Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Рохлин, Задача о мартингальном выборе в случае конечного дискретного времени, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 480–500

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp90>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:19:26

© 2005 г.

РОХЛИН Д. Б.*

ЗАДАЧА О МАРТИНГАЛЬНОМ ВЫБОРЕ В
СЛУЧАЕ КОНЕЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

Для многозначного случайного процесса с открытыми выпуклыми значениями, заданного на фильтрованном вероятностном пространстве, получен критерий существования согласованной с фильтрацией последовательности селекторов, которую можно превратить в мартингал путем эквивалентной замены меры. Данный критерий носит геометрический характер и выражен в терминах носителей регулярных условных верхних распределений элементов многозначного процесса.

Ключевые слова и фразы: мартингальные меры, многозначные отображения, измеримый выбор, носители регулярных условных распределений, представление Кастэна.

Введение. Пусть на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N, \mathbf{P})$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$, задана последовательность $\mathcal{F}_n$ -измеримых многозначных отображений $\omega \mapsto G_n(\omega) \subset \mathbf{R}^d$, $n = 0, 1, \dots, N$, с непустыми открытыми выпуклыми значениями (определение измеримости многозначного отображения приводится ниже). Цель настоящей работы состоит в получении критерия существования следующей пары: согласованного с фильтрацией $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ однозначного d -мерного случайного процесса $(S_n)_{n=0}^N$, $S_n(\omega) \in G_n(\omega)$, и эквивалентной $\mathbf{P}$ вероятностной меры $\mathbf{Q}$, относительно которой S является мартингалом. Если такая пара существует, то будем говорить, что разрешима задача о мартингальном выборе.

Если, отказавшись от условия открытости, предположить, что отображения G_n являются однозначными, то получим известную задачу о существовании эквивалентной мартингальной меры для заданного случайного процесса $S_n = G_n$. Эта проблема играет важную роль в финансовой математике, где предполагается, что процесс S описывает динамику цен активов, и существование эквивалентной мартингальной меры является критерием безарбитражности рынка (см., например, [1]–[4]).

* Ростовский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Зорге, 5, 344090 Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: rokhlin@math.rsu.ru

В работе [3] получен геометрический критерий существования эквивалентной мартингальной меры для S , состоящий в том, что выпуклые оболочки носителей регулярных условных распределений элементов $S_n - S_{n-1}$ относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$ должны содержать начало координат в качестве относительно внутренней точки. Критерий настоящей работы в идейном плане является обобщением данного результата.

Заметим, что при наличии операционных издержек критерий безарбитражности состоит в наличии следующей пары: случайного процесса, расположенного между ценами покупки и продажи, и соответствующей эквивалентной мартингальной меры [5]. Далее, если $\lambda x \in G_n(\omega)$ для любых $\lambda > 0$, $x \in G_n(\omega)$, то разрешимость задачи о мартингальном выборе эквивалентна существованию $\mathbf{P}$ -мартингала Y , удовлетворяющего условию $Y_n \in G_n$. Действительно, если пара $S, \mathbf{Q}$ является решением задачи о мартингальном выборе, то положим $Y_n = z_n S_n$, где z_n — процесс плотности меры $\mathbf{Q}$ относительно $\mathbf{P}$:

$$z_N = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}, \quad z_{n-1} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(z_n | \mathcal{F}_{n-1}), \quad 1 \leq n \leq N.$$

Тогда по формуле Байеса [4, гл. V, § 3а, п. 3]

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(z_n S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = z_{n-1} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = z_{n-1} S_{n-1} = Y_{n-1}.$$

В рамках моделей операционных издержек, предложенных в работах [6]–[8], при соответствующем выборе множеств G_n существование указанного $\mathbf{P}$ -мартингала Y является критерием безарбитражности рынка.

Эти результаты и служат основной мотивировкой данной работы. Однако дальнейшие рассуждения не связаны непосредственно с финансовой проблематикой.

В п. 1 приводится ряд сведений, необходимых для формулировки и доказательства основной теоремы, которая сформулирована в п. 2 (теорема 1). Следующие два пункта посвящены ее доказательству. Наконец, в п. 5 рассматривается случай конечного вероятностного пространства. При этом удается снять условие открытости множеств $G_n(\omega)$, а доказательство аналога основной теоремы становится элементарным.

Отметим также, что лемма 3 представляет некоторый самостоятельный интерес.

1. Необходимые сведения из теории измеримых многозначных отображений. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и некоторую σ -алгебру $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Далее предполагается, что все рассматриваемые σ -алгебры являются полными относительно меры $\mathbf{P}$ (т.е. содержат все подмножества своих множеств $\mathbf{P}$ -нулевой меры).

Многозначное отображение F , относящее каждому $\omega \in \Omega$ некоторое подмножество $F(\omega) \subset \mathbf{R}^d$, называется $\mathcal{H}$ -измеримым, если $\{\omega: F(\omega) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{H}$ для любого открытого множества $V \subset \mathbf{R}^d$. Отображение F называется замкнутым (выпуклым, открытым), если множества $F(\omega)$ замкнуты (выпуклы, открыты). График и эффективное множество F определяются следующим образом:

$$\text{gr } F = \{(\omega, x): x \in F(\omega)\}, \quad \text{dom } F = \{\omega: F(\omega) \neq \emptyset\}.$$

Обозначим через cl , int , ri , conv замыкание, внутренность, относительную внутренность и выпуклую оболочку подмножества конечномерного пространства. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ — σ -алгебра борелевских подмножеств $\mathbf{R}^d$.

Функция $\xi: \Omega \mapsto \mathbf{R}^d$ называется селектором F , если $\xi(\omega) \in F(\omega)$ для всех $\omega \in \text{dom } F$. Множество $\mathcal{H} \mid \mathcal{B}$ -измеримых селекторов F обозначим через $\mathcal{S}(F, \mathcal{H})$. Следуя [9], для элементов множества $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d, \mathcal{H})$ будем использовать запись $\xi \in \mathcal{H} \mid \mathcal{B}$.

В приводимых ниже предложениях собраны некоторые свойства измеримых многозначных отображений, используемые в дальнейшем.

Предложение 1. Для $\mathcal{H}$ -измеримости замкнутого многозначного отображения F необходимо и достаточно, чтобы существовало такое счетное множество $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$, $\xi_i \in \mathcal{S}(F, \mathcal{H})$, что множества $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$ плотны в $F(\omega)$ при каждом $\omega \in \text{dom } F$.

Доказательство предложения 1 имеется, например, в [10, теорема 5.6], [11, с. 331]. Семейство $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ будем называть представлением Кастэна (C. Castaing) для F .

Предложение 2. Пусть $\text{gr } F \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$, тогда $\mathcal{S}(F, \mathcal{H}) \neq \emptyset$.

Данный результат также хорошо известен: см., например, [12, теорема 1], [13, с. 56].

Предложение 3. Справедливы следующие утверждения.

(а) Многозначное отображение F является $\mathcal{H}$ -измеримым тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ -измеримо $\text{cl } F$.

(б) Если многозначные отображения F_i , $i \in \mathbf{N}$, являются $\mathcal{H}$ -измеримыми, то отображение $\bigcup_{i=1}^\infty F_i$ также $\mathcal{H}$ -измеримо.

(с) Если $\text{gr } F \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$, то F — $\mathcal{H}$ -измеримо. Если F — $\mathcal{H}$ -измеримо, то $\text{gr}(\text{cl } F) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$.

(д) Если F — $\mathcal{H}$ -измеримо, то отображение $\text{conv } F$ также является $\mathcal{H}$ -измеримым.

(е) Если F — $\mathcal{H}$ -измеримо и выпукло, то $\text{gr}(\text{ri } F) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$, $\text{gr}(\text{int } F) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$.

(ф) Если F_1 и F_2 — $\mathcal{H}$ -измеримы и F_1 открыто и выпукло, то $\text{gr}(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$.

Утверждения (а) и (б) очевидны, (с) содержится в [10] (теоремы 3.4, 3.3). Доказательство измеримости $\text{con} F$, приведенное в [14, лемма 1], является небольшой модификацией рассуждений [10, теорема 9.1], где рассматривались замкнутые отображения. Первая часть утверждения (е) доказана в [14, лемма 1]. Вторая часть данного утверждения следует из представления $\text{int } F = \text{cl } F \setminus \partial(\text{cl } F)$, поскольку измеримость графика границы $\partial(\text{cl } F)$ измеримого замкнутого отображения $\text{cl } F$ вытекает из теоремы 4.6 (ii) работы [10]. Наконец, справедливость (f) является следствием равенства $F_1 \cap F_2 = F_1 \cap (\text{cl } F_2)$ и пп. (с) и (е).

Пусть $B_\varepsilon(x) \subset \mathbf{R}^d$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке $x \in \mathbf{R}^d$. Далее будет использоваться следующий известный результат (см. [15, с. 338]): отображение $\omega \mapsto B_{\delta(\omega)}(\xi(\omega)) \subset \mathbf{R}^d$ (измеримая трубка) является $\mathcal{H}$ -измеримым, если δ — положительная $\mathcal{H}$ -измеримая случайная величина и $\xi \in \mathcal{H}|\mathcal{B}$.

Если многозначное отображение F замкнуто и $\text{dom } G = \Omega$, то можно считать, что F является однозначным отображением Ω в множество $\text{CL} = \text{CL}(\mathbf{R}^d)$ замкнутых непустых подмножеств $\mathbf{R}^d$. Через $\mathcal{E}(\text{CL})$ обозначим σ -алгебру Эффроса (E. Effros) [16], [17], порожденную множествами

$$A_V = \{D \in \text{CL}: D \cap V \neq \emptyset\},$$

где V — открытое множество $\mathbf{R}^d$. Тогда измеримость F в смысле приведенного выше определения означает $\mathcal{H}|\mathcal{E}(\text{CL})$ -измеримость соответствующего однозначного отображения $F: \Omega \mapsto \text{CL}$.

Обозначим через $\rho(x, y) = |x - y|$ расстояние между точками $x, y \in \mathbf{R}^d$ и положим

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y), \quad A \subset \mathbf{R}^d.$$

Топологией Вейсмана (R. Wijsman) τ_W на CL называется слабейшая топология, в которой все функции $\{\rho(x, \cdot), x \in \mathbf{R}^d\}$ непрерывны. Известно, что (CL, τ_W) является польским пространством (т.е. сепарабельным пространством, на котором существует полная метрика, совместимая с рассматриваемой топологией) [16], [18] и борелевская σ -алгебра топологии τ_W совпадает с σ -алгеброй Эффроса [19], [20]. Отсюда следует, что $\mathcal{F}$ -измеримое многозначное отображение F , рассматриваемое как случайный элемент со значениями в измеримом пространстве $(\text{CL}, \mathcal{E}(\text{CL}))$, обладает регулярным условным распределением относительно $\mathcal{H}$ [21, гл. 2, § 7, п. 7].

Таким образом, существует функция $\mathbf{P}^*: \Omega \times \mathcal{E}(\text{CL}) \mapsto \mathbf{R}$ со следующими свойствами:

(i) для каждого ω функция $C \mapsto \mathbf{P}^*(\omega, C)$ является вероятностной мерой на $\mathcal{E}(\text{CL})$;

(ii) для каждого $C \in \mathcal{E}(\text{CL})$ функция $\omega \mapsto \mathbf{P}^*(\omega, C)$ п.н. совпадает с $\mathbf{P}(\{F \in C\} | \mathcal{H})(\omega)$.

На открытых множествах $V \subset \mathbf{R}^d$ определим *регулярное условное верхнее распределение* $\mu_F(\omega, V) = \mathbf{P}^*(\omega, A_V)$. Данная терминология (upper probabilities) соответствует работе [22], поскольку

$$\mu_F(\omega, V) = \mathbf{P}(\{F \cap V \neq \emptyset\} | \mathcal{H})(\omega) \quad \text{п.н.}$$

Если F — однозначное отображение, то μ_F — регулярное условное распределение F относительно $\mathcal{H}$.

Функция $V \mapsto \mu_F(\omega, V)$ обладает свойством счетной субаддитивности. Действительно, пусть $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, где V_i открыты, тогда

$$\mu_F(\omega, V) = \mathbf{P}^*(\omega, A_V) = \mathbf{P}^*\left(\omega, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{V_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}^*(\omega, A_{V_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F(\omega, V_i).$$

Носителем регулярного условного верхнего распределения отображения F относительно $\mathcal{H}$ назовем множество

$$K_F(\omega) = \left\{x \in \mathbf{R}^d: \mu_F(\omega, B_\varepsilon(x)) > 0, \forall \varepsilon > 0\right\}.$$

Предложение 4. Пусть F, F' — $\mathcal{F}$ -измеримые многозначные отображения с непустыми замкнутыми значениями и $F = F'$ п.н. Тогда

(а) многозначное отображение K_F является $\mathcal{H}$ -измеримым, замкнутым и $\text{dom } K_F = \Omega$;

(б) $K_F = K_{F'}$ п.н.

Доказательство. (а) Покажем, что для любого открытого множества $V \subset \mathbf{R}^d$ выполняется соотношение

$$\{\omega: K_F(\omega) \cap V \neq \emptyset\} = \{\omega: \mu_F(\omega, V) > 0\}. \quad (1.1)$$

Если $K_F(\omega) \cap V \neq \emptyset$, то для любого $x \in K_F(\omega) \cap V$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset V$ и $\mu_F(\omega, V) \geq \mu_F(\omega, B_\varepsilon(x)) > 0$. Если $K_F(\omega) \cap V = \emptyset$, то V можно представить в виде объединения открытых шаров $B_{\varepsilon(x)}(x)$ таких, что $\mu_F(\omega, B_{\varepsilon(x)}(x)) = 0$. Пользуясь тем, что $\mathbf{R}^d$ обладает счетной базой, выделим из этого покрытия счетное подпокрытие $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\varepsilon_i}(x_i)$, $\varepsilon_i = \varepsilon(x_i)$ (см. [23, с. 25]). По свойству счетной субаддитивности отсюда следует, что $\mu_F(\omega, V) = 0$.

Из соотношения (1.1) и $\mathcal{H}$ -измеримости функции $\omega \mapsto \mu_F(\omega, V)$ следует, что многозначное отображение $\omega \mapsto K_F(\omega)$ является $\mathcal{H}$ -измеримым. Кроме того, значения K_F замкнуты: если $x \notin K_F(\omega)$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $\mu_F(\omega, B_\varepsilon(x)) = 0$ и $B_\varepsilon(x) \cap K_F(\omega) = \emptyset$. Очевидно также, что $K_F(\omega) \neq \emptyset$ для всех ω .

(b) Заметим, что $\mu_F(\omega, V) = \mu_{F'}(\omega, V)$ п.н. для любого открытого множества V . Поэтому существует такое множество Ω^* , $\mathbf{P}(\Omega^*) = 1$, что данное равенство выполнено при всех $\omega \in \Omega^*$ и всех V из счетной базы открытых множеств пространства $\mathbf{R}^d$. Отсюда следует, что $K_F(\omega) = K_{F'}(\omega)$, $\omega \in \Omega^*$. Предложение доказано.

Пусть $\text{gr } F \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$ и $\xi \in \mathcal{F} | \mathcal{B}$. Далее будет использоваться следующая полезная формула (см. [14, лемма 3]):

$$\mathbf{P}(\{\xi \in F\} | \mathcal{H})(\omega) = \mu_\xi(\omega, F(\omega)) \quad \text{п.н.} \quad (1.2)$$

Здесь и далее μ_ξ — регулярное условное распределение ξ относительно $\mathcal{H}$.

Известно (см. [15, с. 352]), что если F — замкнутое $\mathcal{H}$ -измеримое отображение и $\text{dom } F = \Omega$, то любой элемент $z \in \mathcal{S}(\text{conv } F, \mathcal{H})$ допускает представление

$$z = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k z_k, \quad z_k \in \mathcal{S}(F, \mathcal{H}), \quad (1.3)$$

где неотрицательные $\mathcal{H}$ -измеримые функции α_k удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k = 1$.

2. Формулировка основной теоремы. Если H_n — замкнутое $\mathcal{F}_n$ -измеримое многозначное отображение и $\mathbf{P}(\text{dom } H_n) = 1$, то через H_n^* обозначим его замкнутое продолжение на Ω :

$$H_n(\omega) = H_n^*(\omega), \quad \omega \in \text{dom } H_n; \quad H_n^*: \Omega \mapsto \text{CL}.$$

Конечно, такое продолжение неоднозначно: можно, например, положить

$$H_n^* = H_n I_{\text{dom } H_n} + \{0\} I_{\Omega \setminus \text{dom } H_n}.$$

Однако носители $K_{H_n^*}$ регулярных условных верхних распределений отображений H_n^* относительно $\mathcal{F}_{n-1}$, с точностью до множества меры нуль, совпадают для всех таких продолжений (предложение 4(b)). Далее продолжение H_n^* фиксируется произвольным образом.

Пусть теперь дана последовательность $\mathcal{F}_n$ -измеримых открытых выпуклых многозначных отображений $\omega \mapsto G_n(\omega) \subset \mathbf{R}^d$, $n = 0, 1, \dots, N$, с непустыми значениями. Введем последовательность H_n следующим образом. Пусть $H_N = \text{cl } G_N$. Далее, если H_n задано и $\mathbf{P}(\text{dom } H_n) = 1$, то H_{n-1} определим по формуле

$$H_{n-1} = \text{cl}(G_{n-1} \cap \text{conv } K_{H_n^*}). \quad (2.1)$$

Согласно предложениям 3 и 4(a), графики многозначных отображений $G_{n-1} \cap \text{conv } K_{H_n^*}$ принадлежат $\mathcal{F}_{n-1} \otimes \mathcal{B}$, и отображения (2.1) будут $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримыми.

Если же $\mathbf{P}(\text{dom } H_n) < 1$, то положим $H_{n-1} = \emptyset$. Конечно, в последнем случае окажется, что $H_k = \emptyset$ при всех $k < n$.

Ниже сформулирован критерий разрешимости поставленной задачи о мартингальном выборе.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(а) *существуют случайный процесс S и эквивалентная $\mathbf{P}$ вероятностная мера $\mathbf{Q}$ такие, что $S_n \in \mathcal{S}(G_n, \mathcal{F}_n)$ и S является $\mathbf{Q}$ -мартингалом;*

(b) $H_n(\omega) \neq \emptyset$ п.н., $n = 1, \dots, N$.

При доказательстве теоремы 1 будет использован полученный в работе [3] критерий существования эквивалентной мартингальной меры для произвольного d -мерного случайного процесса S , согласованного с фильтрацией. Его можно записать следующим образом:

$$S_{n-1}(\omega) \in \text{ri}(\text{conv } K_{S_n})(\omega) \quad \text{п.н.}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Здесь K_{S_n} — носитель регулярного условного распределения S_n относительно $\mathcal{F}_{n-1}$.

Заметим, что в отличие от (2.2), где накладываются ограничения лишь на соседние элементы S_{n-1} , S_n , условие (b) нелокально. Это связано с существом дела: задача о мартингальном выборе может быть разрешима для каждой пары G_n, G_{n+1} , но неразрешима для всего процесса. Так будет, например, если $\Omega = \{\omega\}$ — одноточечное множество, $d = 1$, $N = 2$, $G_0 = (0, 2)$, $G_1 = (1, 3)$, $G_2 = (2, 4)$. Действительно, в случае одноточечного вероятностного пространства разрешимость задачи о мартингальном выборе эквивалентна условию $\bigcap_{n=0}^N G_n \neq \emptyset$.

3. Некоторые свойства носителей регулярных условных распределений. В данном пункте предполагается, что $\text{dom } F = \Omega$. Как и выше, через K_F обозначается носитель регулярного условного верхнего распределения замкнутого отображения F относительно σ -алгебры $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Аналогичные обозначения используются и для носителей регулярных распределений однозначных отображений.

Лемма 1. *Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для замкнутого $\mathcal{F}$ -измеримого многозначного отображения F , тогда*

$$K_F(\omega) = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^\infty K_{\xi_i}(\omega) \right) \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Для любого открытого множества $V \subset \mathbf{R}^d$ имеем

$$C = \{\omega: F(\omega) \cap V \neq \emptyset\} = \bigcup_{i=1}^\infty \{\omega: \xi_i(\omega) \in V\}.$$

Пусть $C_k = \bigcup_{i=1}^k \{\omega: \xi_i(\omega) \in V\}$, тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_k \mid \mathcal{H})(\omega) = \mathbf{P}(C \mid \mathcal{H})(\omega) = \mu_F(\omega, V) \quad \text{п.н.}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}(C_k \mid \mathcal{H})(\omega) \leq \sum_{i=1}^k \mathbf{P}(\xi_i \in V \mid \mathcal{H})(\omega) = \sum_{i=1}^k \mu_{\xi_i}(\omega, V) \quad \text{п.н.}$$

и $\mathbf{P}(C_k \mid \mathcal{H})(\omega) \geq \mu_{\xi_j}(\omega, V)$ п.н. для любого $j \leq k$.

Из данных соотношений следует, что на множестве Ω' с $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, зависящем от V , верно следующее: $\mu_F(\omega, V) > 0$, если и только если существует такой номер i , что $\mu_{\xi_i}(\omega, V) > 0$. Очевидно, данное свойство можно считать выполненным на множестве Ω'' с $\mathbf{P}(\Omega'') = 1$ сразу для всех $V \in \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — счетная база $\mathbf{R}^d$.

Пусть $\omega \in \Omega''$. Если $x \notin K_F(\omega)$, то существует такое множество $V \in \mathcal{V}$, $x \in V$, что $\mu_F(\omega, V) = 0$. При этом $\mu_{\xi_i}(\omega, V) = 0$ для всех i и

$$V \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}(\omega) = \emptyset.$$

Следовательно, $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}(\omega)$ и $K_F(\omega) \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}(\omega)$.

Если $x \in K_F(\omega)$, то для любого множества $V \in \mathcal{V}$, содержащего x , имеем $\mu_F(\omega, V) > 0$ и существует номер i такой, что $\mu_{\xi_i}(\omega, V) > 0$. Таким образом, в любой открытой окрестности точки x имеются точки из $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}(\omega)$ и $K_F(\omega) \subset \text{cl}(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}(\omega))$. Лемма доказана.

Лемма 2. Для любого конечного или счетного набора множеств $A_i \in \mathcal{H}$, $i \in J \subset \mathbf{N}$, существует такой набор непустых множеств $D_i \in \mathcal{H}$, $D_i \subset A_i$, $i \in J' \subset J$, что

$$\bigcup_{i \in J} A_i = \bigcup_{i \in J'} D_i, \quad D_i \cap D_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Доказательство. Множества

$$D_k = A_k, \quad k = \inf J; \quad D_i = A_i \setminus \left(\bigcup_{j \in J, j < i} A_j \right), \quad k < i \in J,$$

обладают всеми требуемыми свойствами, если исключить пустые множества, т.е. положить $J' = \{i \in J: D_i \neq \emptyset\}$.

Семейство $\{D_i\}_{i \in J'}$ назовем разбиением, подчиненным покрытием $\{A_i\}_{i \in J}$ множества $A = \bigcup_{i \in J} A_i$.

С технической точки зрения доказательство следующей леммы является наиболее тонким местом данной работы.

Лемма 3. Рассмотрим конечный набор элементов $\xi_i \in \mathcal{F} | \mathcal{B}$, $i = 0, 1, \dots, r$, и носители $K_{\xi_i}(\omega)$ их регулярных условных распределений относительно $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Пусть

$$z(\omega) \in \text{conv}(K_{\xi_0}(\omega) \cup \dots \cup K_{\xi_r}(\omega)), \quad \omega \in A,$$

где $z \in \mathcal{H} | \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{H}$. Тогда существует такой элемент

$$\zeta \in \mathcal{S}(\text{conv}(\xi_0, \dots, \xi_r), \mathcal{F}),$$

что $z(\omega) \in \text{conv} K_{\zeta}(\omega)$ при почти всех $\omega \in A$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай $A = \Omega$. Действительно, иначе вместо z рассмотрим функцию

$$\bar{z} = zI_A + z'I_{\Omega \setminus A} \in \text{conv}(K_{\xi_0} \cup \dots \cup K_{\xi_r}), \quad \omega \in \Omega,$$

где z' — произвольный $\mathcal{H}$ -измеримый селектор $\text{conv}(K_{\xi_0} \cup \dots \cup K_{\xi_r})$.

Далее, если $\zeta = \xi$ на некотором множестве $C \in \mathcal{H}$, то $K_{\zeta} = K_{\xi}$ при почти всех $\omega \in C$. В самом деле,

$$\mu_{\xi}(\omega, V) \geq \mathbf{P}(\{\xi \in V\} \cap C | \mathcal{H}) = I_C \mathbf{P}(\{\xi \in V\} | \mathcal{H}) = I_C \mu_{\zeta}(\omega, V) \quad \text{п.н.}$$

и, значит, $\mu_{\xi}(\omega, V) \geq \mu_{\zeta}(\omega, V)$ при почти всех $\omega \in C$. Противоположное неравенство доказывается аналогично.

Следовательно, для доказательства леммы достаточно найти $\mathcal{H}$ -измеримое разбиение $\{C_i\}_{i \in L}$, $L \subset \mathbf{N}$, множества Ω и набор функций

$$\zeta_i(\omega) \in \text{conv}(\xi_0(\omega), \dots, \xi_r(\omega)), \quad \omega \in C_i, \quad i \in L; \quad \zeta_i \in \mathcal{F} | \mathcal{B},$$

такие, что $z \in \text{conv} K_{\zeta_i}$ при почти всех $\omega \in C_i$ и всех $i \in L$. При этом функция $\zeta = \sum_{i \in L} \zeta_i I_{C_i}$ будет обладать требуемыми свойствами, поскольку $K_{\zeta} = K_{\zeta_i}$ при почти всех $\omega \in C_i$.

Воспользуемся представлением (1.3):

$$z(\omega) = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k(\omega) z_k(\omega), \quad z_k \in \mathcal{S}(K_{\xi_0} \cup \dots \cup K_{\xi_r}, \mathcal{H}). \quad (3.1)$$

Пусть $r = 1$. Каждому ω поставим в соответствие разбиение $\{\Psi^s\}$ множества $\{1, \dots, d+1\}$ на классы эквивалентности: $i \sim j \iff z_i(\omega) = z_j(\omega)$. Множество A^s элементов ω , соответствующих фиксированному классу эквивалентности, очевидно, принадлежит $\mathcal{H}$, а объединение всех таких множеств образует разбиение Ω . На каждом множестве A^s функция z допускает представление вида (3.1), где все z_k различны, а число

слагаемых равно числу элементов Ψ^s . Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $z_i(\omega) \neq z_j(\omega)$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, d+1\}$.

Далее, каждой паре множеств N^1 и N^2 таких, что $N^1 \cup N^2 = \{1, \dots, d+1\}$ и $N^1 \cap N^2 = \emptyset$, поставим в соответствие множество

$$A_{N^1 N^2} = \left\{ \omega \in A: \alpha_k(\omega) \neq 0, k \in N^1; \alpha_k(\omega) = 0, k \in N^2 \right\} \in \mathcal{H}.$$

Очевидно, что набор всех $A_{N^1 N^2}$ образует разбиение Ω , на каждом элементе которого справедливо представление вида (3.1), содержащее $|N^1|$ слагаемых, где все коэффициенты α_k положительны. Следовательно, без ограничения общности можно предполагать, что $\alpha_k(\omega) > 0$ при всех k и ω .

Введем множества

$$A_k^i = \{z_k \in K_{\xi_i}\} = \text{dom}(z_k \cap K_{\xi_i}) \in \mathcal{H}, \quad k = 1, \dots, d+1, \quad i = 0, 1.$$

Через $\{D_n\}_{n \in L'}$, где $L' \subset \{1, \dots, 2^{d+1}\}$, обозначим указанное в лемме 2 разбиение множества Ω , подчиненное его покрытию множествами

$$A_n = A_1^{i_1} \cap \dots \cap A_{d+1}^{i_{d+1}}, \quad i_j \in \{0, 1\}, \quad n = \sum_{k=1}^{d+1} i_k 2^{k-1}.$$

На каждом элементе $D_n \subset A_n$ данного разбиения положим $I_n = \{k: i_k = 0\}$, $J_n = \{k: i_k = 1\}$. Тогда

$$z = \sum_{k \in I_n} \alpha_k x_k + \sum_{k \in J_n} \alpha_k y_k, \quad \omega \in D_n. \quad (3.2)$$

Здесь $x_k = z_k \in K_{\xi_0}$, $k \in I_n$; $y_k = z_k \in K_{\xi_1}$, $k \in J_n$.

Рассмотрим функцию $\eta = (\xi_0, \xi_1): \Omega \mapsto \mathbf{R}^{2d}$ и носитель $K_\eta(\omega)$ ее регулярного условного распределения относительно $\mathcal{H}$. Каждому множеству D_n поставим в соответствие двудольный граф (I_n, J_n, Γ_n) с множествами вершин долей I_n, J_n и случайным множеством ребер $\Gamma_n(\omega)$, состоящим из пар $(i, j) \in I_n \times J_n$ таких, что

$$w_{ij}(\omega) = (x_i(\omega), y_j(\omega)) \in K_\eta(\omega).$$

Пусть $\{U_n^s\}$, $s \in \{1, \dots, m_n\}$, — семейство всех подмножеств декартова произведения $I_n \times J_n$, где m_n — количество таких подмножеств. Рассмотрим $\mathcal{H}$ -измеримое разбиение $\{C_n^s\}_{s \in L_n}$, $L_n \subset \{1, \dots, m_n\}$, множества D_n :

$$\begin{aligned} C_n^s &= \{\omega \in D_n: \Gamma_n(\omega) = U_n^s\} \\ &= \left\{ \omega \in D_n: w_{ij} \in K_\eta, (i, j) \in U_n^s; w_{ij} \notin K_\eta, (i, j) \notin U_n^s \right\}. \end{aligned}$$

Каждому множеству C_n^s соответствует двудольный граф с фиксированным набором ребер $\Gamma_n = U_n^s$.

Таким образом, построено $\mathcal{H}$ -измеримое разбиение $\{C_n^s\}_{s \in L_n}$, $n \in L'$, множества Ω , на каждом элементе C_n^s которого справедливо представление (3.2), причем соответствующий двудольный граф (I_n, J_n, Γ_n) имеет фиксированные наборы вершин I_n, J_n и ребер $\Gamma_n = U_n^s$. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что данные свойства справедливы на множестве Ω , и опустить все индексы, указывающие на элементы разбиения.

Итак, достаточно провести доказательство в предположении, что существует такой фиксированный двудольный граф (I, J, Γ) , что выполняются следующие свойства. Во-первых, элемент z допускает представление

$$z = \sum_{k \in I} \alpha_k x_k + \sum_{k \in J} \alpha_k y_k, \quad \omega \in \Omega,$$

$$x_k \in \mathcal{S}(K_{\xi_0}, \mathcal{H}), \quad y_k \in \mathcal{S}(K_{\xi_1}, \mathcal{H}), \quad 0 < \alpha_k \in \mathcal{H} \mid \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

Причем $\sum_{k \in I \cup J} \alpha_k = 1$ и при любом $\omega \in \Omega$ все значения $x_k(\omega)$, $k \in I$, $y_k(\omega)$, $k \in J$, различны. Во-вторых,

$$w_{ij} \in K_\eta, \quad (i, j) \in \Gamma; \quad w_{ij} \notin K_\eta, \quad (i, j) \notin \Gamma, \quad \omega \in \Omega,$$

где $\eta = (\xi_0, \xi_1)$, $w_{ij} = (x_i, y_j)$. Заметим, что случаи $I = \emptyset$ или $J = \emptyset$ не исключаются. В любом из этих случаев $\Gamma = \emptyset$.

Покажем сначала, что существует такая $\mathcal{H}$ -измеримая случайная величина $\delta > 0$, что

$$B_\delta(x_i) \cap B_\delta(x_j) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad (3.3)$$

$$B_\delta(y_i) \cap B_\delta(y_j) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad (3.4)$$

$$\mu_\eta(\omega, B_{\delta(\omega)}(x_i(\omega)) \times B_{\delta(\omega)}(y_j(\omega))) = 0, \quad (i, j) \notin \Gamma, \quad (3.5)$$

при всех $\omega \in \Omega$.

Условия (3.3), (3.4) выполняются при следующем выборе радиуса шара:

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \min \left\{ \min_{i \neq j} |x_i - x_j|, \min_{i \neq j} |y_i - y_j| \right\}.$$

Пусть $\theta_k^{ij}(\omega) = \mu_\eta(\omega, B_{1/k}(x_i(\omega)) \times B_{1/k}(y_j(\omega)))$, $(i, j) \notin \Gamma$. Введем расширяющиеся с ростом k последовательности множеств

$$A_k^{ij} = \{\omega: \theta_k^{ij}(\omega) = 0\} \in \mathcal{H}, \quad A_k^{ij} \subset A_{k+1}^{ij},$$

и $\mathcal{H}$ -измеримые функции

$$\tau^{ij}(\omega) = I_{A_1^{ij}} + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) I_{A_{k+1}^{ij} \setminus A_k^{ij}}.$$

Поскольку $(x_i(\omega), y_j(\omega)) \notin K_\eta(\omega)$ при $(i, j) \notin \Gamma$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{ij} = \Omega$ и для любого ω значением $\tau^{ij}(\omega)$ является наименьший номер k , для которого $\theta_k^{ij}(\omega) = 0$. Следовательно, при выборе радиуса шара

$$\delta_2 = \min_{(i,j) \notin \Gamma} \left\{ \frac{1}{\tau^{ij}} \right\}$$

соотношения (3.5) будут выполнены. Таким образом, остается положить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Обозначим через

$$\Gamma_+(i) = \{j \in J: (i, j) \in \Gamma\}, \quad i \in I; \quad \Gamma_-(j) = \{i \in I: (i, j) \in \Gamma\}, \quad j \in J,$$

множества вершин Γ , смежных заданной, и пусть $\Gamma^1 = \{i \in I: \Gamma_+(i) = \emptyset\}$, $\Gamma^2 = \{j \in J: \Gamma_-(j) = \emptyset\}$ — множества вершин, не имеющих смежных. Введем следующие $\mathcal{F}$ -измеримые множества:

$$\begin{aligned} A'_i &= \{\xi_0 \in B_\delta(x_i)\}, \quad i \in \Gamma^1; & A''_j &= \{\xi_1 \in B_\delta(y_j)\}, \quad j \in \Gamma^2; \\ A_{ij} &= \{\xi_0 \in B_\delta(x_i), \xi_1 \in B_\delta(y_j)\}, & (i, j) &\in \Gamma, \end{aligned}$$

и $\mathcal{F}$ -измеримую функцию

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{i \in \Gamma^1} \xi_0 I_{A'_i} + \sum_{j \in \Gamma^2} \xi_1 I_{A''_j} + \sum_{(i,j) \in \Gamma} \zeta_{ij} I_{A_{ij}}, \\ \zeta_{ij} &= \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} + \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \right)^{-1} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} \xi_0 + \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \xi_1 \right). \end{aligned}$$

Здесь β_i, γ_j — степени вершин i, j соответственно, т.е. мощности множеств $\Gamma_+(i), \Gamma_-(j)$.

Покажем, что

$$x_i \in K_\zeta, \quad i \in \Gamma^1; \quad y_j \in K_\zeta, \quad j \in \Gamma^2; \quad (3.6)$$

$$z_{ij} = \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} + \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \right)^{-1} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} x_i + \frac{\alpha_j}{\gamma_j} y_j \right) \in K_\zeta, \quad (i, j) \in \Gamma, \quad (3.7)$$

при почти всех ω .

Заметим, что если $(i, j) \notin \Gamma$, то в силу соотношений (1.2) и (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A'_i \cap A''_j \mid \mathcal{H})(\omega) &= \mathbf{P}(\{(\xi_0, \xi_1) \in B_\delta(x_i) \times B_\delta(y_j)\} \mid \mathcal{H})(\omega) \\ &= \mu_\eta(\omega, B_{\delta(\omega)}(x_i(\omega)) \times B_{\delta(\omega)}(y_j(\omega))) = 0 \end{aligned}$$

при почти всех ω . Вместе с соотношениями (3.3) и (3.4) данное равенство показывает, что попарные пересечения множеств

$$(A'_i)_{i \in \Gamma^1}, \quad (A''_j)_{j \in \Gamma^2}, \quad (A_{ij})_{(i,j) \in \Gamma}$$

пусты, либо имеют нулевую меру. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mu_\zeta(\omega, V) &= \mathbf{P}(\{\zeta \in V\} \mid \mathcal{H}) \\ &\geq \max \left\{ \mathbf{P}(\{\xi_0 \in V\} \cap A'_i \mid \mathcal{H}), \mathbf{P}(\{\xi_1 \in V\} \cap A''_j \mid \mathcal{H}), \right. \\ &\quad \left. \mathbf{P}(\{\zeta_{ij} \in V\} \cap A_{ij} \mid \mathcal{H}) \right\} \quad \text{п.н.}\end{aligned}$$

для всех элементов V счетной базы $\mathcal{V}$ открытых множеств $\mathbf{R}^d$.

Пусть $\delta_k = \delta/k$. При всех $k \in \mathbf{N}$ справедливы включения

$$\begin{aligned}\{\xi_0 \in V\} \cap A'_i &\supset \{B_{\delta_k}(x_i) \subset V\} \cap \{\xi_0 \in B_{\delta_k}(x_i)\}, \\ \{\xi_1 \in V\} \cap A''_j &\supset \{B_{\delta_k}(y_j) \subset V\} \cap \{\xi_1 \in B_{\delta_k}(y_j)\}, \\ \{\zeta_{ij} \in V\} \cap A_{ij} &\supset \{B_{\delta_k}(z_{ij}) \subset V\} \cap \{\zeta_{ij} \in B_{\delta_k}(z_{ij})\} \cap A_{ij} \\ &\supset \{B_{\delta_k}(z_{ij}) \subset V\} \cap \{\eta \in B_{\delta_k}(x_i) \times B_{\delta_k}(y_j)\}.\end{aligned}$$

Из предложения 3 легко вывести, что множества

$$C'_{ki} = \{B_{\delta_k}(x_i) \subset V\}, \quad C''_{kj} = \{B_{\delta_k}(y_j) \subset V\}, \quad C_{kij} = \{B_{\delta_k}(z_{ij}) \subset V\}$$

принадлежат $\mathcal{H}$. Поэтому, используя (1.2), находим, что при почти всех ω выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{\xi_0 \in V\} \cap A'_i \mid \mathcal{H}) &\geq I_{C'_{ki}} \mathbf{P}(\{\xi_0 \in B_{\delta_k}(x_i)\} \mid \mathcal{H}) = I_{C'_{ki}} \mu_{\xi_0}(\omega, B_{\delta_k}(x_i)), \\ \mathbf{P}(\{\xi_1 \in V\} \cap A''_j \mid \mathcal{H}) &\geq I_{C''_{kj}} \mu_{\xi_1}(\omega, B_{\delta_k}(y_j)), \\ \mathbf{P}(\{\zeta_{ij} \in V\} \cap A_{ij} \mid \mathcal{H}) &\geq I_{C_{kij}} \mu_\eta(\omega, B_{\delta_k}(x_i) \times B_{\delta_k}(y_j)).\end{aligned}$$

Соотношения (3.6), (3.7) устанавливаются теперь при помощи однотипных рассуждений. Докажем, например, (3.7).

Обозначим через Ω' множество тех ω , для которых установленное выше неравенство

$$\mu_\zeta(\omega, V) \geq I_{C_{kij}} \mu_\eta(\omega, B_{\delta_k}(x_i) \times B_{\delta_k}(y_j)), \quad (i, j) \in \Gamma,$$

верно сразу для всех V из счетной базы $\mathcal{V}$ и всех $k \in \mathbf{N}$. Пусть $\omega \in \Omega'$. Для любой открытой окрестности $V \ni z_{ij}(\omega)$ выберем k таким образом, чтобы $B_{\delta_k(\omega)}(z_{ij}(\omega)) \subset V$. При этом $\omega \in C_{kij}$ и

$$\mu_\zeta(\omega, V) \geq \mu_\eta\left(\omega, B_{\delta_k(\omega)}(x_i(\omega)) \times B_{\delta_k(\omega)}(y_j(\omega))\right) > 0,$$

так как $(x_i, y_j) \in K_\eta$, $(i, j) \in \Gamma$. Это означает, что в любой открытой окрестности точки $z_{ij}(\omega) \in \mathbf{R}^d$ имеются точки из $K_\zeta(\omega)$. Следовательно, $z_{ij}(\omega) \in \text{cl } K_\zeta(\omega) = K_\zeta(\omega)$. Но поскольку $\mathbf{P}(\Omega') = 1$, то данное соотношение верно при почти всех ω .

Заметим, наконец, что из определения β_i, γ_j вытекает равенство

$$\sum_{(i,j) \in \Gamma} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} + \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \right) = \sum_{i \notin \Gamma^1} \sum_{j \in \Gamma^+(i)} \frac{\alpha_i}{\beta_i} + \sum_{j \notin \Gamma^2} \sum_{i \in \Gamma^-(j)} \frac{\alpha_j}{\gamma_j} = \sum_{i \notin \Gamma^1} \alpha_i + \sum_{j \notin \Gamma^2} \alpha_j.$$

Поэтому выражение

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i \in I} \alpha_i x_i + \sum_{j \in J} \alpha_j y_j \\ &= \sum_{i \in \Gamma^1} \alpha_i x_i + \sum_{j \in \Gamma^2} \alpha_j y_j + \sum_{i \notin \Gamma^1} \sum_{j \in \Gamma_+(i)} \frac{\alpha_i}{\beta_i} x_i + \sum_{j \notin \Gamma^2} \sum_{i \in \Gamma_-(j)} \frac{\alpha_j}{\gamma_j} y_j \\ &= \sum_{i \in \Gamma^1} \alpha_i x_i + \sum_{j \in \Gamma^2} \alpha_j y_j + \sum_{(i,j) \in \Gamma} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} + \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \right) z_{ij} \end{aligned}$$

представляет собой выпуклую комбинацию элементов

$$x_i, \quad i \in \Gamma^1; \quad y_j, \quad j \in \Gamma^2; \quad z_{ij}, \quad (i, j) \in \Gamma,$$

и из соотношений (3.6) и (3.7) вытекает, что $z \in \text{conv } K_\zeta$ п.н.

Итак, утверждение леммы доказано при $r = 1$. Пусть оно верно при $r \leq m - 1$ и $z \in \text{conv}(K_{\xi_0} \cup \dots \cup K_{\xi_m})$. Из формулы (3.1) легко вывести, что элемент z допускает представление

$$z = \alpha x + \beta y, \quad x \in \mathcal{S}(\text{conv}(K_{\xi_0} \cup \dots \cup K_{\xi_{m-1}}), \mathcal{H}), \quad y \in \mathcal{S}(K_{\xi_m}, \mathcal{H}),$$

с $\mathcal{H}$ -измеримыми коэффициентами α, β такими, что $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

По предположению индукции существует $\mathcal{F} | \mathcal{B}$ -измеримый элемент $\zeta_{m-1} \in \text{conv}(\xi_0, \dots, \xi_{m-1})$ такой, что $x \in \text{conv } K_{\zeta_{m-1}}$ п.н. Следовательно,

$$z \in \text{conv}(\text{conv } K_{\zeta_{m-1}} \cup K_{\xi_m}) = \text{conv}(K_{\zeta_{m-1}} \cup K_{\xi_m}) \quad \text{п.н.}$$

Еще раз применяя утверждение леммы при $r = 1$, заключаем, что существует элемент

$$\zeta \in \mathcal{S}(\text{conv}(\zeta_{m-1}, \xi_m), \mathcal{F}) \subset \mathcal{S}(\text{conv}(\xi_0, \dots, \xi_m), \mathcal{F})$$

такой, что $z \in \text{conv } K_\zeta$ п.н. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть F — замкнутое выпуклое $\mathcal{F}$ -измеримое многозначное отображение и элемент $z \in \mathcal{H} | \mathcal{B}$ удовлетворяет условию $z \in \text{conv } K_F$ п.н. Тогда для любой $\mathcal{H}$ -измеримой функции $\varepsilon > 0$ существует $\mathcal{F} | \mathcal{B}$ -измеримый селектор ζ отображения $\text{ri } F$, удовлетворяющий условию $\rho(z, \text{conv } K_\zeta) < \varepsilon$ п.н.

Доказательство. Покажем сначала, что для F существует такое представление Кастэна $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$, что $\eta_i \in \text{ri } F$.

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — некоторое представление Кастэна для F . Из предположения 3 вытекает, что множество $A_i = \{\xi_i \in \text{ri } F\} = \text{dom}(\xi_i \cap \text{ri } F)$ принадлежит $\mathcal{F}$. Положим

$$\eta_i = \xi_i I_{A_i} + \xi I_{\Omega \setminus A_i},$$

где ξ — произвольный $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ -измеримый селектор $\text{ri } F$, существующий согласно предложению 2. Функции η_i являются $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ -измеримыми селекторами $\text{ri } F$ и

$$\text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \eta_i \right) \supset \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\xi_i \cap \text{ri } F) \right) = F.$$

Справедливость последнего равенства вытекает из выпуклости F .

По лемме 1 имеем $z \in \text{conv}(\text{cl}(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{\eta_i}))$ п.н. Изменив z на множестве нулевой меры, построим $\mathcal{H} \mid \mathcal{B}$ -измеримый селектор z' отображения $\text{conv}(\text{cl}(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{\eta_i}))$ и воспользуемся представлением (1.3):

$$z' = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k x'_k, \quad x'_k \in \mathcal{S} \left(\text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{\eta_i} \right), \mathcal{H} \right),$$

$$0 \leq \alpha_k \in \mathcal{H} \mid \mathcal{B}(\mathbf{R}), \quad \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k = 1.$$

Заменив в этом представлении x'_k на $\mathcal{H} \mid \mathcal{B}$ -измеримые селекторы x_k отображений $B_\varepsilon(x'_k) \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{\eta_i} \neq \emptyset$, получим элемент $y = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k x_k$, удовлетворяющий условию $|y - z| < \varepsilon$ п.н.

Положим $A_k^i = \{x_k \in K_{\eta_i}\} \in \mathcal{H}$ и рассмотрим покрытие множества Ω , состоящее из множеств $A_1^{i_1} \cap \dots \cap A_{d+1}^{i_{d+1}}$, где верхние индексы принимают все возможные натуральные значения. Упорядочим эти множества произвольным образом и рассмотрим $\mathcal{H}$ -измеримое разбиение $\{D_s\}_{s=1}^{\infty}$, подчиненное данному покрытию (лемма 2). Каждому множеству D_s соответствует набор индексов $j_k, k = 1, \dots, d+1$, такой, что $x_k \in K_{\eta_{j_k}}, \omega \in D_s$. Поэтому

$$y \in \text{conv}(K_{\eta_{j_1}}, \dots, K_{\eta_{j_{d+1}}}), \quad \omega \in D_s.$$

По лемме 3 существует такой $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ -измеримый элемент

$$\zeta_s \in \text{conv}(\eta_{j_1}, \dots, \eta_{j_{d+1}}) \subset \text{ri } F,$$

что $y \in \text{conv } K_{\zeta_s}$ при почти всех $\omega \in D_s$. Как было отмечено в начале доказательства леммы 3, отсюда следует, что $y \in \text{conv } K_{\zeta}$ п.н., где $\zeta = \sum_{s=1}^{\infty} \zeta_s I_{D_s} \in \text{ri } F$. При этом

$$\rho(z, \text{conv } K_{\zeta}) \leq |z - y| < \varepsilon \quad \text{п.н.}$$

Лемма 5. Пусть $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}$ -измеримые элементы ξ, η таковы, что $|\xi - \eta| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — $\mathcal{H}$ -измеримая функция. Тогда для любого $z \in \mathcal{H} \mid \mathcal{B}$ выполняется неравенство

$$|\rho(z, \text{conv } K_{\xi}) - \rho(z, \text{conv } K_{\eta})| \leq \varepsilon \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Пусть $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для $\text{cl}(\text{conv } K_\eta)$. Поскольку функция

$$h = \rho(z, \text{conv } K_\eta) = \rho(z, \text{cl}(\text{conv } K_\eta)) = \inf_{i \in \mathbb{N}} |z - \eta_i|$$

является $\mathcal{H}$ -измеримой, то (согласно предложениям 2 и 3) существует элемент

$$y \in \mathcal{S}(B_{(1+\beta)h}(z) \cap \text{conv } K_\eta, \mathcal{H}).$$

Здесь $\beta > 0$ — произвольное положительное число и $\text{dom}(B_{(1+\beta)h}(z) \cap \text{conv } K_\eta) = \Omega$. Данный элемент допускает представление (1.3):

$$y = \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i y_i, \quad y_i \in \mathcal{S}(K_\eta, \mathcal{H}), \quad 0 \leq \alpha_i \in \mathcal{H} \mid \mathcal{B}(\mathbf{R}), \quad \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1.$$

Пусть $A_i = \{|\eta - y_i| < \varepsilon'\}$, $\varepsilon' = \beta\varepsilon$. По формуле (1.2) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_i \mid \mathcal{H})(\omega) &= \mathbf{P}(\{\eta \in B_{\varepsilon'}(y_i)\} \mid \mathcal{H})(\omega) \\ &= \mu_\eta(\omega, B_{\varepsilon'}(\omega)(y_i(\omega))) > 0 \quad \text{п.н.}, \end{aligned}$$

поскольку $y_i \in K_\eta$. На множестве A_i справедливо неравенство

$$|\xi - y_i| \leq |\xi - \eta| + |\eta - y_i| < \varepsilon + \varepsilon'.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_\xi(\omega, B_{(\varepsilon+\varepsilon')}(\omega)(y_i(\omega))) &= \mathbf{P}(\{\xi \in B_{\varepsilon+\varepsilon'}(y_i)\} \mid \mathcal{H})(\omega) \\ &\geq \mathbf{P}(A_i \mid \mathcal{H})(\omega) > 0 \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Это означает, что $B_{\varepsilon+\varepsilon'}(y_i) \cap K_\xi \neq \emptyset$ п.н.

Рассмотрим произвольные селекторы $x_i \in \mathcal{S}(B_{\varepsilon+\varepsilon'}(y_i) \cap K_\xi, \mathcal{H})$ и положим $x = \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i x_i \in \text{conv } K_\xi$ п.н. Имеет место очевидное неравенство: $|y - x| < \varepsilon + \varepsilon'$ п.н. Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho(z, \text{conv } K_\xi) &\leq |z - x| \leq |z - y| + |y - x| < (1 + \beta)h + (1 + \beta)\varepsilon \\ &= \rho(z, \text{conv } K_\eta) + \varepsilon + \beta(h + \varepsilon) \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\beta \rightarrow 0$, находим: $\rho(z, \text{conv } K_\xi) \leq \rho(z, \text{conv } K_\eta) + \varepsilon$ п.н. В силу симметрии данное неравенство останется справедливым, если поменять местами K_ξ и K_η . Лемма 5 доказана.

Нам также потребуется следующий простой результат, не связанный со свойствами носителей.

Лемма 6. Пусть F — открытое многозначное отображение с $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$ -измеримым графиком и $\eta \in \mathcal{S}(F, \mathcal{H})$. Тогда η лежит в F вместе с некоторой $\mathcal{H}$ -измеримой трубкой, т.е. существует такая положительная $\mathcal{H}$ -измеримая функция θ , что $B_\theta(\eta) \subset F$.

Доказательство. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для $\text{cl } F$. Положим

$$\theta_i = |\xi_i - \eta| I_{\{\xi_i \neq \eta\}} + I_{\{\xi_i = \eta\}} > 0.$$

Поскольку множество $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty \setminus \{\eta\}$ плотно в F , то множества

$$A_i = \left\{ \omega: B_{\theta_i(\omega)}(\eta(\omega)) \subset F(\omega) \right\}$$

образуют покрытие Ω . Графики отображений $F, B_{\theta_i}(\eta)$ принадлежат $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$. Пусть $T_i = (\mathbf{R}^d \setminus F) \cap B_{\theta_i}(\eta)$, тогда $A_i = \Omega \setminus \text{dom } T_i$ и, следовательно, $A_i \in \mathcal{H}$.

Построим $\mathcal{H}$ -измеримое разбиение $\{D_i\}_{i \in J}$, $J \subset \mathbf{N}$, подчиненное покрытию $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, и введем положительную $\mathcal{H}$ -измеримую функцию $\theta = \sum_{i \in J} \theta_i I_{D_i}$. Поскольку $D_i \subset A_i$, то $B_\theta(\eta) \subset F$.

4. Доказательство теоремы 1. Предположим, что выполнено условие (b), и выведем из него (a). Предложения 2 и 3 далее используются без специальных оговорок.

1) Прямой ход (предварительная конструкция). Положим для краткости $Y_n = G_n \cap \text{conv } K_{H_{n+1}^*}$, $H_n = \text{cl } Y_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Пусть $\eta'_0 \in \mathcal{F}_0 | \mathcal{B}$ — произвольный селектор отображения Y_0 . Поскольку $Y_0 \neq \emptyset$ п.н., элемент

$$\eta_0 = \eta'_0 I_{A_0} + \eta''_0 I_{\Omega \setminus A_0}, \quad A_0 = \text{dom}(\eta'_0 \cap Y_0), \quad \eta''_0 \in \mathcal{S}(G_0, \mathcal{F}_0),$$

удовлетворяет условиям $\eta_0 \in \text{conv } K_{H_1^*}$ п.н., $\eta_0 \in \mathcal{S}(G_0, \mathcal{F}_0)$.

В соответствии с леммой 6 выберем положительную $\mathcal{F}_0$ -измеримую случайную величину θ_0 таким образом, чтобы $B_{\theta_0}(\eta_0) \subset G_0$, и положим $\varepsilon_0 = \theta_0/2$. Согласно лемме 4, существует такой элемент $\eta_1 \in \mathcal{S}(\text{ri } H_1^*, \mathcal{F}_1)$, что

$$\rho(\eta_0, \text{conv } K_{\eta_1}) < \varepsilon_0 \quad \text{п.н.} \quad (4.1)$$

Если $N = 1$, то $\eta_1 \in G_1$ и процесс останавливается. Если же $N \geq 2$, то $\eta_1 \in \text{ri } H_1 \subset Y_1$ п.н. Не ограничивая общности, будем считать, что $\eta_1 \in \text{conv } K_{H_2^*}$ п.н., $\eta_1 \in \mathcal{S}(G_1, \mathcal{F}_1)$, поскольку соотношение (4.1) не изменится, если вместо η_1 рассмотреть элемент

$$\eta_1 I_{A_1} + \bar{\eta}_1 I_{\Omega \setminus A_1}, \quad A_1 = \text{dom}(\eta_1 \cap Y_1), \quad \bar{\eta}_1 \in \mathcal{S}(G_1, \mathcal{F}_1),$$

отличающийся от η_1 лишь на множестве $\Omega \setminus A_1$ нулевой меры.

Пусть элементы $\eta_j \in \text{conv } K_{H_{j+1}^*}$ п.н.,

$$\begin{aligned} \eta_j &\in \mathcal{S}(G_j, \mathcal{F}_j), & j &= 0, 1, \dots, n-1; \\ \varepsilon_j &\in \mathcal{F}_j | \mathcal{B}(\mathbf{R}), & j &= 0, 1, \dots, n-2, \end{aligned}$$

уже построены. Выберем $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримую функцию $\theta_{n-1} > 0$ так, чтобы выполнялось включение $B_{\theta_{n-1}}(\eta_{n-1}) \subset G_{n-1}$, и положим

$$\varepsilon_{n-1} = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon_{n-2}, \theta_{n-1}\}.$$

Воспользовавшись леммой 4, построим элемент $\eta_n \in \mathcal{S}(\text{ri } H_n^*, \mathcal{F}_n)$, для которого справедливо неравенство

$$\rho(\eta_{n-1}, \text{conv } K_{\eta_n}) < \varepsilon_{n-1} \quad \text{п.н.} \quad (4.2)$$

Как и выше, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\eta_n \in \text{conv } K_{H_{n+1}^*}$ п.н., $\eta_n \in \mathcal{S}(G_n, \mathcal{F}_n)$, так как неравенство (4.2) сохраняется при замене η_n на элемент

$$\eta_n I_{A_n} + \bar{\eta}_n I_{\Omega \setminus A_n}, \quad A_n = \text{dom}(\eta_n \cap Y_n), \quad \bar{\eta}_n \in \mathcal{S}(G_n, \mathcal{F}_n),$$

обладающий такими свойствами.

Таким образом, построен согласованный с фильтрацией случайный процесс $(\eta_n)_{n=0}^N$, $\eta_n \in G_n$, удовлетворяющий условиям (4.2) при всех $n = 1, \dots, N$.

2) Обратный ход (деформация). Введем следующую последовательность случайных величин:

$$\delta_{N-1} = \varepsilon_{N-1}, \quad \delta_k = 2\varepsilon_k, \quad k \leq N-2.$$

Заметим, что $B_{\delta_k}(\eta_k) \subset G_k$, так как $\delta_k \leq \theta_k$.

Положим $\xi_N = \eta_N$ и построим $\mathcal{F}_{N-1} | \mathcal{B}$ -измеримый элемент

$$\xi_{N-1} \in B_{\delta_{N-1}}(\eta_{N-1}) \cap \text{ri}(\text{conv } K_{\xi_N}).$$

При этом $\xi_{N-1} \in G_{N-1}$ п.н., так как $B_{\delta_{N-1}}(\eta_{N-1}) \subset G_{N-1}$ и множество в правой части последнего соотношения непусто при почти всех ω в силу (4.2).

Предположим, что элементы

$$\xi_j \in \mathcal{S}(B_{\delta_j}(\eta_j) \cap \text{ri}(\text{conv } K_{\xi_{j+1}}), \mathcal{F}_j), \quad j = n, \dots, N-1,$$

уже построены. Поскольку $|\xi_n - \eta_n| < \delta_n = 2\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n-1}$, то, согласно лемме 5 и неравенству (4.2), имеем

$$\rho(\eta_{n-1}, \text{conv } K_{\xi_n}) \leq \rho(\eta_{n-1}, \text{conv } K_{\eta_n}) + \varepsilon_{n-1} < 2\varepsilon_{n-1} = \delta_{n-1} \quad \text{п.н.}$$

Отсюда следует, что $B_{\delta_{n-1}}(\eta_{n-1}) \cap \text{ri}(\text{conv } K_{\xi_n}) \neq \emptyset$ п.н. и любой $\mathcal{F}_{n-1} | \mathcal{B}$ -измеримый селектор

$$\xi_{n-1} \in B_{\delta_{n-1}}(\eta_{n-1}) \cap \text{ri}(\text{conv } K_{\xi_n})$$

удовлетворяет условию $\xi_{n-1} \in B_{\delta_{n-1}}(\eta_{n-1}) \subset G_{n-1}$ п.н. Таким образом, построен согласованный с фильтрацией случайный процесс $(\xi_n)_{n=0}^N$, $\xi_n \in G_n$ п.н., обладающий следующим свойством:

$$\xi_{n-1} \in \text{ri}(\text{conv } K_{\xi_n}) \quad \text{п.н.}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Пусть $C_n = \{\xi_n \in G_n\}$ и $\zeta_n \in \mathcal{F}_n | \mathcal{B}$ — произвольный селектор G_n . Положим

$$S_n = \xi_n I_{C_n} + \zeta_n I_{\Omega \setminus C_n} \in \mathcal{S}(G_n, \mathcal{F}_n).$$

Поскольку $\mathbf{P}(C_n) = 1$, то $K_{S_n} = K_{\xi_n}$ п.н. и выполняется соотношение (2.2). Следовательно, для процесса S существует эквивалентная мартингальная мера.

Доказательство импликации (a) $\implies$ (b) гораздо проще. Пусть S — случайный процесс, указанный в условии (a). В силу (2.2) справедливо соотношение $S_{n-1} \in G_{n-1} \cap \text{ri}(\text{conv } K_{S_n})$ п.н., $n = 1, \dots, N$. Заметим, что $S_N \in H_N = \text{cl } G_N$. Пусть уже установлено, что $S_j \in H_j$ п.н., $j = n, \dots, N$. Очевидно, что $K_{S_n} \subset K_{H_n}$ п.н., поэтому

$$S_{n-1} \in G_{n-1} \cap \text{ri}(\text{conv } K_{S_n}) \subset G_{n-1} \cap \text{conv } K_{H_n} \subset H_{n-1} \quad \text{п.н.}$$

В частности, $H_n \neq \emptyset$ п.н. при всех n . Теорема доказана.

5. Случай конечного вероятностного пространства. Предположение о конечности вероятностного пространства позволяет дать элементарное доказательство основной теоремы и несколько ее усилить. Итак, пусть множество Ω конечно, а вероятностная мера $\mathbf{P}$ невырождена: $\mathbf{P}(\omega) > 0$. Ясно, что в рассматриваемом случае нет различия между алгебрами и σ -алгебрами, а также между условиями «всюду» и «почти всюду».

Пусть алгебра $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ порождается разбиением $\{D_1, \dots, D_l\}$. Его элементы называются атомами $\mathcal{H}$. Многозначное отображение является $\mathcal{H}$ -измеримым, если оно постоянно на атомах $\mathcal{H}$. Условное верхнее распределение $\mathcal{F}$ -измеримого многозначного отображения F с непустыми замкнутыми значениями относительно алгебры $\mathcal{H}$ определяется следующей формулой:

$$\mu_F(\omega, V) = \mathbf{P}(\{F \cap V\} | \mathcal{H}) = \sum_{i=1}^l \frac{\mathbf{P}(\{\omega' \in D_i: F(\omega') \cap V \neq \emptyset\})}{\mathbf{P}(D_i)} I_{D_i}(\omega).$$

Носитель μ_F имеет вид

$$K_F(\omega) = \bigcup_{\omega' \in D_i} F(\omega'), \quad \omega \in D_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

Рассмотрим фильтрацию $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ и последовательность $\mathcal{F}_n$ -измеримых выпуклых многозначных отображений $\omega \mapsto G_n(\omega) \subset \mathbf{R}^d$ с непустыми значениями (условие открытости G_n здесь не накладывается). Пусть $W_N = \text{cl } G_N$. Если отображение W_n определено и $\text{dom } W_n = \Omega$, то положим

$$W_{n-1} = \text{cl}((\text{ri } G_{n-1}) \cap \text{ri}(\text{conv } K_{W_n})).$$

Здесь K_{W_n} — носитель регулярного условного верхнего распределения W_n относительно $\mathcal{F}_{n-1}$. Если же $\mathbf{P}(\text{dom } W_n) < 1$, то будем считать, что $W_{n-1} = \emptyset$.

Теорема 2. Пусть множество Ω конечно и мера $\mathbf{P}$ невырождена, тогда следующие условия эквивалентны:

(а) существуют случайный процесс S и невырожденная вероятностная мера $\mathbf{Q}$ такие, что $S_n \in \mathcal{S}(\text{ri } G_n, \mathcal{F}_n)$ и S является $\mathbf{Q}$ -мартингалом;

(b) $W_n(\omega) \neq \emptyset$ при всех ω и n .

Доказательство. Пусть выполнено условие (b). В качестве S_0 возьмем произвольный $\mathcal{F}_0$ -измеримый селектор отображения $\text{ri } W_0$. Пусть элементы $S_j \in \mathcal{S}(\text{ri } W_j, \mathcal{F}_j)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, уже построены. Предположим, что $\omega \in D_i$, где D_i — атом алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$. Используя известное представление относительной внутренности объединения (см. [24, теорема 6.9]), находим

$$\begin{aligned} S_{n-1}(\omega) &\in \text{ri}(\text{conv } K_{W_n})(\omega) = \text{ri}\left(\text{conv}\left(\bigcup_{\omega' \in D_i} W_n(\omega')\right)\right) \\ &= \left\{ \sum_{\omega' \in D_i} \lambda_i(\omega') x_i(\omega') : x_i(\omega') \in \text{ri } W_n(\omega'), \lambda_i(\omega') > 0, \sum_{\omega' \in D_i} \lambda_i(\omega') = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее имеется в виду, что x_i и λ_i (как и W_n) постоянны на атомах алгебры $\mathcal{F}_n$, содержащихся в D_i .

Итак, $S_{n-1} = \sum_{\omega' \in D} \lambda_i(\omega') x_i(\omega')$ на атоме D_i при некоторых $x_i \in \text{ri } W_n$ и $\lambda_i > 0$. Положим $S_n(\omega) = x_i(\omega)$, $\omega \in D_i$. Очевидно, что $S_n \in \mathcal{S}(\text{ri } W_n, \mathcal{F}_n)$ и на каждом атоме D_i выполняется соотношение

$$\begin{aligned} S_{n-1}(\omega) &= \sum_{\omega' \in D_i} \lambda_i(\omega') S_n(\omega') \in \text{ri}\left(\text{conv}\left(\bigcup_{\omega' \in D_i} \{S_n(\omega')\}\right)\right) \\ &= \text{ri}(\text{conv } K_{S_n})(\omega). \end{aligned}$$

Согласно критерию (2.2), отсюда вытекает условие (а).

Докажем импликацию (а) $\implies$ (b). В силу условия (а) и критерия (2.2) имеем $S_{n-1} \in \text{ri } G_{n-1} \cap \text{ri}(\text{conv } K_{S_n})$, $n = 1, \dots, N$. Очевидно, что $S_N \in \text{ri } W_N$. Пусть $S_j \in \text{ri } W_j$, $j = n, \dots, N$. Поскольку $K_{S_n} \subset K_{W_n}$, то

$$S_{n-1} \in \text{ri } G_{n-1} \cap \text{ri}(\text{conv } K_{W_n}) = \text{ri } W_{n-1} \neq \emptyset.$$

Теорема 2 доказана.

Основное отличие данного результата от общего случая состоит в отсутствии требования открытости G_n . Представляет интерес исследование вопроса о возможности подобного обобщения теоремы 1.

Заметим, что в определении W_n и условии теоремы 2 нельзя заменить $\text{ri } G_n$ на G_n , даже если множества G_n замкнуты. Действительно, пусть $\Omega = \{\omega\}$ — одноточечное множество, $d = N = 1$, $G_0 = [0, 1]$, $G_1 = [1, 2]$. Тогда набор $S_i = 1 \in G_i$, $i = 0, 1$, образует мартингал относительно единственной вероятностной меры на Ω , но $G_0 \cap \text{ri}(\text{conv } K_{G_1}) = G_0 \cap \text{ri } G_1 = \emptyset$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. — *Stochastic Process. Appl.*, 1981, v. 11, № 3, p. 215–260.
2. *Dalang R. C., Morton A., Willinger W.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. — *Stochastics* *Stochastics Rep.*, 1990, v. 29, № 2, p. 185–201.
3. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case. — *Finance Stoch.*, 1998, v. 2, № 3, p. 259–273.
4. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998, 528 с.
5. *Jouini E., Kallal H.* Martingales and arbitrage in securities markets with transaction costs. — *J. Econom. Theory*, 1995, v. 66, № 1, p. 178–197.
6. *Kabanov Y., Stricker C.* The Harrison–Pliska arbitrage pricing theorem under transaction costs. — *J. Math. Econom.*, 2001, v. 35, № 2, p. 185–196.
7. *Kabanov Y., Rásonyi M., Stricker C.* No-arbitrage criteria for financial markets with efficient friction. — *Finance Stoch.*, 2002, v. 6, № 3, p. 371–382.
8. *Schachermayer W.* The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. — *Math. Finance*, 2004, v. 14, № 1, p. 19–48.
9. *Булдинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003, 400 с.
10. *Himmelberg C. J.* Measurable relations. — *Fund. Math.*, 1975, v. 87, p. 53–72.
11. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математике и экономике. М.: Наука, 1985, 352 с.
12. *Евстигнеев И. В.* Теоремы измеримого выбора и вероятностные модели управления в общих топологических пространствах. — *Матем. сб.*, 1986, т. 131, № 1, с. 27–39.
13. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 2. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 576 с.
14. *Рохлин Д. Б.* Расширенная версия теоремы Даланга–Мортон–Виллинджера при выпуклых ограничениях на портфель. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, т. 49, в. 3, с. 503–521.
15. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479 с.
16. *Beer G.* A Polish topology for the closed subsets of a Polish space. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1991, v. 113, № 4, p. 1123–1133.
17. *Barbati A., Beer G., Hess C.* The Hausdorff metric topology, the Attouch–Wets topology, and the measurability of set-valued functions. — *J. Convex Anal.*, 1994, v. 1, № 1, p. 107–119.
18. *Zsilinszky L.* Polishness of the Wijsman topology revisited. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, v. 126, № 12, p. 3763–3765.
19. *Hess C.* Loi de probabilité des ensembles aléatoires à valeurs fermées dans un espace métrique séparable. — *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1983, v. 296, № 21, p. 883–886.
20. *Hess C.* Contributions à l'étude de la mesurabilité, de la loi de probabilité, et de la convergence des multifonctions. — *Thèse d'état*. Montpellier: Université Montpellier II, 1986.
21. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
22. *Dempster A. P.* Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. — *Ann. Math. Statist.*, 1967, v. 38, № 2, p. 325–339.
23. *Александрян Р. А., Мирзатянян Э. А.* Общая топология. М.: Высшая школа, 1979, 336 с.
24. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.

Поступила в редакцию
2.VIII.2004

Исправленный вариант
14.III.2005