Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Абдушукуров, О непараметрическом оценивании показателей надежности по цензурированным выборкам, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 141–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:12:48

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1998 г.

АБДУШУКУРОВ А. А.*

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ
ПО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ ВЫБОРКАМ

Предлагаются непараметрические оценки для экспоненциальных кумулятивных функций интенсивностей на основе обобщенной модели случайного цензурирования справа. Для подходящим образом нормированных оценок доказаны результаты об их сильной аппроксимации последовательностью квадратично интегрируемых ортогональных мартингалов, а также о слабой сходимости к предельному гауссовскому процессу.

Ключевые слова и фразы: кумулятивная функция интенсивностей, цензурированные данные, квадратично интегрируемый мартингал, гауссовский процесс.

1. Рассматривается проблема совместного непараметрического статистического оценивания характеристик показателей надежности — экспоненциальных кумулятивных функций интенсивностей в обобщенной модели случайного цензурирования справа, которую определим следующим образом.

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ рассмотрим случайную совокупность $\{X, A^{(1)}, \dots, A^{(k)}\}$, где X — случайная величина с функцией распределения $F(x) = P\{X \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$, события $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$ для фиксированного натурального числа k таковы, что

$$P\left(\bigcup_{i \in J} A^{(i)}\right) = 1, \quad P\left(A^{(i)} \cap A^{(j)}, i \neq j\right) = 0, \quad i, j \in J = \{1, \dots, k\}.$$

Интерес представляют не только наблюдения над случайной величиной X , но и над парами $(X, A^{(i)})$, $i \in J$. Предположим, что случайная совокупность $\{X, A^{(1)}, \dots, A^{(k)}\}$ цензурируется справа и наблюдаем $\{X \wedge Y, B^{(0)}, B^{(1)}, \dots, B^{(k)}\}$, где Y — заданная на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ случайная величина с функцией распределения $G(x) = P\{Y \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $X \wedge Y = \min(X, Y)$, X и Y — независимы, $B^{(0)} = \{\omega: X(\omega) > Y(\omega)\}$, $B^{(i)} = A^{(i)} \cap \{\omega: X(\omega) \leq Y(\omega)\}$, $i \in J$. Здесь случайная величина Y , событие $B^{(0)}$ и функция распределения G являются цензурирующими и, следовательно, считаются мешающими. Легко видеть, что

$$P\left(\bigcup_{i \in \bar{J}} B^{(i)}\right) = 1, \quad P\left(B^{(i)} \cap B^{(j)}, i \neq j\right) = 0, \quad i, j \in \bar{J} = J \cup \{0\}.$$

*Ташкентский государственный университет, механико-математический факультет, 700095 Ташкент, Узбекистан.

Введем субраспределения $S^{(i)}(x) = P\{X \leq x, A^{(i)}\}$, $i \in J$, и $C^{(j)}(x) = P\{X \wedge Y \leq x, B^{(j)}\}$, $j \in \bar{J}$, $x \in \mathbb{R}$, для которых справедливы равенства: для $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} S^{(i)}(x) &= F(x), \quad C^{(0)}(x) = \int_{-\infty}^x (1 - F(u)) dG(u), \\ C^{(i)}(x) &= \int_{-\infty}^x (1 - G(u-)) dS^{(i)}(u), \quad i \in J, \\ \sum_{j \in \bar{J}} C^{(j)}(x) &= H(x) = P\{X \wedge Y \leq x\} = 1 - (1 - F(x-)) (1 - G(x-)). \end{aligned}$$

Пусть $\{X_m, Y_m, A_m^{(1)}, \dots, A_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность независимых реализаций совокупности $\{X, Y, A^{(1)}, \dots, A^{(k)}\}$. Наблюдению доступна следующая выборка объема n :

$$\mathcal{Q}^{(n)} = \{(Z_m, \delta_m^{(0)}, \delta_m^{(1)}, \dots, \delta_m^{(k)}), 1 \leq m \leq n\},$$

где $Z_m = X_m \wedge Y_m = \delta_m^{(0)} Y_m + (1 - \delta_m^{(0)}) X_m$,

$$\delta_m^{(0)} = I(X_m > Y_m), \quad \delta_m^{(i)} = I(A_m^{(i)} \cap \{X_m \leq Y_m\}),$$

$i \in J$ и $I(\cdot)$ означает индикатор указанного в скобках события. Заметим, что $1 - \delta_m^{(0)} = \delta_m^{(1)} + \dots + \delta_m^{(k)}$. Далее, предположим, что распределения F, G и $S^{(i)}$, $i \in J$, являются непрерывными. Задача состоит в совместном оценивании экспоненциальных кумулятивных функций интенсивностей $(F^{(i)}, i \in J)$ по выборке $\mathcal{Q}^{(n)}$, где

$$F^{(i)}(x) = 1 - \exp(-\Lambda^{(i)}(x))$$

и

$$\Lambda^{(i)}(x) = \int_{-\infty}^x (1 - F(u))^{-1} dS^{(i)}(u) \quad (1)$$

— соответствующая кумулятивная функция интенсивности. Наряду с (1) справедливо также и представление

$$\Lambda^{(i)}(x) = \int_{-\infty}^x (1 - H(u))^{-1} dC^{(i)}(u), \quad i \in J. \quad (1')$$

При этом $\sum_{i \in J} \Lambda^{(i)}(x) = -\ln(1 - F(x))$ — кумулятивная функция интенсивности, соответствующая F .

З а м е ч а н и е 1. Напомним, что статистическая модель, где наблюдению доступна совокупность $\{X, A^{(1)}, \dots, A^{(k)}\}$, что соответствует случаю $P\{Y = +\infty\} = 1$, была рассмотрена в [1]. При этом для функций $(F^{(i)}, i \in J)$ были использованы оценка типа Каплана-Мейера [2], а также типа экспоненциальной функции интенсивности, и для оценок были доказаны результаты сильной аппроксимации последовательностью гауссовских процессов. В рассматриваемой нами модели предлагается оценка другого типа, отличная от рассматриваемой в [1], и доказывается результат сильной аппроксимации суммой квадратично интегрируемых мартингалов.

2. Предлагаемая нами оценка $F^{(i)}$ будет построена при справедливости следующих условий:

(У1) Пусть $(F^{(i)}, i \in J) \in \mathcal{X}$, где класс

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{(F^{(1)}, \dots, F^{(k)}): 0 < C^{(i)}(\infty) < 1, i \in J, \\ &\quad \bigcap_{i \in J} \{x: 0 < F^{(i)}(x) < 1\} \cap \{x: 0 < G(x) < 1\} \neq \emptyset\}; \end{aligned}$$

(У2) Существуют такие числа α, β и γ , что

$$\alpha > \tau_H = \sup \{x: H(x) = 0\}, \quad \beta < T_H = \inf \{x: H(x) = 1\},$$

$$[\alpha, \beta] \neq \emptyset, \quad 0 < \gamma < 1, \quad H(\alpha) \wedge (1 - H(\beta)) \geq \gamma;$$

(У3) С вероятностью 1 справедливы неравенства $0 < \sum_{m=1}^n \delta_m^{(i)} < n, i \in J$.

Ввиду непрерывности $H, C^{(i)}, i \in J$, и в силу условия (У1), функции отношения интенсивностей $R^{(i)}(x) = \Lambda^{(i)}(x)/\Lambda(x), i \in J$, где $\Lambda(x) = -\ln(1 - H(x))$, являются непрерывными, $0 < R^{(i)}(x) < 1, i \in J$, и для $F^{(i)}$ справедливо представление

$$1 - F^{(i)}(x) = (1 - H(x))^{R^{(i)}(x)}, \quad i \in J, x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Для H, Λ и $\Lambda^{(i)}, i \in J$, введем соответственно оценки

$$H_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n I(Z_m \leq x),$$

$$\Lambda_n(x) = \int_{-\infty}^x (1 - H_n(u-))^{-1} dH_n(u),$$

$$\Lambda_n^{(i)}(x) = \int_{-\infty}^x (1 - H_n(u-))^{-1} dC_n^{(i)}(u),$$

где $C_n^{(i)}(x) = n^{-1} \sum_{m=1}^n \delta_m^{(i)} I(Z_m \leq x)$ — эмпирическая оценка для $C^{(i)}$. Далее для функций Λ и $\Lambda^{(i)}$ будут использованы также и вспомогательные оценки $\tilde{\Lambda}_n$ и $\tilde{\Lambda}_n^{(i)}$, получаемые из Λ_n и $\Lambda_n^{(i)}$ заменой в них $1 - H_n(u-)$ на $1 - H_n(u)$. Предлагаемая оценка для $F^{(i)}$ определяется как

$$F_n^{(i)}(x) = 1 - (1 - H_n(x))^{R_n^{(i)}(x)}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < Z_{(1)}, \\ 1 - \left(\frac{n-m}{n}\right)^{R_n^{(i)}(x)}, & Z_{(m)} \leq x < Z_{(m+1)}, 1 \leq m \leq n-1, \\ 1, & x \geq Z_{(n)}, \end{cases}$$

где $Z_{(1)} \leq \dots \leq Z_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $Z_1, \dots, Z_n$, и $R_n^{(i)}(x) = \Lambda_n^{(i)}(x)/\Lambda_n(x), i \in J$. Ввиду условия (У3) $0 < R_n^{(i)}(x) < 1$ для всех $x \in (Z_{(1)}, Z_{(n)})$ и $i \in J$.

Теперь переходим к исследованию асимптотических свойств оценок $(F_n^{(i)}, i \in J)$. В дальнейшем нами будут использованы обозначения: $\xrightarrow{p}$ — сходимость по вероятности, $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ — сходимость по распределению в пространстве Скорохода $\mathcal{D}^{(k)}[\alpha, \beta]$ k -мерных càdlàg (т.е. непрерывных справа и имеющих пределы слева) функций на $[\alpha, \beta]$, запись $a_n \stackrel{n.p.}{\approx} b_n$ означает, что почти наверное $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n | b_n) \leq \text{Const}$, $\|a\|_k = \max(|a_i|, i \in J)$ — максимум-норма вектора $a = (a_1, \dots, a_k)$ и $[\alpha, \beta]^k = \{v = (v_1, \dots, v_k): \alpha \leq v_i \leq \beta, i \in J\}$ — куб размера k .

Для оценок $(F_n^{(i)}, i \in J)$ справедливо следующее утверждение об их сильной аппроксимации последовательностью квадратично интегрируемых ортогональных мартингалов и о слабой сходимости к предельному гауссовскому процессу.

Теорема. Пусть выполнены условия (У1)–(У3). Тогда

(А) для всех $i \in J$

$$\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} \left| \frac{F_n^{(i)}(x) - F^{(i)}(x)}{1 - F^{(i)}(x)} - \int_{-\infty}^x \frac{I(N_n(u) > 0) dm_n^{(i)}(u)}{N_n(u)} \right| \stackrel{\text{п.н.}}{=} O(n^{-1} \ln n), \quad (3)$$

где

$$N_n(u) = \sum_{m=1}^n I(Z_m \geq u), \quad m_n^{(i)}(u) = \sum_{m=1}^n \mu_m^{(i)}(u),$$

$$\mu_m^{(i)}(u) = I(Z_m \leq u, B^{(i)}) - \int_{-\infty}^u I(Z_m \geq v) d\Lambda^{(i)}(v);$$

(В) при $n \rightarrow \infty$

$$\left(n^{1/2} (F_n^{(i)} - F^{(i)}), i \in J \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}), \quad (4)$$

где $\omega^{(i)}, i \in J$, — независимые гауссовские процессы с нулевыми средними и ковариационной структурой при $\alpha \leq x, y \leq \beta$ и $i \in J$

$$E \omega^{(i)}(x) \omega^{(i)}(y) = (1 - F^{(i)}(x)) (1 - F^{(i)}(y)) d^{(i)}(x \wedge y),$$

где

$$d^{(i)}(x) = \int_{-\infty}^x (1 - H(u))^{-2} dC^{(i)}(u) = \int_{-\infty}^x (1 - H(u))^{-1} d\Lambda^{(i)}(u). \quad (5)$$

3. Доказательство теоремы. Согласно разложению Тейлора, для всех $i \in J$ имеем

$$F_n^{(i)}(x) - F^{(i)}(x) = (1 - F^{(i)}(x)) M_n^{(i)}(x) + L_n^{(i)}(x), \quad (6)$$

где

$$M_n^{(i)}(x) = - \left(R_n^{(i)}(x) \ln(1 - H_n(x)) - R^{(i)}(x) \ln(1 - H(x)) \right),$$

$L_n^{(i)}(x) = \exp(-\theta_n^{(i)}(x)) (M_n^{(i)}(x))^2 / 2$ и $\theta_n^{(i)}(x)$ находится между $-\ln(1 - F_n^{(i)}(x))$ и $-\ln(1 - F^{(i)}(x))$. Легко видеть также, что для $M_n^{(i)}$ справедливо представление

$$M_n^{(i)}(x) = \Lambda_n^{(i)}(x) - \Lambda^{(i)}(x) + \sum_{l=1}^4 L_{ln}^{(i)}(x), \quad (7)$$

где

$$L_{1n}^{(i)}(x) = R^{(i)}(x) \left(-(\Lambda_n(x) - \Lambda(x)) + \left(-\ln(1 - H_n(x)) + \ln(1 - H(x)) \right) \right),$$

$$L_{2n}^{(i)}(x) = -\frac{1}{\Lambda_n(x)} (\Lambda_n^{(i)}(x) - \Lambda^{(i)}(x)) (\Lambda_n(x) - \Lambda(x)),$$

$$L_{3n}^{(i)}(x) = \frac{R^{(i)}(x)}{\Lambda_n(x)} (\Lambda_n(x) - \Lambda(x))^2,$$

$$L_{4n}^{(i)}(x) = (R_n^{(i)}(x) - R^{(i)}(x)) \left(-\ln(1 - H_n(x)) + \ln(1 - H(x)) \right).$$

(А) Так как для всех $i \in J$

$$\Lambda_n^{(i)}(x) - \Lambda^{(i)}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{I(N_n(u) > 0)}{N_n(u)} dm_n^{(i)}(u), \quad (8)$$

то сначала докажем, что

$$\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |L_{ln}^{(i)}(x)| \stackrel{\text{п.н.}}{=} O(n^{-1} \ln n), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (9)$$

Интегрируя по частям $\tilde{\Lambda}_n - \Lambda$ и разлагая в ряд Тейлора до члена второго порядка оценку $-\ln(1 - H_n)$, будем иметь

$$\begin{aligned} L_{ln}^{(i)}(x) &= R^{(i)}(x) \left\{ -(\tilde{\Lambda}_n(x) - \Lambda(x)) - \int_{-\infty}^x \frac{(H_n(u) - H_n(u-)) dC_n^{(i)}(u)}{(1 - H_n(u))(1 - H_n(u-))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{H_n(x) - H(x)}{1 - H(x)} + \frac{1}{2} \frac{(H_n(x) - H(x))^2}{(\theta_n^*(x))^2} \right\} \\ &= R^{(i)}(x) \left\{ - \int_{-\infty}^x \frac{(H_n(u) - H(u))^2 dH(u)}{(1 - H_n(u))(1 - H(u))^2} \right. \\ &\quad - \int_{-\infty}^x \frac{(H_n(u) - H(u)) d(H_n(u) - H(u))}{(1 - H_n(u))(1 - H(u))} \\ &\quad - \int_{-\infty}^x \frac{(H_n(u) - H_n(u-)) d(H_n(u) - H(u))}{(1 - H_n(u))(1 - H_n(u-))} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{(H_n(x) - H(x))^2}{(\theta_n^*(x))^2} \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где $\theta_n^*(x)$ находится между $-\ln(1 - H_n(x))$ и $-\ln(1 - H(x))$. Ввиду экспоненциального неравенства из [3], для всех $z > 0$ и $n \geq 1$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |H_n(x) - H(x)| > \left(\frac{z \ln n}{2n} \right)^{1/2} \right\} \leq Dn^{-z}, \quad (11)$$

где D — положительная абсолютная постоянная. Для некоторого $z = z^* > 0$ существует такое число n_0 , что при $n \geq n_0$

$$\gamma \geq \left(\frac{2z^* \ln n}{n} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Тогда из (11), (12) и леммы 4.1 из [1] при $n \geq n_0$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{x \leq \beta} (1 - H_n(x-))^{-1} > 2\gamma^{-1} \right\} &\leq Dn^{-z^*}, \\ \mathbf{P} \left\{ \sup_{x \leq \beta} (1 - H_n(x))^{-1} > 2\gamma^{-1} \right\} &\leq Dn^{-z^*}. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, справедливо неравенство

$$\sup_{-\infty < x < \infty} (H_n(x) - H_n(x-)) \leq \frac{1}{n} \quad \text{п.н.}, \quad (14)$$

а также, ввиду неравенства (12) и леммы из [4],

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{x \leq \beta} \left| \int_{-\infty}^x \frac{(H_n(u) - H(u)) d(H_n(u) - H(u))}{(1 - H_n(u))(1 - H(u))} \right| > A_0 \gamma^{-2} n^{-1} \ln n \right\} \leq B_0 n^{-z^*}, \quad (15)$$

где A_0 и B_0 — некоторые положительные постоянные, при этом $A_0 = A_0(z^*)$ и B_0 — абсолютная постоянная.

Теперь из соотношений (10)–(15) при $z^* > 1$, согласно лемме Бореля–Кантелли, следует (9) для $l = 1$. Соотношения (9) для случаев $l = 2, 3, 4$ устанавливаются аналогичным способом. При этом наряду с оценками (11)–(14) используются и следующие соотношения при $\alpha \leq x \leq \beta$ и $i \in J$:

$$\begin{aligned}\Lambda_n^{(i)}(x) - \tilde{\Lambda}_n^{(i)}(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{(H_n(u) - H_n(u-)) dC_n^{(i)}(u)}{(1 - H_n(u))(1 - H_n(u-))}, \\ |R_n^{(i)}(x) - R^{(i)}(x)| &\leq \frac{1}{\Lambda_n(x)} \left(|\Lambda_n(x) - \Lambda(x)| + |\Lambda_n^{(i)}(x) - \Lambda^{(i)}(x)| \right), \\ \Lambda_n(x) &\geq H_n(x),\end{aligned}$$

$$P \left\{ \sup_{\alpha \leq x} (H_n(x))^{-1} > 2\gamma^{-1} \right\} \leq Dn^{-z^*},$$

$$P \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |C_n^{(i)}(x) - C^{(i)}(x)| > 2 \left(\frac{z^* \ln n}{2n} \right)^{1/2} \right\} \leq 2Dn^{-z^*},$$

$$P \left\{ \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} \left| \int_{-\infty}^x \frac{(H_n(u) - H(u)) d(C_n^{(i)}(u) - C^{(i)}(u))}{(1 - H_n(u))(1 - H(u))} \right| > A_i \gamma^{-2} n^{-1} \ln n \right\} \leq B_i n^{-z^*},$$

где последние три оценки являются аналогами (13), (11) и (15) соответственно, при этом $A_i = A_i(z^*)$ и B_i — абсолютная постоянная. Детали доказательств (9) при $l = 2, 3, 4$ опускаются.

Теперь для доказательства (3), согласно (6), остается установить, что для всех $i \in J$

$$\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} \left| (1 - F^{(i)}(x))^{-1} L_n^{(i)}(x) \right| \stackrel{\text{п.н.}}{=} O(n^{-1} \ln n). \quad (16)$$

Легко видеть, что, согласно (7) и (9), для всех $i \in J$

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} \left| (1 - F^{(i)}(x))^{-1} L_n^{(i)}(x) \right| &\leq \gamma^{-1} \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |M_n^{(i)}(x)|^2 \\ &\leq \gamma^{-1} \left(\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |\Lambda_n^{(i)}(x) - \Lambda^{(i)}(x)| + O(n^{-1} \ln n) \right)^2 \quad \text{п.н.}\end{aligned} \quad (17)$$

Однако, легко заметить, что при доказательстве (9) для $l = 2$ нами была использована оценка

$$\sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |\Lambda_n^{(i)}(x) - \Lambda^{(i)}(x)| \stackrel{\text{п.н.}}{=} O((n^{-1} \ln n)^{1/2}). \quad (18)$$

Из соотношений (17), (18) получаем (16). Теперь из (6)–(9) и (16) следует (3).

(В) Ввиду (3) и (8) сходимость (4) следует из

$$(n^{1/2}(\Lambda_n^{(i)} - \Lambda^{(i)}), i \in J) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\omega_0^{(1)}, \dots, \omega_0^{(k)}), \quad (19)$$

где $\omega_0^{(i)}(x) = (1 - F^{(i)}(x))^{-1} \omega^{(i)}(x)$, $i \in J$, $\alpha \leq x \leq \beta$. Пусть $n_m^{(i)}(x) = I(Z_m \leq x, B^{(i)})$, $i \in J$, $1 \leq m \leq n$, $\alpha \leq x \leq \beta$. Определим пополненные потоки σ -алгебр, порожденные считающими процессами $n_m^{(i)}(x)$:

$$\mathcal{F}_x^{i,m} = \mathcal{N} \cup \sigma(n_m^{(i)}(u), u \leq x),$$

$$\mathcal{F}_x^i = \mathcal{N} \cup \sigma(n_m^{(i)}(u), 1 \leq m \leq n, u \leq x),$$

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{N} \cup \sigma(n_m^{(i)}(u), i \in J, 1 \leq m \leq n, u \leq x),$$

где $\mathcal{N}$ — совокупность всех событий из $\mathcal{A}$, имеющих P -вероятность нуль. Пусть $\mathcal{M}_{\text{loc}}^2(\mathcal{F})$ — класс локально квадратично интегрируемых мартингалов относительно потока σ -алгебр $\mathcal{F}$. Образует вектор $m_n(u) = (m_n^{(1)}(u), \dots, m_n^{(k)}(u))$, где

$$m_n^{(i)}(u) = \sum_{m=1}^n \mu_m^{(i)}(u) = nC_n^{(i)}(u) - \int_{-\infty}^u N_n(v) d\Lambda^{(i)}(v), \quad i \in J.$$

Сначала установим свойства мартингальности вектора $m_n(u)$. Повторяя доказательство леммы 4.1 из [5], с учетом особенностей рассматриваемой нами модели и считающих процессов $n_m^{(i)}(u)$, нетрудно показать, что $\mu_m^{(i)}(u) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2(\mathcal{F}_x^{i,m})$ и квадратические характеристики этого мартингала определяются равенствами

$$\langle \mu_m^{(i)}, \mu_m^{(j)} \rangle(u) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ -\ln(1 - F^{(i)}(u \wedge Z_m)), & i = j, \quad i, j \in J. \end{cases} \quad (20)$$

Теперь, учитывая и независимость $\{Z_m, 1 \leq m \leq n\}$, получаем $\mu_m^{(i)}(u) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2(\mathcal{F}_x^i)$, и, следовательно, $m_n^{(i)}(u) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2(\mathcal{F}_x^i)$. Далее, так как при каждом x процесс $(nC_n^{(i)}(u), i \in J, u \leq x)$ является k -мерным $\mathcal{F}_x$ -адаптированным считающим процессом с компенсатором

$$A_n^{(i)}(u) = - \sum_{m=1}^n \ln(1 - F^{(i)}(u \wedge Z_m)), \quad i \in J, u \leq x,$$

то, согласно рассуждениям из [6, с. 33], получаем, что $m_n(u) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2(\mathcal{F}_x)$, и ввиду (20)

$$\langle \mu_n^{(i)}, \mu_n^{(j)} \rangle(u) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ A_n^{(i)}(u), & i = j, \quad i, j \in J. \end{cases} \quad (21)$$

Поскольку подынтегральное выражение в (8) является ограниченным предсказуемым случайным процессом (так как является непрерывным слева адаптированным процессом на $(-\infty, u]$), то $(n^{1/2}(\Lambda_n^{(i)} - \Lambda^{(i)}), i \in J) \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^2(\mathcal{F}_x)$ (см. [5, с. 703], [7, с. 10]). Тогда ввиду (21)

$$\langle \Lambda_n^{(i)} - \Lambda^{(i)}, \Lambda_n^{(j)} - \Lambda^{(j)} \rangle(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \int_{-\infty}^x \frac{I(N_n(u) > 0)}{N_n(u)} d\Lambda^{(i)}(u), & i = j, \quad i, j \in J, \end{cases} \quad (22)$$

и для доказательства (19), согласно теореме 2.4.1 в [7], достаточно показать, что при каждом $i \in J$ и $\alpha \leq x \leq \beta$, согласно (1') и (5),

$$\langle n^{1/2}(\Lambda_n^{(i)} - \Lambda^{(i)}) \rangle(x) = \int_{-\infty}^x \frac{I(H_n(u-) < 1)}{1 - H_n(u-)} d\Lambda^{(i)}(u) \xrightarrow{P} d^{(i)}(x)$$

и при каждом $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^x \frac{I(H_n(u-) < 1)}{1 - H_n(u-)} I\left(\frac{I(H_n(u-) < 1)}{n^{1/2}(1 - H_n(u-))} > \varepsilon\right) d\Lambda^{(i)}(u) \xrightarrow{P} 0.$$

Однако нетрудно видеть, что эти сходимости следуют из теоремы Гливленко–Кантелли для эмпирической функции распределения $H_n(x)$, и тем самым справедливость (4) установлена.

З а м е ч а н и е 2. Как в [1], [4], для оценок $(F_n^{(i)}, i \in J)$ также нетрудно доказать результат об их совместной сильной аппроксимации последовательностью

гауссовских процессов, являющихся копиями предельных гауссовских процессов. Поскольку доказательство получается повторением доказательств соответствующих теорем из [1], [4], а также ввиду аналогичности самого результата мы не будем его здесь приводить.

З а м е ч а н и е 3. Специальными случаями рассматриваемой нами модели являются:

1) модель конкурирующих рисков при случайном цензурировании справа; в этом случае $X_m = \min(X_m^{(i)}, i \in J)$ и $A_m^{(i)} = \{\omega: X_m(\omega) = X_m^{(i)}(\omega)\}$, где при каждом m величины $X_m^{(1)}, \dots, X_m^{(k)}$ являются независимыми случайными величинами с функциями распределения $F^{(1)}, \dots, F^{(k)}$ соответственно; в данном случае X_m цензурируется справа случайной величиной Y_m ;

2) модель случайного цензурирования справа (получается при $k = 1, A^{(1)} = \Omega$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burke M. D., Csörgő S., Horváth L.* Strong approximation of some biometric estimates under random censorship. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1981, v. 56, p. 87–112.
2. *Kaplan E. L., Meier P.* Nonparametric estimation from incomplete observations. — *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1958, v. 53, p. 457–481.
3. *Dworetzky A., Kiefer J., Wolfowitz J.* Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the multinomial estimator. — *Ann. Math. Statist.*, 1956, v. 27, p. 642–669.
4. *Burke M. D., Csörgő S., Horváth L.* A correction to and improvement of «Strong approximation of some biometric estimates under random censorship». — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1988, v. 79, p. 51–57.
5. *Aalen O. O.* Nonparametric inference for a family of counting processes. — *Ann. Statist.*, 1978, v. 6, № 4, p. 701–726.
6. *Andersen P. K., Borgan Ø., Gill R. D., Keiding N.* Censoring, truncation and filtering in statistical models based on counting processes. Report MS-R 8803, 1988, 36 p.
7. *Gill R. D.* Censoring and Stochastic Integrals. Math. Centre Tracts 124, Math. Centrum Amsterdam, 1980, 178 p.

Поступила в редакцию
25.XII.1995

© 1998 г.

АРАТО Н. М.*

ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЕВИ¹⁾

Рассматривается гауссовское поле: константа плюс броуновское движение Леви. Определяется в явном виде оценка максимального правдоподобия среднего значения в случае наблюдения поля вне некоторого шара.

*Department of Probability Theory and Statistics, Eötvös Loránd University, Budapest, 1088 Múzeum krt. 6–8, Hungary.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Национального фонда научных исследований Венгрии, No. T16665, T14116.