, n) d\mu \right)^{-1}.$$

Тогда $\nu_n := g_n \cdot \mu$ является вероятностной мерой и $\tilde{f} \in L^1(\nu_n)$, ибо $\tilde{f} \leq f$ и потому $\max(\tilde{f}, 0) \in L^1(\mu)$, а если $\tilde{f}(x) < 0$, то $\tilde{f}(x) \exp \tilde{f}(x) \leq 1$. Известно (см. [22, гл. 6]), что логарифмическое неравенство Соболева дает оценку $K(\mu, \nu) \leq \text{Ent}_\mu(d\nu/d\mu)$, где $K(\mu, \nu) := K(\mu, \nu, h)$ с $h(x, y) = |x - y|^2/2$. Поскольку $\tilde{f}(x) \leq f(y) + |x - y|^2/2$, то мы имеем, согласно неравенству Канторовича–Рубинштейна (см. [20, с. 19]),

$$\int_{\mathbf{R}^d} \tilde{f} d\nu_n = \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{f} d\nu_n - \int_{\mathbf{R}^d} f d\mu \leq K(\mu, \nu_n) \leq \text{Ent}_\mu(g_n).$$

Значит,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{f} \exp \min(\tilde{f}, n) d\mu + \ln \|\exp \min(\tilde{f}, n)\|_{L^1(\mu)} \\ & \leq \int_{\mathbf{R}^d} \min(\tilde{f}, n) \exp \min(\tilde{f}, n) d\mu. \end{aligned}$$

Так как $\min(\tilde{f}, n) \leq \tilde{f}$, то заключаем, что $\|\exp \min(\tilde{f}, n)\|_{L^1(\mu)} \leq 1$. По теореме Фату это дает интегрируемость $\exp \tilde{f}$ и оценку $\|\exp \tilde{f}\|_{L^1(\mu)} \leq 1$.

Теорема 3.1. Пусть μ удовлетворяет (1.1), и пусть $T(x) = x + \nabla \Phi(x)$ — оптимальный перенос между μ и $g \cdot \mu$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\omega}{4C}} (1 - \sqrt{16\omega C}) \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \Phi|^2 \exp(\omega |\nabla \Phi|^2) d\mu + \int_{\mathbf{R}^d} \exp(\omega |\nabla \Phi|^2) d\mu \\ & \leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} g^p d\mu \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

где $\omega \geq 0$, $16\omega C < 1$ и $p = 1/(1 - \sqrt{\omega C})$. В частности, функция $|\nabla\Phi|^2 \exp(\omega|\nabla\Phi|^2)$ входит в $L^1(\mu)$.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, (1.1) дает включение $\exp(\varepsilon x^2) \in L^1(\mu)$ для всякого $\varepsilon < (2C)^{-1}$. Так как $g \in L^p(\mu)$, то функция $|x|^2 g(x)$ является μ -интегрируемой. По формуле замены переменных имеем $|T|^2 \in L^1(\mu)$, т.е. $|\nabla\Phi| \in L^2(\mu)$. Как хорошо известно, ввиду (1.1) это дает $\Phi \in L^2(\mu)$. Поскольку потенциал Φ определен с точностью до постоянной, можно выбрать Φ так, что $\int_{\mathbf{R}^d} \Phi d\mu = 0$. Напомним, что $\Phi(x) + x^2/2 = V(x)$ для некоторой выпуклой функции V . Зафиксируем число r , $0 < r < C^{-1}$. Неравенство (3.2) дает

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[\frac{1}{C}\left(\frac{x^2}{2} - V^*(x)\right)\right] \mu(dx) \leq \exp\left[\frac{1}{C} \int_{\mathbf{R}^d} \left(V(x) - \frac{x^2}{2}\right) \mu(dx)\right] = 1. \quad (3.4)$$

Используя (1.4), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2 \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2) \mu(dx) \\ &= r \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V(x) - V^*(\nabla V(x)) + \frac{|\nabla V(x)|^2}{2} \right] \\ & \quad \times \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2) \mu(dx). \end{aligned}$$

В силу неравенства $xy \leq x \ln x - x + e^y$ последнее не превосходит

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r \frac{x^2}{2} - rV(x)\right] \mu(dx) + \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r \frac{|\nabla V(x)|^2}{2} - rV^*(\nabla V(x))\right] \mu(dx) \\ &+ 2\omega \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2 \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2) \mu(dx) \\ &- 2 \int_{\mathbf{R}^d} \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2) \mu(dx). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r}{2} - 2\omega\right) \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2 \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2) d\mu \\ &+ 2 \int_{\mathbf{R}^d} \exp(\omega|\nabla V(x) - x|^2) d\mu \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r \frac{x^2}{2} - rV(x)\right] \mu(dx) + \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r \frac{x^2}{2} - rV^*(x)\right] g(x) \mu(dx). \end{aligned}$$

Выражение в правой части конечно, согласно неравенству Гёльдера,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[r \frac{x^2}{2} - rV^*(x)\right] g(x) \mu(dx) \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} \exp\left[rq \frac{x^2}{2} - rqV^*(x)\right] \mu(dx)\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbf{R}^d} g^p d\mu\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

где $1/p + 1/q = 1$ и $rq \leq 1/C$. Согласно (3.4), имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp \left[r \frac{x^2}{2} - rV^*(x) \right] g(x) \mu(dx) \leq \|g\|_{L^p(\mu)}.$$

Применив (3.1), находим

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp \left[r \frac{x^2}{2} - rV(x) \right] \mu(dx) \leq \int_{\mathbf{R}^d} \exp[Cr^2|x - \nabla V(x)|^2] \mu(dx).$$

Выбрав $r^2 = \omega/C$ (что дает $r < C^{-1}$, поскольку $\omega C < 1$), получаем желаемый результат.

Отметим, что требование $\omega < (16C)^{-1}$ ограничительнее условий в п. 2.

Теорема 3.2. Для каждого $\beta > 0$ найдутся такие числа $A = A(\beta, C)$ и $B = B(\beta, C)$, зависящие только от β и C , что если μ удовлетворяет (1.1) и $T(x) = x + \nabla \Phi(x)$ есть оптимальный перенос между μ и $g \cdot \mu$, то

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla \Phi|^{2(1+\beta)} d\mu \leq A + B \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\ln g|^{1+\beta} g d\mu \right)^2.$$

Доказательство. Заметим, что функция $|T(x)|^{2+2\beta}$ является μ -интегрируемой в силу формулы замены переменных и μ -интегрируемости функции $|x|^{2+2\beta}g(x)$, которая вытекает из оценки

$$|x|^{2+2\beta}g(x) \leq |x|^{2+2\beta} \exp(\varepsilon x^2) + |\varepsilon^{-1} \ln g|^{1+\beta} g,$$

где $0 < \varepsilon < (2C)^{-1}$. Таким же образом, как и в теореме 3.1, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2C} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(1+\beta)} \mu(dx) \\ &= \frac{1}{C} \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V(x) - V^*(\nabla V(x)) + \frac{|\nabla V(x)|^2}{2} \right] |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \mu(dx) \\ &= \frac{1}{C} \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V(x) \right] |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \mu(dx) \\ & \quad + \frac{1}{C} \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V^*(x) \right] |\nabla V^*(x) - x|^{2\beta} g(x) \mu(dx). \end{aligned}$$

Считая, что $\int_{\mathbf{R}^d} (V(x) - x^2/2) \mu(dx) = 0$ и используя неравенство $xy \leq e^y + x \ln x - x$ и оценку

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp \left[\frac{1}{C} \left(\frac{x^2}{2} - V^* \right) \right] \mu(dx) \leq \exp \left[\frac{1}{C} \int_{\mathbf{R}^d} \left(V(x) - \frac{x^2}{2} \right) \mu(dx) \right],$$

находим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{C} \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V^*(x) \right] |\nabla V^*(x) - x|^{2\beta} g(x) \mu(dx) \\
& \leq \int_{\mathbf{R}^d} \exp \left[\frac{1}{C} \left(\frac{x^2}{2} - V^*(x) \right) \right] \mu(dx) \\
& \quad + \int_{\mathbf{R}^d} g(x) |\nabla V^*(x) - x|^{2\beta} \ln(g(x) |\nabla V^*(x) - x|^{2\beta}) \mu(dx) \\
& \quad - \int_{\mathbf{R}^d} g(x) |\nabla V^*(x) - x|^{2\beta} \mu(dx) \\
& \leq 1 + \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \ln(g(\nabla V(x)) |\nabla V(x) - x|^{2\beta}) \mu(dx) \\
& \quad - \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \mu(dx) \\
& \leq 1 + \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \ln |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \mu(dx) \\
& \quad + \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx) \right)^{\beta/(1+\beta)} \\
& \quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\ln g(\nabla V(x))|^{\beta+1} \mu(dx) \right)^{1/(1+\beta)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\beta} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \ln |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \mu(dx) \\
& \leq \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta+1} \mu(dx) \\
& \leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx) \right)^{(\beta+1/2)/(1+\beta)}.
\end{aligned}$$

Кроме того, согласно неравенству Гёльдера и (1.3), имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V(x) \right] |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \mu(dx) \\
& \leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(1+\beta)} \mu(dx) \right)^{\beta/(1+\beta)} \\
& \quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left| \frac{x^2}{2} - V(x) \right|^{1+\beta} \mu(dx) \right)^{1/(1+\beta)} \\
& \leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(1+\beta)} \mu(dx) \right)^{\beta/(1+\beta)} \\
& \quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left| \frac{x^2}{2} - V(x) \right|^{2(1+\beta)} \mu(dx) \right)^{1/(2(1+\beta))} \\
& \leq K(\beta, C) \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(1+\beta)} \mu(dx) \right)^{(\beta+1/2)/(1+\beta)}.
\end{aligned}$$

Положив

$$t = \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(1+\beta)} \mu(dx),$$

получаем

$$\frac{t}{2C} \leq 1 + t^{\beta/(1+\beta)} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\ln g|^{1+\beta} g d\mu \right)^{1/(1+\beta)} + (2\beta + K(\beta, C)) t^{(\beta+1/2)/(1+\beta)}.$$

Это соотношение влечет наше утверждение.

4. Случай мер, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре.

В общем случае функция $|\nabla \Phi|^2$ не является экспоненциально интегрируемой для мер, удовлетворяющих классическому неравенству Пуанкаре. Действительно, рассмотрим следующие меры на вещественной прямой: $\mu = \frac{1}{2} e^{-|x|} dx$ и $\nu = e^{-2|x|} dx$. В этом случае $T(x) = 2x$ и $T(x) - x = x$. Ясно, что $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^p(\mu)$ для каждого $p > 0$, но функция $\exp(\omega|T(x) - x|^2)$ не является μ -интегрируемой, если $\omega > 0$. Однако известно (см., например, [15], [31]), что если μ удовлетворяет классическому неравенству Пуанкаре, то $K(\mu, g \cdot \mu, h)$ с $h(x, y) = |x - y|^2$ можно оценить через $\|g\|_{L^2(\mu)}^2$. Здесь мы доказываем L^p -оценки для оптимальных переносов в случае мер, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре (1.2). Идея доказательства видна из следующего простого рассуждения в случае $p = 2$. Сохраняя обозначения из предыдущего пункта и выбирая V так, что

$$\int_{\mathbf{R}^d} \left(V(x) - \frac{x^2}{2} \right) \mu(dx) = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2 \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V(x) - V^*(\nabla V(x)) + \frac{|\nabla V(x)|^2}{2} \right] \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \left[\frac{x^2}{2} - V^*(x) \right] g(x) \mu(dx) \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} \left[V(x) - \frac{x^2}{2} \right] g(x) \mu(dx) = \int_{\mathbf{R}^d} \left[V(x) - \frac{x^2}{2} \right] (g(x) - 1) \mu(dx) \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} (g - 1)^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left[V(x) - \frac{x^2}{2} \right]^2 \mu(dx) \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbf{R}^d} (g^2 - 1) d\mu \right)^{1/2} \left(C_2 \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2 \mu(dx) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^2 \mu(dx) \leq 4C_2 \int_{\mathbf{R}^d} (g^2 - 1) d\mu.$$

Теорема 4.1. Пусть μ удовлетворяет (1.2). Тогда для каждого $\beta > 0$ имеем

$$\frac{1}{2} \left[\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx) \right]^{1/(2(\beta+1))} \leq C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))} \left(\int_{\mathbf{R}^d} g^2 d\mu \right)^{1/(2(1+\beta))} + C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что функция $|T(x)|$ входит во все $L^p(\mu)$. Это легко усмотреть из формулы замены переменных и μ -интегрируемости функции $|x|^p g(x)$, которая вытекает из неравенства Коши и μ -интегрируемости функции $|x|^{2p}$, даваемой неравенством Пуанкаре. Таким же образом, как и выше, оцениваем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \left[\frac{x^2}{2} - V(x) - V^*(\nabla V(x)) + \frac{|\nabla V(x)|^2}{2} \right] \mu(dx). \end{aligned}$$

Используя неравенство Гёльдера, оценку

$$V(x) + V^*(x) \geq x^2$$

и формулу замены переменных, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \left[\frac{|\nabla V(x)|^2}{2} - V^*(\nabla V(x)) \right] \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V^*(x) - x|^{2\beta} \left[\frac{x^2}{2} - V^*(x) \right] g(x) \mu(dx) \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V^*(x) - x|^{2\beta} \left[V(x) - \frac{x^2}{2} \right] g(x) \mu(dx) \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V^*(x) - x|^{2(\beta+1)} g(x) \mu(dx) \right)^{\beta/(1+\beta)} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left| V(x) - \frac{x^2}{2} \right|^{1+\beta} g(x) \mu(dx) \right)^{1/(1+\beta)} \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx) \right)^{\beta/(1+\beta)} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left| V(x) - \frac{x^2}{2} \right|^{2(1+\beta)} \mu(dx) \right)^{1/(2(1+\beta))} \left(\int_{\mathbf{R}^d} g^2 d\mu \right)^{1/(2(1+\beta))} \\ &\leq C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx) \right)^{(\beta+1/2)/(1+\beta)} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} g^2 d\mu \right)^{1/(2(1+\beta))} \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2\beta} \left[\frac{x^2}{2} - V(x) \right] \mu(dx) \\
 & \leq \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx) \right)^{\beta/(1+\beta)} \\
 & \quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left| V(x) - \frac{x^2}{2} \right|^{1+\beta} \mu(dx) \right)^{1/(1+\beta)} \\
 & \leq C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx) \right)^{\beta/(1+\beta)} \\
 & \quad \times \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(1+\beta)} \mu(dx) \right)^{1/(2(1+\beta))} \\
 & \leq C_{2(1+\beta)}^{1/(2(1+\beta))} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla V(x) - x|^{2(\beta+1)} \mu(dx) \right)^{(\beta+1/2)/(1+\beta)}.
 \end{aligned}$$

Наше утверждение вытекает из этих оценок.

Ряд оценок для оптимальных переносов в случае мер, удовлетворяющих логарифмическому неравенству Соболева или неравенству Пуанкаре, можно найти в [31] и [32].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agueh M., Ghoussoub N., Kang X. Geometric inequalities via a general comparison principle for interacting gases. — *Geom. Funct. Anal.*, 2004, v. 14, № 1, p. 215–244.
2. Bobkov S. G., Gentil I., Ledoux M. Hypercontractivity of Hamilton–Jacobi equations. — *J. Math. Pures Appl.*, 2001, v. 80, № 7, p. 669–696.
3. Bobkov S. G., Götze F. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. — *J. Funct. Anal.*, 1999, v. 163, № 1, p. 1–28.
4. Богачев В. И., Колесников А. В. Нелинейные преобразования выпуклых мер и энтропия плотностей Радона–Никодима. — *Докл. РАН*, 2004, т. 397, № 2, с. 155–159.
5. Богачев В. И., Колесников А. В. Нелинейные преобразования выпуклых мер. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, т. 50, в. 1, с. 27–51.
6. Bogachev V. I., Kolesnikov A. V. On the Monge–Ampère equation in infinite dimensions. — *BiBoS Preprint № 05-01-175*. Bielefeld: Universität Bielefeld, 2005.
7. Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В. О треугольных преобразованиях мер. — *Докл. РАН*, 2004, т. 396, № 6, с. 727–732.
8. Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В. Треугольные преобразования мер. — *Матем. сб.*, 2005, т. 196, № 3, с. 3–30.
9. Brenier Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector valued functions. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1991, v. 44, № 4, p. 375–417.
10. Cordero-Erausquin D. Non-smooth differential properties of optimal transport. — *Contemp. Math.*, 2004, v. 353, p. 61–71.
11. Cordero-Erausquin D., Nazaret B., Villani C. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo–Nirenberg inequalities. — *Adv. Math.*, 2004, v. 182, № 2, p. 307–332.
12. Feyel D., Üstünel A. S. Monge–Kantorovitch measure transportation and Monge–Ampère equation on Wiener space. — *Probab. Theory Related Fields*, 2004, v. 128, № 3, p. 347–385.

13. *Gangbo W., McCann R. J.* The geometry of optimal transportation. — *Acta Math.*, 1996, v. 177, № 2, p. 113–161.
14. *Колесников А. В.* Неравенства выпуклости и нелинейные преобразования мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, № 3, с. 300–304.
15. *Kolesnikov A. V.* Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures. — *J. Math. Pures Appl.* (9), 2004, v. 83, № 11, p. 1373–1404.
16. *McCann R. J.* Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps. — *Duke Math. J.*, 1995, v. 80, № 2, p. 309–323.
17. *Otto F., Villani C.* Generalization of an inequality by Talagrand, and links with the logarithmic Sobolev inequality. — *J. Funct. Anal.*, 2000, v. 173, № 2, p. 361–400.
18. *Rachev S. T., Rüschendorf L.* Mass Transportation Problems. V. I, II. New York: Springer-Verlag, 1998, 508 p., 430 p.
19. *Talagrand M.* Transportation cost for Gaussian and other product measures. — *Geom. Funct. Anal.*, 1996, v. 6, № 3, p. 587–600.
20. *Villani C.* Topics in Optimal Transportation. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2003, 370 p.
21. *Fernique X.* Extension du théorème de Cameron–Martin aux translations aléatoires. II. Intégrabilité des densités. — *High Dimensional Probability, III* (Sandjberg, 2002). Basel: Birkhäuser, 2003, p. 95–102. (*Progr. Probab.*, v. 55.)
22. *Ledoux M.* The Concentration of Measure Phenomenon. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2001, 181 p.
23. *Wang F. Y.* Logarithmic Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds. — *Probab. Theory Related Fields*, 1997, v. 109, № 3, p. 417–424.
24. *Bobkov S. G.* Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures. — *Ann. Probab.*, 1999, v. 27, № 4, p. 1903–1921.
25. *Hajlasz P.* Change of variables formula under minimal assumptions. — *Colloq. Math.*, 1993, v. 64, № 1, p. 93–101.
26. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 1, 2. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
27. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
28. *Рокафеллар Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
29. *Богачев В. И., Колесников А. В.* Открытые отображения вероятностных мер и теорема представления Скорохода. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2001, т. 46, в. 1, с. 3–27.
30. *Pisier G.* Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. — *Lecture Notes in Math.*, 1986, v. 1206, p. 167–241.
31. *Wang F. Y.* Probability distance inequalities on Riemannian manifolds and path spaces. — *J. Funct. Anal.*, 2004, v. 206, № 1, p. 167–190.
32. *Blower G.* The Gaussian isoperimetric inequality and transportation. — *Positivity*, 2003, v. 7, № 3, p. 203–224.

Поступила в редакцию
30.V.2005