Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Арато, Об оценке среднего значения броуновского движения Леви, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 148–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:22:50

гауссовских процессов, являющихся копиями предельных гауссовских процессов. Поскольку доказательство получается повторением доказательств соответствующих теорем из [1], [4], а также ввиду аналогичности самого результата мы не будем его здесь приводить.

З а м е ч а н и е 3. Специальными случаями рассматриваемой нами модели являются:

1) модель конкурирующих рисков при случайном цензурировании справа; в этом случае $X_m = \min(X_m^{(i)}, i \in J)$ и $A_m^{(i)} = \{\omega: X_m(\omega) = X_m^{(i)}(\omega)\}$, где при каждом m величины $X_m^{(1)}, \dots, X_m^{(k)}$ являются независимыми случайными величинами с функциями распределения $F^{(1)}, \dots, F^{(k)}$ соответственно; в данном случае X_m цензурируется справа случайной величиной Y_m ;

2) модель случайного цензурирования справа (получается при $k = 1, A^{(1)} = \Omega$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burke M. D., Csörgő S., Horváth L.* Strong approximation of some biometric estimates under random censorship. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1981, v. 56, p. 87–112.
2. *Kaplan E. L., Meier P.* Nonparametric estimation from incomplete observations. — *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1958, v. 53, p. 457–481.
3. *Dworetzky A., Kiefer J., Wolfowitz J.* Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the multinomial estimator. — *Ann. Math. Statist.*, 1956, v. 27, p. 642–669.
4. *Burke M. D., Csörgő S., Horváth L.* A correction to and improvement of «Strong approximation of some biometric estimates under random censorship». — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1988, v. 79, p. 51–57.
5. *Aalen O. O.* Nonparametric inference for a family of counting processes. — *Ann. Statist.*, 1978, v. 6, № 4, p. 701–726.
6. *Andersen P. K., Borgan Ø., Gill R. D., Keiding N.* Censoring, truncation and filtering in statistical models based on counting processes. Report MS-R 8803, 1988, 36 p.
7. *Gill R. D.* Censoring and Stochastic Integrals. Math. Centre Tracts 124, Math. Centrum Amsterdam, 1980, 178 p.

Поступила в редакцию
25.XII.1995

© 1998 г.

АРАТО Н. М.*

ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЕВИ¹⁾

Рассматривается гауссовское поле: константа плюс броуновское движение Леви. Определяется в явном виде оценка максимального правдоподобия среднего значения в случае наблюдения поля вне некоторого шара.

*Department of Probability Theory and Statistics, Eötvös Loránd University, Budapest, 1088 Múzeum krt. 6–8, Hungary.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Национального фонда научных исследований Венгрии, No. T16665, T14116.

Ключевые слова и фразы: оценка максимального правдоподобия, гауссовские случайные поля, обобщенная нормальная производная.

1. Введение. Гауссовское случайное поле

$$X = X(t), \quad t \in \mathbb{R}^3, \\ X(0) = 0, \quad \mathbb{E}X(t) = 0, \quad \mathbb{E}|X(t) - X(s)|^2 = |t - s|, \quad t, s \in \mathbb{R}^3,$$

($|\cdot|$ — евклидова норма), называемое броуновским движением Леви, является одной из самых известных стохастических моделей. Замечательные свойства этого поля установлены в ряде работ (см., например, [2]–[8]). Работы эти в основном посвящены исследованию вероятностных свойств поля, а некоторые естественно возникающие статистические проблемы пока не рассматривались. В данной работе мы устанавливаем тот несколько удивительный факт, что в случае наблюдения константы m , «испорченной» шумом X вне шара с центром в нуле, оценка максимального правдоподобия m зависит только от значений поля и значений его обобщенных нормальных производных на поверхности шара. Отметим, что хотя в заметке не используются методы стохастических уравнений в частных производных, но в поиске вида оценки автору существенную помощь оказала эта теория (см. [9]).

2. Точная постановка задачи и формулировка основного результата.

Мы предполагаем, что на множестве $G = \{t \in \mathbb{R}^3: |t| \geq d\}$ вместо неизвестной константы m наблюдается поле

$$\tilde{X}(t) = X(t) + m, \quad t \in G.$$

Поле $\tilde{X}$ мы будем называть броуновским движением Леви со средним m . Наша цель определить оценку максимального правдоподобия среднего.

Напомним определение обобщенной нормальной производной броуновского движения Леви, данное в работе [3]. Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ есть область с гладкой поверхностью ∂D , тогда для $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ определяется поверхностный интеграл в форме

$$\oint_{\partial D} \varphi(\lambda) \frac{\partial X}{\partial n}(\lambda) \partial \lambda := \left\{ \frac{\partial}{\partial h} \oint_{\partial D} \varphi(\lambda) X(\lambda + h\lambda^*) \partial \lambda \right\} \Big|_{h=0}, \quad (1)$$

где λ^* — единичный вектор нормали в точке λ .

Мы докажем следующий результат.

Теорема. Пусть наблюдается $\tilde{X}$ — броуновское движение Леви со средним m , на множестве $G = \{t \in \mathbb{R}^3: |t| \geq d\}$. Тогда оценка максимального правдоподобия m зависит только от значений $\tilde{X}$ и его обобщенных нормальных производных на поверхности шара $\{t: |t| = d\}$:

$$\hat{m} = \frac{1}{4\pi d^2} \oint_{|\lambda|=d} \tilde{X}(\lambda) d\lambda - \frac{d}{2} \frac{1}{4\pi d^2} \oint_{|\lambda|=d} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial n}(\lambda) d\lambda. \quad (2)$$

3. Доказательство теоремы. Сначала покажем, что для случайной величины

$$Y = \frac{1}{\pi d^3} \oint_{|\lambda|=d} \tilde{X}(\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi d^2} \oint_{|\lambda|=d} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial n}(\lambda) d\lambda$$

и всех $s \in G$

$$\mathbb{E}(Y \cdot X(s)) = 1. \quad (3)$$

Далее (см. [1, с. 33, теорема 3]), меры, порожденные полями $\dot{X}$ и $\tilde{X}$, эквивалентны, и функция правдоподобия имеет вид

$$\exp \left\{ mY - m^2 \frac{DY}{2} \right\}.$$

Поэтому несмещенная оценка максимального правдоподобия среднего (см. [1, с. 107]) равна

$$\hat{m} = \frac{Y}{DY}. \quad (4)$$

Положим

$$Y_1 = \oint_{|\lambda|=d} X(\lambda) d\lambda, \quad Y_2 = \oint_{|\lambda|=d} \frac{\partial X}{\partial n}(\lambda) d\lambda.$$

Тогда для $s \in G$ и $|s| = r \geq d$ ввиду симметрии

$$\mathbf{E}(Y_1 X(s)) = \mathbf{E}(Y_1 X(0, 0, r)).$$

Поскольку

$$\mathbf{E}(X(t) X(s)) = \frac{|t| + |s| - |t - s|}{2},$$

справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_1 X(s)) &= \mathbf{E} \left(\oint_{|\lambda|=d} X(\lambda) d\lambda \cdot X(0, 0, r) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \oint_{|\lambda|=d} |\lambda| d\lambda + \oint_{|\lambda|=d} |(0, 0, r)| d\lambda - \oint_{|\lambda|=d} |\lambda - (0, 0, r)| d\lambda \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 4\pi d^2 (d + r) - \oint_{|\lambda|=d} |\lambda - (0, 0, r)| d\lambda \right\}. \end{aligned}$$

Вводя сферические координаты, последнее слагаемое можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\oint_{|\lambda|=d} |\lambda - (0, 0, r)| d\lambda \\ &= d^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{d^2 \sin^2 v \cos^2 \varphi + d^2 \sin^2 v \sin^2 \varphi + (d \cos v - r)^2} \sin v dv d\varphi \\ &= 2\pi d^2 \int_0^\pi \sqrt{d^2 - 2dr \cos v + r^2} \sin v dv = 4\pi d^2 r + \frac{4\pi d^4}{3} \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Итак,

$$\mathbf{E}(Y_1 X(s)) = 2\pi d^2 \left(d - \frac{d^2}{3r} \right). \quad (6)$$

Используя определение (1) для обобщенной нормальной производной, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_2 X(s)) &= \mathbf{E} \left(\oint_{|\lambda|=d} \frac{\partial X}{\partial n}(\lambda) d\lambda \cdot X(s) \right) \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial h} \left[\oint_{|\lambda|=d} \mathbf{E}(X(\lambda + t\lambda^*) X(s)) d\lambda \right] \right\} \Big|_{h=0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial h} \left[\oint_{|\lambda|=d} \frac{|\lambda + t\lambda^*| + |s| - |\lambda + t\lambda^* - s|}{2} d\lambda \right] \right\} \Big|_{h=0}. \end{aligned}$$

Поскольку в нашем случае $\lambda^* = \lambda/d$, используя формулу (5), получаем, что

$$\begin{aligned} E(Y_2 X(s)) &= E\left(\oint_{|\lambda|=d} \frac{\partial X}{\partial h}(\lambda) d\lambda \cdot X(s)\right) \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial h} \left[\oint_{|\lambda|=d} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{h}{d}\right) |\lambda| + |s| - \left(1 + \frac{h}{d}\right) \times \left| \lambda - \frac{s}{1+h/d} \right| d\lambda \right\} \right] \right\} \Big|_{h=0} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial h} \left[\left(1 + \frac{h}{d}\right) d 4\pi d^2 + r 4\pi d^2 - \left(4\pi d^2 r + \frac{4\pi d^4}{3} \frac{(1+h/d)^2}{r}\right) \right] \right\} \Big|_{h=0} \\ &= 2\pi d^2 \left(1 - \frac{2d}{3r}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) и (7) выводим, что

$$E(YX(s)) = E\left(\left[\frac{1}{\pi d^3} Y_1 - \frac{1}{2\pi d^2} Y_2\right] X(s)\right) = 1.$$

Итак, выполняется равенство (3), а значит, оценка максимального правдоподобия имеет вид (4). Учитывая несмещенность оценки максимального правдоподобия среднего, получаем как раз оценку (2), чем и заканчиваем доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розанов Ю. А. Гауссовские бесконечномерные распределения. М.: Наука, 1968, 136 с.
2. Ченцов Н. Н. Многопараметрическое броуновское движение Леви и обобщенный белый шум. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 2, с. 281–282.
3. McKean H. P. Brownian motion with a several-dimensional time. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, в. 4, с. 357–378.
4. Молчан Г. М. О некоторых задачах, связанных с броуновским движением Леви. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 4, с. 747–755.
5. Ciesielski Z. Stochastic equation for realization of the Lévy Brownian motion with a several-dimensional time. — Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astr. et Phys., 1975, v. 23, № 11, p. 1193–1198.
6. Si Si. A note on Lévy's Brownian motion. — Nagoya Math. J., 1987, v. 108, p. 121–130.
7. Розанов Ю. А. Марковские случайные поля и граничные задачи для стохастических уравнений в частных производных. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 1, с. 3–34.
8. Goldman A. Techniques biharmoniques pour l'étude du mouvement brownien de P. Lévy à trois parametres. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1989, v. 25, № 4, p. 351–381.
9. Arató N. M. Mean estimation of Brownian sheet. — Comput. Math. Appl., 1997, v. 33, № 8, p. 13–25.

Поступила в редакцию
30.V.1997