Общероссийский математический портал

А. А. Новиков, Хеджирование опционов с заданной вероятностью, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 152–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp885>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 03:17:38

© 1998 г.

НОВИКОВ А. А.*

ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНОВ С ЗАДАННОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ¹⁾

Рассматривается модель полного рынка с двумя активами в предположении, что инвестор хеджирует заданную функцию выплат с заданной вероятностью; другими словами, инвестор в момент выплаты опциона имеет капитал не меньше требуемой функции выплат с вероятностью, не меньшей $1 - \alpha$, где α — уровень значимости. При некоторых предположениях относительно модели рынка и некоторых ограничениях на класс хеджирующих стратегий находится оценка снизу для цены опциона (т.е. для начального капитала инвестора) и строится хеджирующая стратегия (стратегия инвестора), на которой достигается полученная оценка снизу.

В качестве примера вычисляется цена и строится хедж для европейского опциона-колл, а также американского опциона-колл с барьерным ограничением.

Ключевые слова и фразы: финансовая математика, мартингалы, отношение правдоподобия, платежные обязательства.

1. Введение. Мы рассматриваем модель безарбитражного полного рынка, определенную на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$, $t \geq 0$, $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$. Предполагается, что все вероятностные меры из семейства $\mathcal{P}$ (семейства допустимых (для инвестора) вероятностных мер) эквивалентны некоторой канонической мере.

Капитал инвестора (продавца опциона), обозначаемый далее $X_t = X_t^\pi$, определяется соотношением

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \quad t \geq 0,$$

где $0 < B_t$ — стоимость банковского актива (актива с предсказуемой ценой), $B_0 = 1$, $0 < S_t$ — стоимость акции (актива с непредсказуемой ценой), $\pi = (\beta_t, \gamma_t)$ — предсказуемая стратегия инвестора (хедж). Основные результаты сформулированы в работе для модели (B, S) -рынка с непрерывным временным параметром t , но, на самом деле, все результаты легко переформулируются на случай моделей с дискретным временным параметром (детали техники такого вложения см., например, в монографии [1] или в работе [2]).

По определению безарбитражного полного рынка (см., например, [3]–[4], а также библиографию в этих работах) существует единственная вероятностная мера $\mathbf{P}^*$ (так называемая мартингальная мера), эквивалентная мерам $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ и такая, что процесс (S_t/B_t) является локальным мартингалом относительно $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P}^*)$, или, что эквивалентно, процесс (X_t^π/B_t) является локальным мартингалом относительно $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P}^*)$ для любого самофинансируемого хеджа $\pi \in \text{SF}$ (класс всех самофинансируемых хеджей).

Свойство самофинансируемости означает, что капитал X_t^π получается без каких-либо внешних выплат или доплат (нет дивидендов, потребления, выплат налогов и т.д.). Формально, это свойство интерпретируется как справедливость следующего представления:

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \beta_t \circ B_t + \gamma_t \circ S_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где мы используем французское обозначение $\zeta_t \circ G_t$ для стохастического интеграла от случайного предсказуемого процесса ζ_t по семимартингалу G_t (относительно общих

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, Россия; The University of Newcastle, Australia.

¹⁾Работа выполнена при поддержке фонда INTAS.

фактов стохастического анализа см., например, монографию [1]). В частности, если G_t — кусочно-постоянный процесс, то $\zeta_t \circ G_t = \sum_{s \leq t} \zeta_s - \Delta G_s$, $\Delta G_s = G_s - G_{s-}$. Конечно, мы всегда предполагаем, что стохастические интегралы в (1) и везде ниже соответствующим образом определены (см. [1]). Простые вычисления показывают, что для любого $\pi \in \mathcal{SF}$

$$\frac{X_t^\pi}{B_t} = X_0^\pi + \gamma_t \circ \left(\frac{S_t}{B_t} \right), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Обозначим через $\mathcal{T}$ класс допустимых моментов остановки τ относительно $(\mathcal{F}_t)$. Например, $\mathcal{T} = \{T\}$ или $\mathcal{T} = \{\tau: \tau \leq T\}$, $T \leq \infty$, T — дата погашения опциона (maturity date).

Классический подход к расчету цены американских опционов состоит в нахождении хеджа $\pi \in \mathcal{SF}$ такого, что

$$\mathbf{P}\{X_\tau^\pi \geq f_\tau\} = 1, \quad \mathbf{P} \in \mathcal{P}, \quad (3)$$

для всех $\tau \in \mathcal{T}$, где f_τ — заданная неотрицательная функция выплат. Цена такого опциона определяется как минимальный начальный капитал инвестора, необходимый для выполнения (3).

Когда $\mathcal{T}$ состоит из одного момента погашения T , такой опцион называется европейским; иначе — американским. (В литературе иногда различают американские опционы с $\mathcal{T} = \{\tau: \tau \leq T\}$ и с конечным множеством $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$; последние иногда называют также бермудскими.)

Обозначим $\Pi(x, f)$ класс всех самофинансируемых хеджей таких, что $X_0^\pi = x$ и выполнено (3). Тогда (так называемая справедливая) цена опциона равна (см. [3]–[4]) $\mathcal{C}(f) = \inf\{x: \Pi(x, f) \neq \emptyset\}$ и при определенных условиях существует так называемый минимальный хедж $\pi^* \in \mathcal{SF}$ такой, что $\mathcal{C}(f) = X_0^{\pi^*}$. Хорошо известно, что в базовых диффузионной и биномиальной моделях с $\mathcal{T} = \{T\}$ (т.е. в случае европейского опциона) или $\mathcal{T} = \{\tau: \tau \leq T\}$ (случай классического американского опциона) минимальный хедж существует, когда, например, функция выплат равномерно интегрируема относительно класса $\mathcal{T}$. При этом $\mathcal{C}(f) = \sup_{\mathcal{T}} \mathbf{E}^*(f_\tau/B_\tau)$.

Предположение (3) приводит, на самом деле, к весьма низкому доходу продавца опциона; в случае европейских опционов этот доход вообще равен нулю (по построению минимального хеджа), а в случае американского опциона доход инвестора отличен от нуля только при неоптимальном поведении покупателя опциона.

Постановка задачи расчета опционов с ограничением типа (3) в корне не соответствует стандартным статистическим ограничениям, принятым, например, в теории статистических решений (проверки гипотез и т.д.). Имея в виду это соображение, представляется естественным ослабить условие (3) и допустить возможность хеджирования с вероятностью меньше единицы. Другими словами, продавец опциона может взять на себя риск (в некоторых пределах) и, например, искать хедж из условия

$$\inf_{\mathcal{P}} \inf_{\mathcal{T}} \mathbf{P}\{X_\tau^\pi \geq f_\tau\} = 1 - \alpha,$$

где α — заданный уровень значимости.

Такой подход недавно обсуждался для случая диффузионной модели европейского опциона D. Heath, [5], M. Kullordorf и H. Föllmer (Д. Крамков, [6]). В настоящей работе мы распространяем этот подход на общие модели рынка с двумя активами (включая дискретное время) и, в частности, получаем соотношения для цены минимального хеджа американских опционов с барьерным ограничением. Отметим, что в нашей общей постановке европейские опционы трактуются как частный случай американских опционов.

Основные результаты работы (лемма 1 и теорема 1) и их доказательства приведены в пп. 2 и 3. В п. 4 в качестве примера вычисляется цена и строятся минимальные стратегии инвестора для европейского опциона-колл, а также американского опциона-колл с барьерным ограничением.

2. Оценка снизу для начального капитала инвестора. Мы будем предполагать, что класс $\mathcal{P}$ содержит мартингальную меру P^* , и будем рассматривать стратегии инвестора (хеджи) только из следующего класса:

$$SF(A) = \left\{ \pi \in SF: \frac{X_\tau^\pi}{B_\tau} \geq \frac{f_\tau}{B_\tau} - A \text{ п.н. для любого } \tau \in T \right\},$$

где A — заданная неотрицательная константа.

Смысл этого условия — в равномерном ограничении максимального отклонения дисконтированного капитала инвестора от дисконтированной функции выплат. Отметим, что предположение $P^* \in \mathcal{P}$ является очень удобным в техническом отношении (однако, было бы интересно исследовать вопрос о необходимости этого предположения).

Лемма 1. Если $\pi \in SF(A)$, то

$$\sup_{\tau \in T} \left[E^* \left(\frac{X_\tau^\pi}{f_\tau} \right) - A P^* \{ X_\tau^\pi < f_\tau \} \right] \leq X_0^\pi.$$

Доказательство. В силу предположения о безарбитражности (B, S) -рынка справедливо следующее тождество для любых моментов остановки τ и локализующей последовательности $\tau_n \uparrow \infty$:

$$E^* \left(\frac{X_{\sigma_n}^\pi}{B_{\sigma_n}} \right) = X_0^\pi, \quad \sigma_n = \min(\tau, \tau_n).$$

Перепишем это тождество следующим образом:

$$E^* \left(\frac{X_{\sigma_n}^\pi}{B_{\sigma_n}} \right)^+ = E^* \left(\frac{X_{\sigma_n}^\pi}{B_{\sigma_n}} \right)^- + X_0^\pi,$$

где $(x)^+ = \max(x, 0)$ — положительная часть x , $(x)^- = (-x)^+$.

Теперь предположим, что τ — допустимый момент остановки. Поскольку в этом случае $(X_{\sigma_n}^\pi/B_{\sigma_n})^- \leq A$, то, устремляя n к бесконечности, в пределе получим (по лемме Фату)

$$E^* \left(\frac{X_\tau^\pi}{B_\tau} \right)^+ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E^* \left(\frac{X_{\sigma_n}^\pi}{B_{\sigma_n}} \right)^- + X_0^\pi = E^* \left(\frac{X_{\sigma_n}^\pi}{B_{\sigma_n}} \right)^- + X_0^\pi.$$

Отсюда $E^*(X_\tau^\pi/B_\tau) \leq X_0^\pi$. Так как для π из класса $SF(A)$ выполнено неравенство $X_\tau^\pi/B_\tau - f_\tau/B_\tau + A \geq 0$ п.н., то по неравенству Чебышева

$$\begin{aligned} A P^* \{ X_\tau^\pi \geq f_\tau \} &= A P^* \left\{ \frac{X_\tau^\pi}{B_\tau} - \frac{f_\tau}{B_\tau} + A \geq A \right\} \leq E^* \left(\frac{X_\tau^\pi}{B_\tau} - \frac{f_\tau}{B_\tau} + A \right) \\ &\leq X_0^\pi - E^* \left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \right) + A, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\left[E^* \left(\frac{X_\tau^\pi}{f_\tau} \right) - A I \{ X_\tau^\pi < f_\tau \} \right] \leq X_0^\pi,$$

где $I(\cdot)$ — индикаторная функция. Отсюда немедленно следует доказываемое неравенство.

З а м е ч а н и е 1. При доказательстве леммы 1 мы не использовали предположение о полноте рынка, т.е. предположение о единственности мартингальной меры P^* . Поэтому результат леммы 1 может быть использован и при изучении неполных безарбитражных рынков.

Обозначим

$$\Pi(x, f, \alpha, A) = \left\{ \pi \in SF(A): \inf_{\mathcal{P}} \inf_T P\{X_T^\pi \geq f_T\} = 1 - \alpha \right\}$$

и

$$C(f, \alpha, A) = \inf \left\{ x: \Pi(x, f, \alpha, A) \neq \emptyset \right\}.$$

Величину $C(f, \alpha, A)$ естественно называть инвесторской ценой (или, «скрытой» ценой) американского опциона с заданной функцией выплат f_T , $T \in T$, на заданном уровне значимости α . Будет показано, что в случае европейских опционов при определенных достаточно общих условиях существует (назовем его «скрытым») хедж $\pi^\alpha \in \Pi(x, f, \alpha, A)$ с начальным капиталом

$$x = X_0^{\pi^\alpha} = E^* \left[\frac{X_T^{\pi^\alpha}}{f_T} - A \{X_T^{\pi^\alpha} < f_T\} \right] = C(f) - \alpha A,$$

т.е., по лемме 1,

$$C(f, \alpha, A) = C(f) - \alpha A.$$

Кроме того, будет показано, что для «скрытого» хеджа π^α европейского опциона вероятность $P\{X_T^\pi \geq f_T\}$ принимает максимальное значение для любой меры $P \in \mathcal{P}$ в классе всех $\pi \in SF(A)$.

Ситуация со «скрытым» хеджированием американских опционов более сложная. Нам удалось построить указанный хедж только при следующих ограничениях:

A(0) процесс (f_t/B_t) равномерно интегрируем по классу $\tau \in T$;

A(1) существует («рациональный») момент остановки $\tau^* \in T$, $\tau^* < \infty$ п.н., такой, что

$$C(f) = \sup_{\{\tau \in T\}} E^* \left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \right) = E^* \left(\frac{f_{\tau^*}}{B_{\tau^*}} \right) < \infty.$$

Кроме этих условий (носящих, на самом деле, технический характер) мы ограничиваем класс рассматриваемых американских опционов барьерным условием:

$$A(2) \quad T \subseteq \{\tau: \tau \geq \tau^*\}.$$

Другими словами, допускается выплата только в моменты времени не раньше рационального момента классического американского опциона. (Было бы интересно рассмотреть вопрос о том, как можно избежать этого ограничения.)

Кроме того, мы будем рассматривать хеджи только из следующего класса:

$$\begin{aligned} A(3) \quad \pi \in \Pi'(x, f, \alpha, A) &:= \left\{ \pi \in \Pi(x, f, \alpha, A): \inf_{\mathcal{P}} P\{X_{\tau^*}^\pi \geq f_{\tau^*}\} \right. \\ &= P^*\{X_{\tau^*}^\pi \geq f_{\tau^*}\} = 1 - \alpha \left. \right\}. \end{aligned}$$

Другими словами, мы сразу трактуем как худший (для инвестора) случай, когда выплата происходит в момент τ^* , и гарантируем, что в случае, когда реализуется мартингальная мера, эта вероятность равна $1 - \alpha$, а в других случаях вероятность не меньше этого значения.

Легко видеть, что при выполнении предположений A(0)–A(3) оценка снизу для начального капитала равна $C(f) - \alpha A$. Действительно,

$$X_0^\pi \geq \sup_{\tau \in T} E^* \left[\frac{X_\tau^\pi}{f_\tau} - A I\{X_\tau^\pi < f_\tau\} \right] \geq C(f) - A P^*\{X_{\tau^*}^\pi < f_{\tau^*}\} = C(f) - \alpha A.$$

Для европейских опционов условия $A(0)$, $A(1)$ и $A(2)$ автоматически выполнены; при этом $\Pi'(x, f, \alpha, A) = \Pi(x, f, \alpha, A)$.

При конструировании минимального хеджа π^α мы будем использовать также следующее предположение:

$A(4)$ существует такое событие $E \in \mathcal{F}_{\tau^*}$, что

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} P\{E\} = P^*\{E\} = 1 - \alpha.$$

Событие E можно, в принципе, построить разными способами. Мы будем использовать подход, основанный на фундаментальной лемме Неймана-Пирсона (т.е. на отношении правдоподобия).

Обозначим

$$L_t = L_t(Q) = \frac{dQ}{dP^*} \Big|_{\mathcal{F}_t}$$

(это — сужение производной Радона-Никодима меры $Q \in \mathcal{P}$, $Q \neq P^*$, на сигма-алгебру $\mathcal{F}_t$).

Рассмотрим событие

$$E = \{L_{\tau^*} \geq \lambda(\alpha)\}.$$

Условие $A(4)$ будет выполнено, когда существует такое $\lambda(\alpha) > 0$, что

$$A(5) \quad \min_{P \in \mathcal{P}} P\{L_{\tau^*} \geq \lambda(\alpha)\} = 1 - \alpha.$$

Для наглядности изложения мы проверим это условие для базовых моделей.

Д и ф ф у з и о н н а я м о д е л ь. См., например, [4]:

$$\mathcal{P} = \{P^\mu, \mu \in [\mu_0, \mu_1]\};$$

$$B_t = \exp(rt), \quad r = \text{const}; \quad S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma X_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right\},$$

где X_t — винеровский процесс с дисперсией t и средним $\mu t / \sigma$ относительно меры P^μ , $0 < \sigma$ — волатильность.

Хорошо известно, что в этой модели мартингальная мера $P^* = P^r$ и

$$L_t(P^\mu) = \frac{dP^\mu}{dP^r} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left\{ \frac{(\mu - r)}{\sigma} X_t - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} t \right\}.$$

Поэтому, если взять

$$\lambda(P^\mu, \alpha) := \lambda(\alpha) = \exp \left\{ \frac{(\mu - r)}{\sigma} \vartheta_\alpha - \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \tau^* \right\}$$

с некоторым ϑ_α , то

$$\{L_{\tau^*}(P^\mu) \geq \lambda(P^\mu, \alpha)\} = \{(\mu - r) X_{\tau^*} \geq (\mu - r) \vartheta_\alpha\}.$$

Естественно предполагать, что знак разности $(\mu - r)$ известен, т.е. мы знаем, что акция в среднем доходнее банковского актива (или наоборот). Рассмотрим в качестве примера случай $\mu_0 = r$. Тогда

$$\{L_{\tau^*}(P^\mu) \geq \lambda(\alpha)\} = \{X_{\tau^*} \geq \vartheta_\alpha\},$$

и, значит, это событие не зависит от параметра μ из заданного интервала $[r, \mu_1]$!

В случае европейских опционов (т.е. когда $T = \{T\}$) рациональный момент остановки является детерминированным, $\tau^* = T$, и поэтому условие A(5) эквивалентно следующим соотношениям:

$$\inf_{\mu \geq \tau} \mathbf{P}^\mu \{X_T \geq \vartheta_\alpha\} = \mathbf{P}^\tau \{X_T \geq \vartheta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

$$\vartheta_\alpha = \frac{\tau}{\sigma} T - \chi_{1-\alpha} \sqrt{T}, \quad \Phi(\chi_{1-\alpha}) = 1 - \alpha,$$

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Биномиальная модель. См., например, [3]:

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{P}^{(p)}, p \in [p_0, p_1]\};$$

$$B_t = \exp(rt), \quad S_t = S_0 u^{\mu_t} d^{t-\mu_t}, \quad 0 < d < e^r < u,$$

где

$$\mu_t = \sum_{k \leq t} e_k, \quad \mathbf{P}^{(p)}\{e_k = 1\} = p = 1 - \mathbf{P}^{(p)}\{e_k = 0\}.$$

Хорошо известно, что в этом случае $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^{(p^*)}$ с $p^* = (e^r - d)/(u - d)$ и

$$L_t(\mathbf{P}^{(p)}) = \left(\frac{p}{p^*}\right)^{\mu_t} \left(\frac{1-p}{1-p^*}\right)^{t-\mu_t}.$$

Поэтому естественно взять

$$\lambda(\mathbf{P}^p, \alpha) := \lambda(\alpha) = \exp\{\delta \vartheta_\alpha\} \left(\frac{1-p}{1-p^*}\right)^{\tau^*} \quad \text{с} \quad \delta = \ln \left(\frac{p}{p^*} \frac{1-p^*}{1-p}\right).$$

Если предположить, как и выше в случае диффузионной модели, что знак разности $(p - p^*)$ известен, то событие $\{L_{\tau^*}(\mathbf{P}^{(p)}) \geq \lambda(\mathbf{P}^{(p)}, \alpha)\}$ не зависит от меры $\mathbf{P}^{(p)}$.

В частности, если $p_0 = p^*$, то критический уровень ϑ_α находится из уравнения:

$$\mathbf{P}^{(p^*)}\{\mu_{\tau^*} \geq \vartheta_\alpha\} = 1 - \alpha.$$

3. Построение хеджа π^α . Обозначим $\pi^* = (\beta_i^*, \gamma_i^*)$ — минимальный хедж классической задачи расчета американского опциона ($\alpha = 0$). Кроме того, мы будем использовать следующие стандартные обозначения и факты (см. [3], [4]).

Пусть

$$Y_t := \operatorname{esssup}_{\tau \in T, \tau \geq t} \mathbf{E}^* \left(\frac{f_\tau}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

При выполнении условий A(0) и A(1): существует предсказуемый процесс $A_t \geq 0$, $A_0 = 0$, такой, что

$$M_t = Y_t + A_t, \quad (4)$$

где M_t — локальный мартингал относительно $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P}^*)$, и для любого $\tau \in T$

$$Y_\tau \geq \frac{f_\tau}{B_\tau}, \quad Y_{\tau^*} = M_{\tau^*} = \frac{f_{\tau^*}}{B_{\tau^*}} \quad \text{п.н.} \quad (5)$$

Кроме того, в силу полноты рынка найдется предсказуемый процесс γ_i^* такой, что

$$M_t = \mathbb{C}(f) + \gamma_i^* \circ \left(\frac{S_t}{B_t} \right). \quad (6)$$

З а м е ч а н и е 2. В работах [3] и [4] рассматривались, на самом деле, случаи $T = \{T\}$ (европейские опционы) и $T = \{\tau: \tau \leq T\}$ (американские опционы). Однако все соответствующие результаты из [3] и [4] справедливы и для произвольных классов допустимых моментов остановки T (при выполнении условий $A(0)$ и $A(1)$). Чтобы свести общий случай к стандартному с $T = \{\tau: \tau \leq T\}$, нужно только соответствующим образом переопределить функцию выплат f_τ , полагая, например, $f_\tau = 0$ для всех моментов остановки $\tau \notin T$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия $A(0)$ – $A(3)$ и $A(5)$ и хедж $\pi^\alpha = (\beta_t^\alpha, \gamma_t^\alpha)$, задан с помощью уравнений (1), (2) и следующих соотношений:

$$\begin{aligned} X_0^{\pi^\alpha} &= C(f) - \alpha A, \\ \gamma_t^\alpha &= \gamma_t^* - \varphi_t A, \end{aligned} \quad (7)$$

$$m_t := P^* \left\{ L_{\tau^*} < \lambda(\alpha) \mid \mathcal{F}_t \right\} = \alpha + \varphi_t \circ \left(\frac{S_t}{B_t} \right). \quad (8)$$

Тогда

$$\alpha = P^* \{ X_{\tau^*}^{\pi^\alpha} < f_{\tau^*} \}, \quad \pi^\alpha \in \Pi'(X_0^{\pi^\alpha}, f, \alpha, A),$$

и

$$C(f, \alpha, A) = X_0^{\pi^\alpha} = C(f) - \alpha A.$$

Кроме того, если $E^* L_{\tau^*} = 1$ и величина $\lambda(\alpha)$ неслучайна, то

$$\sup_{\pi \in \Pi'(X_0^{\pi^\alpha}, f, \alpha, A)} P \{ X_{\tau^*}^{\pi} \geq f_{\tau^*} \} = P \{ X_{\tau^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{\tau^*} \}, \quad P \in \mathcal{P}. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу уравнений (4)–(8) имеем:

$$\frac{X_t^{\pi^\alpha}}{B_t} = X_0^{\pi^\alpha} + \gamma_t^\alpha \circ \left(\frac{S_t}{B_t} \right) = X_0^{\pi^\alpha} - C(f) + \alpha^* A + M_t - m_t A = M_t - m_t A, \quad (10)$$

где локальные мартингалы M_t и m_t определены в (4) и (8) соответственно.

Поскольку в силу (5) $M_{\tau^*} = f_{\tau^*}/B_{\tau^*}$, то

$$\frac{X_{\tau^*}^{\pi^\alpha}}{B_{\tau^*}} = \frac{f_{\tau^*}}{B_{\tau^*}} - I \{ L_{\tau^*} < \lambda(\alpha) \} A$$

и, следовательно,

$$P^* \{ X_{\tau^*}^{\pi^\alpha} < f_{\tau^*} \} = P^* \{ L_{\tau^*} < \lambda(\alpha) \} = \alpha.$$

В силу неравенств $M_t \geq f_t/B_t \geq 0$, $m_t \leq 1$ и уравнений (5)–(8) теперь получаем, что для всех $\tau \in T$

$$\frac{X_\tau^{\pi^\alpha}}{B_\tau} \geq \frac{f_\tau}{B_\tau} - A.$$

Таким образом, показано, что хедж $\pi^\alpha = (\beta_t^\alpha, \gamma_t^\alpha) \in \text{SF}(A)$.

Заметим, что в силу определения m_t (см. (8))

$$m_\tau = I \{ L_{\tau^*} \geq \lambda(\alpha) \} \quad \text{п.н. для всех } \tau \geq \tau^*.$$

Поэтому, в силу (5) и (10) для всех $\tau \geq \tau^*$ и $P \in \mathcal{P}$

$$P \{ X_\tau^{\pi^\alpha} \geq f_\tau \} \geq P \{ L_{\tau^*}(P) \geq \lambda(\alpha) \} \geq P^* \{ X_{\tau^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{\tau^*} \} = 1 - \alpha.$$

Следовательно,

$$\pi^\alpha \in \Pi'(X_0^{\pi^\alpha}, f, \alpha, A).$$

В силу леммы 1 это означает, что $C(f, \alpha, A) = C(f) - \alpha A$.

Теперь осталось показать, что стратегия π^α имеет максимальную вероятность хеджирования для всех $P \in \mathcal{P}$ (при определенных выше условиях). Для этой цели мы воспользуемся следующей модификацией фундаментальной леммы Неймана-Пирсона.

Лемма 2. Пусть выполнено условие A(5), $E^* L_{T^*} = 1$ и величина $\lambda(\alpha)$ неслучайна. Тогда

$$\sup_{\pi \in \Pi'(X_0^{\pi^\alpha}, f, \alpha, A)} P\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{T^*}\} = P\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{T^*}\}.$$

Доказательство. Согласно определениям класса $\Pi'(X_0^{\pi^\alpha}, f, \alpha, A)$ и хеджа π^α ,

$$P^*\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} < f_{T^*}\} = P^*\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} < f_{T^*}\} = P^*\{L_{T^*}(P) < \lambda(\alpha)\} = \alpha.$$

Отсюда вытекает, что

$$P^*\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{T^*}, L_{T^*}(P) < \lambda(\alpha)\} = P^*\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} < f_{T^*}, L_{T^*}(P) \geq \lambda(\alpha)\}.$$

Поэтому, ввиду предположений $E^* L_{T^*} = 1$ и неслучайности $\lambda(\alpha)$ имеем

$$\begin{aligned} P\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{T^*}\} &= P\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{T^*}, L_{T^*}(P) \geq \lambda(\alpha)\} \\ &\quad + E^*\left[L_{T^*}(P) I\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{T^*}, L_{T^*}(P) < \lambda(\alpha)\}\right] \\ &\leq P^*\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{T^*}, L_{T^*}(P) \geq \lambda(\alpha)\} \\ &\quad + \lambda(\alpha) P^*\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} < f_{T^*}, L_{T^*}(P) \geq \lambda(\alpha)\} \\ &\leq P\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{T^*}, L_{T^*}(P) \geq \lambda(\alpha)\} \\ &\quad + E^*\left[L_{T^*}(P) I\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} < f_{T^*}, L_{T^*}(P) \geq \lambda(\alpha)\}\right] \leq P\{L_{T^*}(P) \geq \lambda(\alpha)\}. \end{aligned}$$

Так как, по построению хеджа π^α , для всех $P \in \mathcal{P}$

$$P\{L_{T^*}(P) \geq \lambda(\alpha)\} = P\{X_{T^*}^{\pi^\alpha} \geq f_{T^*}\},$$

то лемма 2 доказана.

4. Примеры. 1. *Европейский опцион-колл. Диффузионная модель.* Рассматривается функция выплат $f_t = (S_t - K)^+$, множество $T = \{T\}$. Мы предположим дополнительно, что $\mu_0 = r$.

Выше уже было показано, что в этом случае

$$\vartheta_\alpha = \frac{r}{\sigma} T - \chi_{1-\alpha} \sqrt{T}, \quad \Phi(\chi_{1-\alpha}) = 1 - \alpha.$$

По теореме 1 $\mathbb{C}(f, \alpha) = \mathbb{C}(f) - \alpha A$, где $\mathbb{C}(f)$ вычисляется по формуле Блэка-Шоулса. Поскольку процесс $W_t^r := X_t - rt/\sigma$ имеет дисперсию t и среднее ноль (по мартингальной мере), то

$$\begin{aligned} P^r\{L_T(P^r) < \lambda(\alpha) \mid \mathcal{F}_t\} &= P^r\{W_T^r - W_t^r < -\chi_{1-\alpha} \sqrt{T} - W_t^r \mid \mathcal{F}_t\} \\ &= \Phi\left(-\frac{\chi_{1-\alpha} \sqrt{T} + W_t^r}{\sqrt{T-t}}\right). \end{aligned}$$

Применяя формулу Ито, находим, что искомая поправка к хеджу γ_t^* (см. (7) и (8)) равна

$$\varphi_t = -\frac{B_t}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(T-t)} (W_t^r + \chi_{1-\alpha} \sqrt{T})^2\right\}.$$

Кроме того, прямыми вычислениями получаем, что при $\mu \geq r$ вероятность хеджирования равна

$$P^\mu \{X_T^\pi \geq f_T\} = \Phi\left(\frac{\mu - r}{\sigma} \sqrt{T} + \chi_{1-\alpha}\right) \geq 1 - \alpha.$$

Так как в этом примере величина $\lambda(\alpha)$ — неслучайная, то, согласно теореме 1 (фактически, по фундаментальной лемме Неймана-Пирсона), вычисленная вероятность и есть максимальная возможная вероятность хеджирования в классе $\Pi'(X_0^\pi, f, \alpha, A)$.

2. *Американский барьерный опцион-колл.* Рассматривается функция выплат $f_t = \exp(-\lambda t)(S_t - K)^+$, $\lambda > 0$, множество $T = \{t: t \geq \tau^*\}$, где τ^* — рациональный момент остановки стандартного американского опциона-колл на интервале $[0, \infty)$. Предполагается дополнительно, что $\mu_0 = r$.

Рациональность τ^* в данном случае означает, что

$$\sup_{\{\tau: \tau < \infty\}} E^*\left(\frac{f_\tau}{B_\tau}\right) = E^*\left(\frac{f_{\tau^*}}{B_{\tau^*}}\right),$$

и, как хорошо известно,

$$\tau^* = \inf\{t: S_t > S_1^*\} = \inf\left\{t: X_t - \frac{r}{\sigma}t > a + bt\right\},$$

где

$$a := \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{S_1^*}{S_0}\right) > 0, \quad b := \frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma} \leq 0, \quad S_1^* = C_1 S_0^{\gamma_1},$$

$$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\lambda + r)}{\sigma^2}}, \quad C_1 = \gamma_1^{-\gamma_1} \left(\frac{\gamma_1 - 1}{K}\right)^{\gamma_1 - 1}.$$

Распределение τ^* выписано, например, в [3]. Чтобы гарантировать конечность τ^* п.н., предположим также, что $S_0 < S_1^*$. Тогда

$$P^r\{\tau^* > x\} = G(a, b, x) := \int_x^\infty \frac{a}{2\pi\sqrt{u^3}} \exp\left\{-\frac{(a - bu)^2}{2u}\right\} du.$$

Применяя преобразование Гирсанова, легко найти, что при $\mu \geq r$

$$P^\mu\{\tau^* > x\} = G\left(a, b - \frac{(\mu - r)}{\sigma}, x\right). \quad (11)$$

Напомним, что $\{L_{\tau^*}(P^\mu) < \lambda(\alpha)\} = \{X_{\tau^*} < \vartheta_\alpha\}$, и заметим, что $X_{\tau^*} = a + b\tau^*$. Согласно теореме 1 и равенству (10), надо выбрать ϑ_α как корень уравнения $1 - G(a, b, \vartheta_\alpha - a/b) = \alpha$. Тогда инвесторская цена опциона равна $C(f, \alpha, A) = C(f) - aA$. Заметим, что на множестве $\{\tau^* > t\}$

$$P^r\{L_{\tau^*} < \lambda(\alpha) \mid \mathcal{F}_t\} = P^r\{X_{\tau^*} < \vartheta_\alpha \mid \mathcal{F}_t\} = G\left(a - W_t^r, b, \frac{\vartheta_\alpha - a}{b} - t\right)$$

(мы использовали здесь равенство (11)), где $W_t^r = X_t - rt/\sigma$ — стандартный винеровский процесс. Применяя формулу Ито, находим, что искомая поправка к хеджу γ_t^* (см. (7) и (8)) равна

$$\varphi_t = -\frac{B_t}{S_t \sigma} \partial_y G\left(y, b, \frac{\vartheta_\alpha - a}{b} - t\right) \Big|_{y=a-W_t^r}.$$

Автор выражает признательность В. И. Аркину, Ю. М. Кабанову, Н. Кордзая, Д. О. Крамкову, А. В. Мельникову, О. Русакову, М. Rutkovski, С. Смирнову и А. Н. Ширяеву за полезное обсуждение постановки и результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. М.: Физматлит, 1994.
2. Мельников А. В., Новиков А. А. Последовательные выводы с гарантированной точностью для семимартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 3, с. 480–494.
3. Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. К расчету опционов американского и европейского типов, I. Дискретное время. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 14–60.
4. Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. К расчету опционов американского и европейского типов, II. Непрерывное время. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 61–95.
5. Heath D. Устное сообщение. Cairns, Австралия, сентябрь, 1997.
6. Крамков Д. О. Доклад на семинаре в Математическом институте РАН, 1995.

Поступила в редакцию
26.V.1997

© 1998 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РЯДА КРАМЕРА¹⁾

В работе приведена формула для коэффициентов ряда Крамера, возникающего в теоремах о больших отклонениях. Как следствие получены некоторые оценки этих коэффициентов.

Ключевые слова и фразы: ряд Крамера, семинварианты, большие отклонения.

1. Результаты. Рассмотрим случайную величину X с нулевым средним, единичной дисперсией и производящей функцией $\varphi(h) = E e^{hX}$.

Если $\varphi(h)$ конечна в некоторой окрестности нуля, то

$$\ln \varphi(h) = \sum_{k \geq 2} \frac{\gamma_k}{k!} h^k, \quad m(h) = (\ln \varphi(h))' = \sum_{k \geq 1} \frac{\gamma_{k+1}}{k!} h^k, \quad (1)$$

где $\gamma_\nu = \Gamma_\nu(X)$ — семинвариант порядка ν ($\gamma_2 = DX = 1$, $\gamma_3 = EX^3, \dots$).

Заметим, что если случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы, а B_n — постоянная, то

$$\Gamma_\nu \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{B_n} \right) = B_n^{-\nu} \sum_{i=1}^n \Gamma_\nu(X_i). \quad (2)$$

Назовем *рядом Крамера* функцию $\lambda(x) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k x^{k+3}$, полученную из равенства

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} x^2 - hx + \ln \varphi(h), \quad (3)$$

*С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00547.