Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, О коэффициентах ряда Крамера, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 161–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp886>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:40:12

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. М.: Физматлит, 1994.
2. Мельников А. В., Новиков А. А. Последовательные выводы с гарантированной точностью для семимартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 3, с. 480–494.
3. Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. К расчету опционов американского и европейского типов, I. Дискретное время. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 14–60.
4. Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. К расчету опционов американского и европейского типов, II. Непрерывное время. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 61–95.
5. Heath D. Устное сообщение. Cairns, Австралия, сентябрь, 1997.
6. Крамков Д. О. Доклад на семинаре в Математическом институте РАН, 1995.

Поступила в редакцию
26.V.1997

© 1998 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РЯДА КРАМЕРА¹⁾

В работе приведена формула для коэффициентов ряда Крамера, возникающего в теоремах о больших отклонениях. Как следствие получены некоторые оценки этих коэффициентов.

Ключевые слова и фразы: ряд Крамера, семинварианты, большие отклонения.

1. Результаты. Рассмотрим случайную величину X с нулевым средним, единичной дисперсией и производящей функцией $\varphi(h) = E e^{hX}$.

Если $\varphi(h)$ конечна в некоторой окрестности нуля, то

$$\ln \varphi(h) = \sum_{k \geq 2} \frac{\gamma_k}{k!} h^k, \quad m(h) = (\ln \varphi(h))' = \sum_{k \geq 1} \frac{\gamma_{k+1}}{k!} h^k, \quad (1)$$

где $\gamma_\nu = \Gamma_\nu(X)$ — семинвариант порядка ν ($\gamma_2 = DX = 1$, $\gamma_3 = EX^3, \dots$).

Заметим, что если случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы, а B_n — постоянная, то

$$\Gamma_\nu \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{B_n} \right) = B_n^{-\nu} \sum_{i=1}^n \Gamma_\nu(X_i). \quad (2)$$

Назовем *рядом Крамера* функцию $\lambda(x) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k x^{k+3}$, полученную из равенства

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} x^2 - hx + \ln \varphi(h), \quad (3)$$

*С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00547.

в котором функция $h = h(x)$ является решением уравнения

$$m(h) = x, \quad (4)$$

и, в свою очередь, представима в виде ряда

$$h = x + \sum_{k \geq 2} a_k x^k. \quad (5)$$

Дифференцируя равенство (3) по x и привлекая соотношения (1), (4), (5), получим формулу

$$\lambda_k = -\frac{a_{k+2}}{k+3}, \quad k \geq 0. \quad (6)$$

Несмотря на то, что такое понятие как ряд Крамера известно более шестидесяти лет (см. [1]) и весьма часто фигурирует в вероятностной литературе и научных статьях (ограничимся упоминанием монографий [2] и [3]), автор нигде не обнаружил, к своему удивлению, формул для коэффициентов λ_k , $k = 0, 1, \dots$, *напрямую* связывающих эти коэффициенты с семинвариантами $\gamma_2, \dots, \gamma_{k+3}$. Основной целью заметки является ликвидация этого пробела и, как следствие, получение более точных и общих оценок коэффициентов ряда Крамера с последующим их применением для уточнения некоторых постоянных в теоремах для больших отклонений.

Предложение. При $l \geq 0$

$$\lambda_l = \lambda_l(X) = \frac{1}{(l+3)!} \sum (l+s+1)! (-1)^{s+1} \prod_{m=1}^{l+1} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+1)!} \right)^{k_m}, \quad (7)$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным решениям $(k_1, \dots, k_{l+1})$ уравнения $1 \cdot k_1 + \dots + (l+1) k_{l+1} = l+1$, $a, s = k_1 + \dots + k_{l+1}$.

Таким образом (напоминаем, что $\gamma_1 = EX = 0$, $\gamma_2 = 1$),

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{6} \gamma_3, & \lambda_1 &= \frac{1}{24} (\gamma_4 - 3 \gamma_3^2), & \lambda_2 &= \frac{1}{120} (\gamma_5 - 10 \gamma_4 \gamma_3 + 15 \gamma_3^3), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{720} (\gamma_6 - 15 \gamma_5 \gamma_3 - 10 \gamma_4^2 + 105 \gamma_4 \gamma_3^2 - 105 \gamma_3^4), \dots \end{aligned}$$

Отметим, что если случайная величина X имеет симметричное распределение, то при $l \geq 0$ из (7) следует, что $\lambda_{2l} = 0$, а

$$\lambda_{2l+1} = \frac{1}{(2l+4)!} \sum (2l+s+2)! (-1)^{s+1} \prod_{m=1}^{l+1} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\gamma_{2m+2}}{(2m+1)!} \right)^{k_m}.$$

В частности, $\lambda_5 = \frac{1}{8!} (\gamma_8 - 56 \gamma_6 \gamma_4 + 280 \gamma_4^3)$, $\lambda_7 = \frac{1}{10!} (\gamma_{10} - 120 \gamma_8 \gamma_4 - 126 \gamma_6^2 + 4640 \gamma_6 \gamma_4^2 + 15400 \gamma_4^4)$.

Следствие. Пусть $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 1$, — независимые случайные величины с нулевыми средними и конечными дисперсиями; $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $B_n^2 = DS_n$, $Z_n = S_n/B_n$; $L_{k,n} = B_n^{-k} \sum_{l=1}^n E|X_l|^k$, $k \geq 2$.

Если $L_{l+3,n} < \infty$ ($l \geq 0$), то

$$|\lambda_l(Z_n)| \leq \frac{4^l}{(l+2)(l+3)} L_{l+3,n}. \quad (8)$$

Из (8), в частности, следует, что если $|X_k| \leq \lambda_n B_n$ для $l = 1, \dots, n$, то

$$|\lambda_l(Z_n)| \leq \frac{4^l}{(l+2)(l+3)} \lambda_n^{l+1}.$$

Последнее неравенство позволяет заметно улучшить оценку

$$|\lambda_l(Z_n)| \leq \frac{1}{16} (12 \lambda_n)^{l+1},$$

полученную в аналогичной ситуации в [4], [5] (см. также [2, гл. VIII, дополнения, п. 11]).

2. Доказательства. Представим уравнение (4) в виде $h\overline{m}(h) = x$, где (см. (1))

$$\overline{m}(h) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\gamma_{k+2}}{(k+1)!} h^k.$$

Воспользовавшись формулой Лагранжа для обращения степенных рядов [6, гл. 12, § 4], получим следующее представление для коэффициентов a_k в разложении (5) функции h :

$$a_k = \frac{1}{k!} \left(\left(\frac{1}{\overline{m}(u)} \right)^k \right)_{u=0}^{(k-1)}, \quad k = 2, \dots \quad (9)$$

Привлекая для нахождения производных функции $(1/\overline{m}(u))^k$ лемму 1 из [1, гл. V] (при $y = \overline{m}(x)$, $z = y^{-k}$, $\nu = k-1$) и принимая в расчет то, что

$$\left(\overline{m}(u) \right)_{u=0}^{(s)} = \frac{\gamma_{s+2}}{s+1},$$

найдем

$$a_l = \frac{1}{l!} \sum (l+s-1)! (-1)^s \prod_{m=1}^{l-1} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+1)!} \right)^{k_m}, \quad (10)$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным решениям $(k_1, \dots, k_{l-1})$ уравнения $k_1 + \dots + (l-1)k_{l-1} = l-1$, а $s = k_1 + \dots + k_{l-1}$.

Отсюда и из (6) следует равенство (7). Предложение доказано.

Для проверки оценки (8) нам понадобятся следующие утверждения, представляющие некоторый самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть $\beta_k = \mathbb{E}|X|^k < \infty$, $k \geq 5$. Тогда

$$|\gamma_k| \leq \beta_k + \beta_2 \beta_{k-2} (a \lambda^{k-2} (k-1)! - 1) \leq a \lambda^{k-2} (k-1)! \beta_k, \quad (11)$$

где $\lambda = 0.87245 \dots$ — решение уравнения $e^{1/\lambda} - 1/\lambda = 2$ и

$$a = \frac{1}{2\lambda} \max \left(1, \frac{|\gamma_5|}{12\lambda^2 \beta_5} \right).$$

Следствие 1. Если $\beta_k < \infty$ ($k \geq 3$), то

$$|\gamma_k| \leq a \lambda^{k-2} (k-1)! \beta_k, \quad (12)$$

где $a = 11/(24\lambda^3) = 0.69016 \dots$

Доказательство леммы 1. Воспользуемся известным соотношением, связывающим моменты $\mathbb{E}X^l$ и семинварианты:

$$\gamma_{k+1} = \alpha_{k+1} - \sum_{l=2}^{k-1} C_k^l \alpha_l \gamma_{k+1-l} \quad (13)$$

((13) легко получить, формально дифференцируя k раз тождество (см. (1)) $\varphi(h) (\ln \varphi(h))' = \varphi'(h)$ и учитывая, что $\alpha_1 = \gamma_1 = \mathbb{E}X = 0$). Имеем: $\gamma_2 = \alpha_2$,

$\gamma_3 = \alpha_3$, $\gamma_4 = \alpha_4 - 3\alpha_2^2$, $\gamma_5 = \alpha_5 - 10\alpha_2\alpha_3$, $\gamma_6 = \alpha_6 - 15\alpha_2\alpha_4 + 30\alpha_2^3 - 10\alpha_3^2$, откуда (с учетом хорошо известных неравенств $\alpha_2^2 \leq \alpha_4$, $\alpha_3^2 \leq \alpha_2\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_4 \leq \alpha_6$)

$$\begin{aligned} |\gamma_3| &\leq \beta_3, \quad |\gamma_4| \leq 2\beta_4, \quad |\gamma_5| \leq 11\beta_5, \\ |\gamma_6| &\leq \max\left(\alpha_6 + 15\alpha_2^3 - 15\alpha_2(\alpha_4 - \alpha_2^2), 10\alpha_2^3 + 15\alpha_2\alpha_4 - \alpha_6\right) \\ &\leq \alpha_6 + \max(15\alpha_2^3 - 15\alpha_2\alpha_4 - 2\alpha_6) \leq \beta_6 + 23\beta_2\beta_4 \leq 24\beta_6. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что из (14) вытекает оценка (11) при $k = 5$ и 6 .

Неравенство (10) для $k > 6$ будем доказывать по индукции. Из (13), (14), неравенств $\beta_l\beta_{k+1-l} \leq \beta_2\beta_{k-1}$, $2 \leq l \leq k-1$, и индукционного предположения следует, что

$$\begin{aligned} |\gamma_{k+1}| &\leq \beta_{k+1} + k!\beta_2\beta_{k-1} \left(a\lambda^{k-1} \sum_{l=2}^{k-4} \frac{\lambda^{-l}}{l!} + \frac{2}{3!(k-3)!} + \frac{1}{2!(k-2)!} + \frac{1}{(k-1)!} \right) \\ &= \beta_{k+1} + (a\lambda^{k-1}k! - 1)\beta_2\beta_{k-1} - L\beta_2\beta_{k-1}, \end{aligned}$$

где

$$L = \sum_{l \geq k-3} \frac{\lambda^{k-l-1}k!}{l!} - 1 - k - C_k^2 - 2C_k^3$$

(напомним, что $\sum_{l \geq 2} \lambda^{-l}/l! = e^{1/\lambda} - 1/\lambda - 1 = 1$).

Имеем: $L > \lambda^{-1}a - 1 + k(a-1) + C_k^2(2a\lambda - 1) + C_k^3(6a\lambda^2 - 2) > 0$.

Индукционный переход, таким образом, осуществлен, и лемма 1 доказана.

Оценка (12) вытекает из (1) и (14).

Лемма 2. Пусть $a \in (0, 2)$, целое $l \geq 75/\alpha(\frac{2}{3} - \alpha^2)$, где $\alpha = \sqrt{a/(1+a)}$.

Если

$$|\gamma_k| \leq a(k-1)!c^{k-2}, \quad 3 \leq k \leq l+1, \quad (15)$$

то (с.м. (5))

$$|a_l| < \frac{1}{2\pi l\sqrt{c}} \left(c \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^{l-0.5} \quad (16)$$

Отметим, что ограничение снизу на l не претендует на оптимальность.

Доказательство. По (10) и (15)

$$|a_l| \leq \frac{c^{l-1}}{l} \sum_{s=1}^{l-1} C_{l+s-1}^s a^s v_s, \quad (17)$$

где $v_s = s! \sum \prod_{m=1}^{l-1} (k_m!)^{-1}$, причем суммирование производится по $(k_1, \dots, k_{l-1})$, удовлетворяющим равенствам $1 \cdot k_1 + \dots + (l-1)k_{l-1} = l-1$, $s = k_1 + \dots + k_{l-1}$.

Покажем, что $v_s \leq C_{l-2}^{s-1}$. Чтобы добиться этой цели, достаточно сравнить коэффициенты при λ^{l-s-1} , $\lambda \in (0, 1)$, в разложениях функций $(1 + \dots + \lambda^{l-2})^s$ и $(1/(1-\lambda))^s$, учитывая, что первая мажорируется второй. Итак,

$$\sum_{s=1}^{l-1} C_{l+s-1}^s a^s v_s \leq \sum_{s=1}^{l-1} C_{l+s-1}^s C_{l-2}^{s-1} a^s \leq \max_{1 \leq s \leq l} u_s, \quad (18)$$

где $u_s = a^s(l+s-1)!/(s!(s-1)!(l-s-1)!)$.

Анализируя поведение отношения u_{s+1}/u_s , легко убедиться в том, что u_s достигает наибольшего значения, если переменная s равна целой части s_* , $s_* = 0.5 +$

$\sqrt{\alpha^2 l^2 - \alpha^2 l + 0.25}$, $\alpha = \sqrt{a/(1+a)}$. Заметим, что $s_* = \alpha l + (1-\alpha)/2 + \theta(8\alpha l)^{-1}$, $0 < \theta < 1$, и, следовательно,

$$\left| \frac{s}{l} - \alpha \right| \leq l^{-1}, \quad \text{если } l \geq (4\alpha(1+\alpha))^{-1}. \quad (19)$$

Изучим (при этом s) поведение функции $\ln u_s$. Нам понадобится следующий вариант формулы Стирлинга (см. [7, гл. 2, § 9]):

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi} + (n+0.5) \ln n - n + (12n)^{-1} - \theta(12n)^{-2}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (20)$$

Рассмотрим равенство

$$\ln u_s = \ln(l+s)! - 2 \ln s! - \ln(l-s)! + s \ln a + \ln \frac{(l-s)s}{l+s}.$$

Пусть $(\alpha l)^{-1} \leq \varepsilon < 1$. Применяя к логарифмам факториалов формулу (20) и используя (19), придем к соотношению

$$\begin{aligned} \ln u_s &= f_1(s) + f_2(s) + f_3(s) + \theta_0 l^{-2}, \\ |\theta_0| &< \max_{|\xi-1| \leq \varepsilon} \left(\frac{2}{(\alpha \xi)^2} + \frac{1}{(1-\alpha \xi)^2} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(s) &= -\ln 2\pi + s \ln a + (l+s) \ln(l+s) - 2s \ln s - (l-s) \ln(l-s), \\ f_2(s) &= \frac{1}{2} (\ln(l-s) - \ln(l+s)), \quad f_3(s) = \frac{1}{12(l+s)} - \frac{1}{6s} - \frac{1}{12(l-s)}. \end{aligned}$$

Разложив функции $f_i(s)$ по степеням $\delta = s - \alpha l$, получим с учетом (19):

$$\begin{aligned} f_1(s) &= l\tau_0 - \ln 2\pi - \tau_1 \delta^2 l^{-1} + \theta_1 l^{-2}, \\ f_2(s) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \tau_2 \delta l^{-1} + \theta_2 l^{-2}, \\ f_3(s) &= -\tau_3 l^{-1} + \theta_3 l^{-2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \alpha \ln a + (l+\alpha) \ln(l+\alpha) - 2\alpha \ln \alpha - (l-\alpha) \ln(l-\alpha) = \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \\ \tau_1 &= (\alpha(l-\alpha^2))^{-1}, \quad \tau_2 = \alpha \tau_1, \quad \tau_3 = \tau_1/6, \\ |\theta_1| &\leq \frac{1}{3} \max_{|\xi-\alpha| \leq \varepsilon \alpha} \frac{|1-3\xi^2|}{\xi^2(1-\xi^2)^2}; \\ |\theta_2| &\leq \max_{|\xi-\alpha| \leq \varepsilon \alpha} \frac{\xi}{(1-\xi^2)^2}; \\ |\theta_3| &\leq \frac{1}{6} \max_{|\xi-\alpha| \leq \varepsilon \alpha} \frac{|1-3\xi^2|}{\xi^2(1-\xi^2)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{105}$. Учитывая, что $\min_{\delta} (\tau_1 \delta^2 + \tau_2 \delta + \tau_3) \geq (\frac{2}{3} - \alpha^2)/(4\alpha(1-\alpha^2))$, а по условию l достаточно велико, из (21)–(23) получим оценку $\ln u_s < -\ln 2\pi + (l-0.5) \ln((1+\alpha)/(1-\alpha))$. Отсюда и из (18), (17) следует (16). Лемма 2 доказана.

Следствие 2. В условиях следствия 1 (см. (11), (12)) при $l \geq 2$

$$|a_l| < \frac{1}{2\pi l \sqrt{\lambda}} \tau^{l-0.5} \beta_{l+1}, \quad (24)$$

где $\tau = \lambda(1 + 2a + 2\sqrt{a(1+a)}) = 3.961 \dots$;

$$|a_l| < \frac{1}{l} 4^{l-2} \beta_{l+1}. \quad (25)$$

Оценка (24) в случае $l > 290$ вытекает из (12) и леммы 2 при $a = \frac{11}{24} \lambda^{-3}$, $c = \lambda(\beta_{l+1})^{1/(l+1)}$ (напомним, что $\beta_2 = DX = 1$). Если же $l \leq 290$, то (24) проверяется по (17), (18) прямыми вычислениями. Что касается оценки (25), то при $l \geq 33$ она вытекает из (24), при $3 \leq l \leq 32$, так же как и (24), проверяется с использованием неравенств (17), (18), а при $l = 2$ имеет место, поскольку $|a_2| = \frac{1}{2} |\alpha_3|$.

Оценку (8) несложно получить так же, как (25), имея в виду (2), (12), формулу $L_{k+2} \leq (L_{l+2})^{k/l}$ и, разумеется, (6).

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Я. Ю. Никитину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cramér H. Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités. — Actualités Sci. Indust. (Paris: Hermann), 1938, № 736.
2. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
3. Саулус Л., Статулявичус В. Предельные теоремы о больших отклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989, 205 с.
4. Feller W. Generalization of a probability limit theorem of Cramer. — Trans. Amer. Math. Soc., 1942, v. 54, p. 361–372.
5. Lenart C. On certain theorem of Berry and a limit theorem of Feller. — Matematyčeský časopis, 1968, v. 18, № 1, p. 59–75.
6. Физтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962, 808 с.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 527 с.

Поступила в редакцию
12.V.1997

© 1998 г.

САВЧЕНКО С. В.*

О ВЕРОЯТНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СЛУЧАЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ВОЗМУЩЕННОГО КОМПАКТНЫМ ОПЕРАТОРОМ¹⁾

В работе рассматривается следующая задача: при каких условиях на спектр оператора $H_d + W$, где H_d — разностный оператор Лапласа в $l_2(\mathbb{Z}^d)$ и W — дискретный потенциал (ограниченный диагональный оператор), полный гамильтониан $H_d + W + V(\omega)$ со случайным потенциалом $V(\omega)$ имеет

*Работа выполнена при поддержке RFBR (грант INTAS-RFBR 95-418).

¹⁾142432, Черноголовка, Московская обл., Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН Россия.