Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Хохлов, Свойства проекций распределения, равномерного на сфере в R^s . I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 501–516

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp91>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:30:53

© 2005 г.

ХОХЛОВ В. И.*

СВОЙСТВА ПРОЕКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, РАВНОМЕРНОГО НА СФЕРЕ В $\mathbf{R}^s$. I¹⁾

В статье получена оценка снизу для расстояния по вариации между распределением первых k координат случайного вектора, имеющего равномерное распределение на сфере высокой размерности, и распределением первых k координат случайного вектора, координаты которого суть независимые случайных величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Для этого расстояния уточняется известная верхняя оценка Диакониса–Фридмана.

Ключевые слова и фразы: расстояние полной вариации; распределение, равномерное на сфере.

Введение. Обозначения

Будут использоваться следующие обозначения: $\mathbf{R}^s$ есть s -мерное евклидово пространство; $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_s^2}$ есть норма вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbf{R}^s$; $(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = t_1x_1 + \dots + t_sx_s$ есть скалярное произведение векторов $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbf{R}^s$ и $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbf{R}^s$; $B_s(r) = \{\mathbf{x}: |\mathbf{x}| < r\}$ — шар в $\mathbf{R}^s$ радиуса r с центром в 0; $S_s(r) = \{\mathbf{x}: |\mathbf{x}| = r\}$ — сфера в $\mathbf{R}^s$ радиуса r с центром в 0; $\text{Vol}_s(A)$ — лебегова мера множества $A \in \mathbf{R}^s$; $\Omega_s = \pi^{s/2}/\Gamma(s/2+1)$ есть объем единичного шара в $\mathbf{R}^s$; $\omega_s = 2\pi^{s/2}/\Gamma(s/2)$ есть площадь поверхности единичной сферы в $\mathbf{R}^s$; $\{z\}$ — дробная часть действительного числа z ; для вектора $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_s) \in \mathbf{R}^s$ полагаем $\{\mathbf{z}\} = (\{z_1\}, \dots, \{z_s\})$; для $x \in \mathbf{R}^1$ полагаем $x^+ = x$ при $x > 0$, $x^+ = 0$ при $x \leq 0$.

В работе используется понятие «расстояние по вариации» между вероятностными мерами, определенными на одном и том же измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Важность этого понятия подчеркивал А. Н. Колмогоров [13]. При этом он определял его как

$$\rho(P, Q) = \sup_{A \in \mathcal{A}} |P(A) - Q(A)|.$$

Позже (см. [14, с. 386], [1] и [2]) расстояние по вариации между P и Q определяли как $2 \sup_{A \in \mathcal{A}} |P(A) - Q(A)|$ и обозначали $\|P - Q\|$.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: oppm@tvp.ru

В дальнейшем нами будут рассматриваться только вероятностные меры, определенные на классе $\mathcal{B}^s$ борелевских подмножеств пространства $\mathbf{R}^s$. Для мер P и Q , абсолютно непрерывных по отношению к мере Лебега и имеющих плотности $p(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ соответственно,

$$\rho(P, Q) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^s} |p(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_{\{\mathbf{x}: p(\mathbf{x}) > q(\mathbf{x})\}} (p(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

и, если $q(\mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^s$,

$$\rho(P, Q) = \int_{\mathbf{R}^s} \left(\frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} - 1 \right)^+ q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1)$$

Из свойств расстояния по вариации нам потребуется, в основном, одно: если P и Q — распределения вероятностей, соответствующие случайным (векторам) $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^s$, и h — измеримое по Борелю отображение $\mathbf{R}^s$ в $\mathbf{R}^k$, $1 \leq k \leq s$, то расстояние по вариации между распределениями вероятностей $h(\mathbf{X})$ и $h(\mathbf{Y})$ не превосходит расстояния $\rho(P, Q)$ (а иногда может быть ему равно, например, если отображение h взаимно однозначно).

Перейдем теперь к описанию основной проблемы, с которой связана данная работа.

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_s)$ — случайный вектор, имеющий равномерное распределение на сфере

$$S_s(r) = \{\mathbf{x}: x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 = r^2\}.$$

Тогда при фиксированном k и $s \rightarrow \infty$ распределение вектора

$$(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad (2)$$

«неограниченно сближается» с распределением вектора

$$\left(\frac{r}{\sqrt{s}} Z_1, \frac{r}{\sqrt{s}} Z_2, \dots, \frac{r}{\sqrt{s}} Z_k \right), \quad (3)$$

где $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ — независимые и нормальные с параметрами $(0, 1)$ случайные величины.

История этого утверждения, связанная с именами А. Пуанкаре, Э. Бореля, Дж. Максвелла, П. Леви и других, изложена в разделе 6 статьи [1].

Стам [2] оценил расстояние по вариации между распределениями в $\mathbf{R}^s$ векторов (2) и (3). Из его оценок вытекает, что это расстояние стремится к нулю при фиксированном k и $s \rightarrow \infty$. Более того, допустим и одновременный рост s и k при условии

$$k = o(\sqrt{s}), \quad s \rightarrow \infty.$$

Дополнительные замечания к этой работе будут сделаны ниже.

П р и м е ч а н и е. Покажем, как можно вывести утверждение об асимптотической нормальности X_1 . Примем $r = 1$ и выберем два числа α и β , $-1 < \alpha < \beta < 1$. Множество

$$\{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in S_s(1), \alpha \leq x_1 \leq \beta\} \quad (4)$$

(«сферическая зона») имеет площадь поверхности, которую можно вычислить следующим образом.

Берем известную формулу [6, с. 405–407]

$$\begin{aligned} & \int_{x_1^2 + \dots + x_s^2 = 1} f(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s) dS \\ &= \frac{2\pi^{(s-1)/2}}{\Gamma((s-1)/2)} \int_{-1}^1 f\left(\sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2} u\right) (1-u^2)^{(s-3)/2} du, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ есть гамма-функция.

Полагаем $f(v) = 1$ при $\alpha \leq v \leq \beta$ и $f(v) = 0$ в других случаях, и пусть $m_1 = 1$, $m_2 = \dots = m_s = 0$. Тогда площадь интересующей нас сферической зоны (4) будет равна

$$\int_{\substack{x_1^2 + \dots + x_s^2 = 1 \\ \alpha \leq x_1 \leq \beta}} 1 dS = \frac{2\pi^{(s-1)/2}}{\Gamma((s-1)/2)} \int_\alpha^\beta (1-u^2)^{(s-3)/2} du.$$

Результат деления площади этой зоны на площадь ω_s всей сферы (вероятность того, что $\alpha \leq X_1 \leq \beta$) будет равен (см. [5, гл. 1])

$$\frac{\int_\alpha^\beta (1-u^2)^{(s-3)/2} du}{\int_{-1}^1 (1-u^2)^{(s-3)/2} du}. \quad (5)$$

Интеграл, стоящий в знаменателе, равен (см. [7, формула (2.2.3.1), с. 295])

$$\frac{\Gamma((s-1)/2) \sqrt{\pi}}{\Gamma(s/2)},$$

поэтому из (5), в частности, вытекает, что X_1 имеет (при $s \geq 3$) плотность вероятности ($x_1 \in \mathbf{R}^1$, $-1 < x_1 < 1$)

$$p(x_1; X_1) = \frac{\Gamma(s/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma((s-1)/2)} (1-x_1^2)^{(s-3)/2} \quad (6)$$

(частный случай формулы Стама [2, формула (3)], по которой совместная плотность $(X_1, \dots, X_k)$, $k \leq s-2$, равна

$$\begin{aligned} & p(x_1, \dots, x_k; X_1, \dots, X_k) \\ &= \frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{k/2} \Gamma((s-k)/2)} (1-(x_1^2 + \dots + x_k^2))^{(s-k-2)/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$, $0 < x_1^2 + \dots + x_k^2 < 1$).

Вернемся к формуле (5). Положим $\alpha = a/\sqrt{s}$, $\beta = b/\sqrt{s}$, $u\sqrt{s} = v$. Тогда (при $s \rightarrow \infty$)

$$\mathbf{P}\left\{\frac{a}{\sqrt{s}} \leq X_1 \leq \frac{b}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{s^{-1/2} \int_a^b (1 - v^2/s)^{(s-3)/2} dv}{s^{-1/2} \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} (1 - v^2/s)^{(s-3)/2} dv} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-v^2/2} dv.$$

Из (6) легко усмотреть, что при каждом x_1

$$p(x_1; \sqrt{s}X_1) = \frac{1}{\sqrt{s}} p\left(\frac{x_1}{\sqrt{s}}; X_1\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2}.$$

Применяя теперь так называемую теорему Шеффэ (ср. [3, с. 306]), заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| p(x_1; \sqrt{s}X_1) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \right| dx_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty,$$

т. е. распределение $\sqrt{s}X_1$ сходится к нормальному $(0, 1)$ -распределению и по вариации.

Аналогичные рассуждения, использующие формулу (7), справедливы и при любом фиксированном k (см. [2]).

§ 1. Неравенство Диакониса–Фридмана

В совместной работе [1] этих двух авторов установлена, как они пишут, «a reasonably sharp bound» для расстояния по вариации ρ_k (см. лемму 2 или (11)) между распределением $X_1, \dots, X_k$ и распределением $Z_1, \dots, Z_k$, где, как прежде, $Z_1, \dots, Z_k$ — независимые нормальные $(0, 1)$ случайные величины.

Эта оценка сверху имеет вид

$$\rho_k \leq \frac{k+3}{s-k-3}, \quad 1 \leq k \leq s-4. \quad (8)$$

Оценка выводится из оценки для четных k , имеющей вид

$$\rho_k \leq \frac{k+2}{s-k-2} = \vartheta_k. \quad (8')$$

Далее, авторы утверждают: «Порядок k/s является правильным, хотя, возможно, сомножитель [От авт.: в данной записи — единица] перед дробью в (8) может быть уменьшен» (ср. [1, с. 398]).

Этот сомножитель, действительно, может быть уменьшен более, чем в два раза (см. § 3).

Доказательство неравенства (8) использует два утверждения, которые мы сформулируем в виде лемм (ср. [1, с. 403]).

Лемма 1. Пусть $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_s)$, где $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$ — независимые нормальные $(0, 1)$ случайные величины. Положим

$$R^2 = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s Z_j^2$$

и

$$\hat{\mathbf{X}} = \left(\frac{Z_1}{R}, \frac{Z_2}{R}, \dots, \frac{Z_s}{R} \right) = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s).$$

Тогда вектор $\hat{\mathbf{X}}$ имеет равномерное распределение на сфере

$$S_s(\sqrt{s}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^s: x_1^2 + \dots + x_s^2 = s\}.$$

Лемма 2. Расстояние ρ_k по вариации между распределениями векторов $\mathbf{Z}_{(k)} = (Z_1, \dots, Z_k) \in \mathbf{R}^k$ и $\hat{\mathbf{X}}_{(k)} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_k) \in \mathbf{R}^k$ равно расстоянию по вариации между одномерными распределениями случайных величин

$$U = \sum_{j=1}^k \hat{X}_j^2 \quad \text{и} \quad V = \sum_{j=1}^k Z_j^2. \quad (9)$$

Так как

$$U = \frac{s \sum_{j=1}^k Z_j^2}{\sum_{j=1}^s Z_j^2},$$

то U/s имеет бета-распределение с параметрами $k/2$ и $(n - k)/2$, а сумма V в формуле (9) имеет χ^2 -распределение с k степенями свободы. Соответствующие плотности вероятностей имеют вид

$$f(x) = p(x; U)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{s} \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(k/2) \Gamma((s-k)/2)} \left(\frac{x}{s}\right)^{k/2-1} \left(1 - \frac{x}{s}\right)^{(s-k)/2-1} & \text{при } 0 < x \leq s, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (10a)$$

$$g(x) = p(x; V) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \quad 0 < x < \infty. \quad (10b)$$

В соответствии с формулой (1) изучаемое нами расстояние по вариации равно

$$\rho_k = \int_0^s \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)^+ g(x) dx. \quad (11)$$

§ 2. Нижняя оценка для интеграла ρ_k

Установим границу снизу для расстояния ρ_k в (11), ограничившись на первом (и основном) этапе *четными значениями* $k \geq 2$ ($k = 2l$).

Определим при $k \geq 2$ интервал

$$\Delta_k = \left(k + 2 - \frac{1}{2} \sqrt{2k}, k + 2 \right).$$

Очевидно, что

$$\rho_k \geq \min_{x \in \Delta_k} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)^+ \int_{\Delta_k} g(x) dx. \quad (12)$$

Оценим снизу оба сомножителя в формуле (12). Второй сомножитель есть не что иное, как $\mathbf{P}\{k + 2 - \sqrt{2k}/2 \leq \chi_k^2 \leq k + 2\}$, $k = 2, 4, 6, \dots$

Лемма 3. Пусть $k = 2l$, $l = 1, 2, 3, \dots$. Тогда

$$\min_{l \geq 1} \mathbf{P}\{2(l+1) - \sqrt{l} \leq \chi_{2l}^2 \leq 2(l+1)\} \quad (13)$$

равен положительной постоянной, которая не меньше, чем 0,085.

З а м е ч а н и е. Константу 0,085 можно увеличить до 0,13, но в рамках данной статьи мы не будем на этом останавливаться.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3. а) Для $1 \leq l \leq 25$ вероятности в (25) представляем в виде разности

$$\mathbf{P}\{\chi_{2l}^2 \geq 2(l+1) - \sqrt{l}\} - \mathbf{P}\{\chi_{2l}^2 \geq 2(l+1)\}$$

и используем таблицы [17, с. 140–159]. Вторая вероятность указана в таблице с пятью знаками после запятой. Первая может не быть указана в таблице. Например, при $k = 10$ имеем $12 - \sqrt{5} = 9,764\dots$. Ближайшее сверху табличное значение аргумента равно 9,8. Поэтому берется меньшая по значению разность $\mathbf{P}\{\chi_{10}^2 \geq 9,8\} - \mathbf{P}\{\chi_{10}^2 \geq 12\} = 0,17315$.

Таким образом устанавливается, что минимум по l ($1 \leq l \leq 25$) вероятности в формуле (13) не менее 0,085.

б) Пусть теперь $l \geq 26$. Докажем следующее неравенство: при $l \geq 26$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{k + 2 - \frac{\sqrt{2k}}{2} \leq \chi_k^2 \leq k + 2\right\} &= \mathbf{P}\{2(l+1) - \sqrt{l} \leq \chi_{2l}^2 \leq 2(l+1)\} \\ &\geq 0,94135 \left(\Phi(0) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \right) = 0,94135 \left(\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0) \right) \\ &\geq 0,94135 \times 0,19146 = 0,18023, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Следствие. Из оценок пункта а) и (14) вытекает утверждение леммы 3.

Доказательство неравенства (14). При $k = 2l$ плотность вероятности χ_k^2 равна

$$p(x; \chi_k^2) = \begin{cases} \frac{1}{2^l \Gamma(l)} x^{l-1} e^{-x/2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Мы рассматриваем значения x из интервала

$$\left(k + 2 - \frac{\sqrt{2k}}{2}, k + 2\right). \quad (15)$$

Введем вспомогательные переменные

$$t = \frac{x - (k + 2)}{\sqrt{2k}}, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq 0,$$

и z :

$$\frac{x}{2(l+1)} = 1 - z, \quad 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{l}}{2(l+1)} < 0,1 \quad \text{при } l \geq 26.$$

Переменные z и t связаны соотношениями

$$t = -\frac{l+1}{\sqrt{l}} z, \quad z = -\frac{\sqrt{l}}{l+1} t.$$

Дадим теперь нижнюю оценку для плотности $p(x; \chi_k^2)$ в интервале (15). Очевидно,

$$\begin{aligned} p(x; \chi_k^2) &\geq \frac{1}{2(l+1)} \frac{(l+1)^l}{\Gamma(l)} \left(\frac{x}{2(l+1)}\right)^l e^{-(l+1)} e^{(l+1)(1-x/(2l+2))} \\ &= C_l (1-z)^l e^{(l+1)z} = C_l e^{w(z)}, \end{aligned}$$

где

$$C_l = \frac{1}{2(l+1)} \frac{(l+1)^l}{\Gamma(l)} e^{-(l+1)}$$

и

$$w(z) = l \ln(1-z) + lz + z.$$

После ряда преобразований мы придем к формулам (16) и (17).

Так как $0 \leq z \leq \sqrt{l}/(2l+2) < 0,1$, то

$$\ln(1-z) \geq -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{(3-3z)} \geq -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2,7}$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} w(z) &= l \ln(1-z) + lz + z \geq z - \frac{lz^3}{2,7} - \frac{lz^2}{2} = z \left(1 - \frac{lz^2}{2,7}\right) - \frac{lz^2}{2} \\ &\geq z \left(1 - \frac{l}{2,7} \frac{l}{4(l+1)^2}\right) - \frac{l}{2} t^2 \frac{l}{(l+1)^2} \geq -\frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$p(x; \chi_k^2) \geq C_l e^{-t^2/2}. \quad (16)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{k+2-\frac{1}{2}\sqrt{2k}}^{k+2} p(x; \chi_k^2) dx &\geq \sqrt{2\pi} C_l \int_{k+2-\frac{1}{2}\sqrt{2k}}^{k+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dx \\ &= \sqrt{2\pi} C_l \sqrt{2k} \int_{-1/2}^0 \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\ &= C'_l \left(\Phi(0) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) \right) = C'_l \left(\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0) \right), \quad (17) \end{aligned}$$

где, как уже указывалось, $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения и

$$C'_l = 2\sqrt{2\pi l} C_l = 2\sqrt{2\pi l} \frac{1}{2(l+1)} \frac{(l+1)^l}{\Gamma(l)} e^{-(l+1)}.$$

Применяя вытекающее из формулы Стирлинга неравенство

$$\Gamma(l) \leq l^{l-1/2} e^{-l} \sqrt{2\pi} e^{1/(12l)},$$

получаем оценку

$$C'_l \geq \frac{l}{l+1} \left(\frac{l+1}{l} \right)^l e^{-1} e^{-1/(12l)}.$$

Так как

$$l \ln \left(\frac{l+1}{l} \right) - 1 = l \ln \left(1 + \frac{1}{l} \right) - 1 \geq l \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{2l^2} \right) - 1 \geq -\frac{1}{2l},$$

то при $l \geq 26$

$$C'_l \geq \frac{l}{l+1} e^{-1/(2l)} e^{-1/(12l)} \geq 0,94135,$$

а

$$C'_l \left(\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0) \right) \geq 0,94135 \times 0,19146 = 0,18023.$$

Лемма 3 доказана.

Оценим теперь

$$\min_{x \in \Delta_k} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)^+$$

(см. формулы (10а), (10б), (11) и (12)). Напомним, что пока рассматриваются только четные значения $k = 2l$, причем полагаем

$$2l \leq s - 4. \quad (18)$$

Запишем отношение f/g в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = A h(x), \quad 0 < x < s, \quad (19)$$

где

$$A = \left(\frac{2}{s}\right)^{k/2} \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((s-k)/2)}$$

и

$$h(x) = \begin{cases} e^{x/2} \left(1 - \frac{x}{s}\right)^\gamma, & \gamma = \frac{s - (k+2)}{2}, \quad \text{при } 0 < x < s, \\ 0 & \text{при } x \geq s, \end{cases}$$

при этом, в силу (18), $\gamma \geq 1$.

Введем функцию $u(x)$, определенную на $(0, (s-1)/2)$ равенством

$$u(x) = \ln \frac{1}{1 - 2x/s}.$$

Как легко проверить, в области определения эта функция является возрастающей, положительной и выпуклой, причем

$$u'(x) = \frac{2}{s - 2x}, \quad u''(x) = \frac{4}{(s - 2x)^2}.$$

Учитывая четность k , можно записать A в виде

$$A = \left(1 - \frac{2}{s}\right) \left(1 - \frac{4}{s}\right) \left(1 - \frac{6}{s}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{s}\right),$$

а

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln \left(1 - \frac{2}{s}\right) + \cdots + \ln \left(1 - \frac{k}{s}\right) \\ &= -\ln \frac{1}{1 - 2/s} - \ln \frac{1}{1 - 4/s} - \cdots - \ln \frac{1}{1 - 2l/s} \\ &= -(u(1) + u(2) + \cdots + u(l)). \end{aligned}$$

Лемма 4. Максимальное значение функции $h(x)$, $0 \leq x \leq s$, достигается в единственной точке $x = k + 2$, при этом

$$\ln h(k + 2) = \int_0^{(k+2)/2} u(x) dx.$$

Доказательство леммы 4 осуществляется прямым подсчетом $\ln h(k + 2)$ и применением формулы

$$\int \ln(ax + b) dx = \frac{1}{a} (ax + b) \ln(ax + b) - x + \text{const}.$$

Следствие 1. Величина $\ln A + \ln h(k+2)$ равна разности между интегралом $\int_0^{(k+2)/2} u(x) dx = \int_0^{l+1} u(x) dx$ и интегральной суммой $u(1) + u(2) + \dots + u(l)$.

Следствие 2. Эта разность не меньше, чем $(u'(1) + u'(2) + \dots + u'(l))/2$, т. е. не меньше суммы

$$T = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-4} + \dots + \frac{1}{s-2l}.$$

Запишем сумму T в виде (при $\alpha = s/2$)

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-2} + \dots + \frac{1}{\alpha-l} \right)$$

и воспользуемся неравенством: при $x > 0$

$$\frac{1}{x} \geq \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\alpha}{\alpha-1} + \ln \frac{\alpha-1}{\alpha-2} + \dots + \ln \frac{\alpha-l+1}{\alpha-l} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\alpha-l} = \frac{1}{2} \ln \frac{2\alpha}{2\alpha-2l} = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{s-2l} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-2l/s}. \end{aligned}$$

Тем самым установлена следующая оценка.

Лемма 5. Справедливо неравенство

$$\ln A + \ln h(k+2) \geq \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-2l/s}. \quad (20)$$

Перейдем к изучению

$$\ln \frac{f}{g} = \ln A + \ln h(k+2) + \ln h(x) - \ln h(k+2),$$

предполагая, что $0 < x < s-1$. Производные функции

$$\Psi(x) = \ln h(x) = \frac{x}{2} + \gamma \ln \left(1 - \frac{x}{s} \right)$$

равны

$$\Psi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{s-x}, \quad \Psi'(k+2) = 0, \quad \Psi''(x) = -\frac{\gamma}{(s-x)^2}.$$

При этом функция $\Psi''(x)$ возрастает (по абсолютной величине) от γ/s^2 до $1/(2(s-k-2))$ при изменении x от 0 до $k+2$.

Таким образом, с некоторым θ , $0 < \theta < k + 2$,

$$\begin{aligned}\Psi(x) - \Psi(k + 2) &= -\frac{(x - k - 2)^2}{2} |\Psi''(\theta)| \geq -\frac{(x - k - 2)^2}{2} |\Psi''(k + 2)| \\ &= -\frac{(x - s - k)^2}{2} \frac{1}{2(s - k - 2)}.\end{aligned}$$

Предполагая теперь, что $x \in \Delta_k$, т. е. $-\sqrt{2k}/2 \leq x - k - 2 \leq 0$, имеем:

$$\Psi(x) - \Psi(k + 2) \geq -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2k}}{2} \right)^2 \frac{1}{2(s - k - 2)} = -\frac{1}{8} \frac{k}{s - k - 2}. \quad (21)$$

Теперь мы должны сопоставить величины, стоящие в правых частях неравенств (20) и (21), т. е.

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1 - k/s} \quad \text{и} \quad \frac{1}{8} \frac{k}{s - k - 2}.$$

Введем обозначением: $\theta = k/s$.

Лемма 6. При $\theta \leq \frac{1}{4}$ и $s \geq 8$ имеет место неравенство

$$\ln \frac{1}{1 - \theta} \geq \frac{1}{2} \frac{\theta}{1 - \theta - 2/s}.$$

Доказательство леммы 6. Как легко убедиться,

$$\ln \frac{1}{1 - \theta} \geq \theta + \frac{\theta^2}{2}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\theta}{1 - \theta - 2/s} &\leq \frac{1}{2} \frac{\theta}{3/4 - \theta} = \frac{2}{3} \frac{\theta}{1 - 4\theta/3} \\ &= \frac{2}{3} \theta \left(1 + \frac{4\theta/3}{1 - 4\theta/3} \right) < \frac{2}{3} \theta + \frac{2}{3} \frac{4}{3} \theta^2 \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{2}{3} \theta + \frac{4}{3} \theta^2.\end{aligned}$$

Разность

$$\left(\theta + \frac{\theta^2}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} \theta + \frac{4}{3} \theta^2 \right) = \frac{\theta}{3} - \frac{5}{6} \theta^2 = \frac{\theta}{3} \left(1 - \frac{5}{2} \theta \right) \geq \frac{\theta}{3} \left(1 - \frac{5}{8} \right)$$

положительна.

Лемма 6 доказана.

Следствие. Имеет место неравенство

$$\frac{1}{4} \ln \frac{1}{1 - \theta} \geq \frac{1}{8} \frac{\theta}{1 - \theta - 2/s},$$

т. е.

$$\frac{1}{4} \ln \frac{1}{1 - k/s} \geq \frac{1}{8} \frac{k}{s} \frac{1}{1 - k/s - 2/s} = \frac{1}{8} \frac{k}{s - k - 2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\ln A + \ln h(x) &= \ln A + \ln h(k+2) + \ln h(x) - \ln h(k+2) \\ &\geq \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-k/s} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-k/s} = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-k/s}.\end{aligned}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. При $k+2 - \sqrt{2k}/2 \leq x \leq k+2$, $k/s \leq \frac{1}{4}$ и $s \geq 8$

$$\ln A h(x) \geq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-k/s}.$$

Следствие. В условиях леммы 7

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - 1 &= \exp \{ \ln A h(x) \} - 1 \geq \exp \left\{ \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-k/s} \right\} - 1 \\ &\geq \frac{1}{4} \ln \frac{1}{1-k/s} \geq \frac{1}{4} \frac{k}{s}.\end{aligned}$$

Мы приходим к основной теореме этой работы.

Теорема 1. При четном k ($k = 2l$), $k \leq s-4$, $k/s \leq \frac{1}{4}$, $s \geq 8$ величина ρ_k (см. (11) и (12)) удовлетворяет неравенству

$$\rho_k \geq \frac{1}{4} \frac{k}{s} 0,085.$$

З а м е ч а н и е 1. Если k нечетно ($k = 2l+1$, $l \geq 1$), то

$$\rho_k \geq \rho_{2l} \geq \frac{1}{4} \frac{k-1}{s} 0,085.$$

З а м е ч а н и е 2. С л у ч а й $k = 1$. В соответствии с формулой (6) при $s \geq 3$

$$p(x; X_1) = \frac{\Gamma(s/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma((s-1)/2)} (1-x^2)^{(s-3)/2}, \quad 0 \leq x^2 < 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}p(x; \sqrt{s} X_1) &= \frac{1}{\sqrt{s}} p\left(\frac{x}{\sqrt{s}}; X_1\right) = \frac{\Gamma(s/2)\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi} \Gamma((s-1)/2)} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{x^2}{s}\right)^{(s-3)/2} \\ &= L_s \left(1 - \frac{x^2}{s}\right)^{(s-3)/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad 0 \leq x^2 < s,\end{aligned}$$

где

$$L_s = \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((s-1)/2)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}}.$$

Лемма 8. Величина L_s не превосходит единицы, более того,

$$L_s \leq e^{-3/(4s)-1/(2s^2)}. \quad (22)$$

Примеры. 1) Пусть $s = 15$. Тогда $L_{15} = 0,949007584$. Формула (22) дает $L_{15} \leq 0,949117928$.

2) Пусть $s = 100$. Тогда $L_{100} = 0,99247806$. Формула (22) дает $L_{100} \leq 0,99247843$.

Доказательство леммы основано на элементарных вычислениях, использующих формулу Стирлинга в виде

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12z} - \frac{\theta}{360z^3}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Сравним плотность $p(x; X_1)$ с $(1/\sqrt{2\pi}) e^{-x^2/2}$.

Лемма 9. При $6 \leq u \leq 11$, $s \geq 12$

$$(s-3) \ln \left(1 - \frac{u}{s}\right) \leq -u.$$

Следствие. При $6 \leq x^2 \leq 11$ (u тем более, при $2,5 \leq x \leq 3,3$), $s \geq 12$

$$\left(1 - \frac{x^2}{s}\right)^{(s-3)/2} \leq e^{-x^2/2}.$$

Доказательство леммы 9. Разложим функцию

$$s \ln \left(1 - \frac{u}{s}\right) - 3 \ln \left(1 - \frac{u}{s}\right)$$

в степенной ряд и получим

$$-u - \frac{u^2 - 6u}{2s} - \dots - \frac{u^k}{s^k} \left(\frac{ku - 3(k+1)}{k(k+1)} \right) - \dots;$$

значит, при $u \geq 6$ все коэффициенты при u^k/s^k отрицательны.

Перейдем теперь к оценке интеграла

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} - p(x; \sqrt{s} X_1) \right| dx.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} J &\geq 2 \int_{2,5}^{3,3} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L_s e^{-x^2/2} \right) dx \\ &= 2(1 - L_s) \int_{2,5}^{3,3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 2(1 - L_s)(\Phi(3,3) - \Phi(2,5)) \\ &> (1 - L_s) \times 0,01145. \end{aligned}$$

Теперь введем величину

$$\Psi_s = \frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2}.$$

При $s \geq 12$ имеем:

$$\Psi_s \leq \frac{19}{288} < 0,066 \quad \text{и} \quad e^{-\Psi_s} > 0,936.$$

Поэтому

$$1 - L_s = 1 - e^{-\Psi_s} = (e^{\Psi_s} - 1) e^{-\Psi_s} \geq \Psi_s e^{-\Psi_s} \geq 0,936 \left(\frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} \right).$$

Окончательно,

$$J \geq \left(\frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} \right) \times 0,936 \times 0,01145 \geq 0,01 \left(\frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} \right).$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. При $s \geq 12$ расстояние по вариации между случайными величинами $\sqrt{s}X_1$ и Z_1 не меньше, чем

$$0,005 \left(\frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} \right).$$

§ 3. Уточнение верхней оценки для расстояния ρ_k

И в подходе, каким неравенство (8) было получено в работе [1], и в подходе, которым в данной работе получены оценки снизу для расстояния ρ_k , ключевую роль играют оценки расхождения между интегралом

$$\int_0^{(k+2)/2} u(x) dx = \int_0^{l+1} u(x) dx$$

и интегральной суммой $u(1) + u(2) + \dots + u(l)$, где, напомним, $u(x)$ определена на интервале $(0, (s-1)/2)$ равенством

$$u(x) = \ln \frac{1}{1 - 2x/s}.$$

Покажем, каким образом несколько более полный учет свойств функции $u(x)$ на интервале $(0, (s-1)/2)$ позволяет дать более точную, чем (8), оценку сверху для расстояния ρ_k .

Для сокращения изложения ограничимся рассмотрением только четных $k = 2l$, $l = 1, 2, \dots$. Вернемся к формуле (19) для отношения $f(x)/g(x) = A h(x)$, $0 < x < s$, и запишем это отношение в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \exp \{ \ln A + \ln h(x) \} = \exp \{ \ln A + \ln h(k+2) + \ln h(x) - \ln h(k+2) \}.$$

Поскольку на рассматриваемом интервале разность $\ln h(x) - \ln h(k+2)$ отрицательна (см. лемму 4),

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \exp \{ \ln A + \ln h(k+2) \}.$$

Согласно следствию 1 леммы 4

$$\ln A + \ln h(k+2) = \int_0^{l+1} u(x) dx - (u(1) + u(2) + \dots + u(l)),$$

где

$$u(x) = \ln \frac{1}{1 - 2x/s}, \quad 0 \leq x < \frac{s-1}{2},$$

причем, как уже указывалось выше, в интервале $(0, (s-1)/2)$

$$u'(x) = \frac{2}{s-2x} > 0, \quad u''(x) = \frac{4}{(s-2x)^2} > 0$$

и, значит, функция $u(x)$ является на этом интервале неубывающей, положительной и выпуклой. Возьмем такое целое m , что $0 \leq m \leq l$, и оценим сверху разность $d_m = \int_m^{m+1} u(x) dx - u(m)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} d_m &= \int_m^{m+1} (u(x) - u(m)) dx \\ &\leq \int_m^{m+1} (x-m) (u(m+1) - u(m)) dx = \frac{1}{2} (u(m+1) - u(m)). \end{aligned}$$

Так как

$$d_0 + d_1 + \dots + d_l = \int_0^{l+1} u(x) dx - u(0) - u(1) - \dots - u(l) \leq \frac{1}{2} (u(l+1) - u(0)),$$

а $u(0) = 0$, получаем:

$$\ln A + \ln h(k+2) \leq \frac{1}{2} u(l+1).$$

Следовательно, с ϑ_k из (8')

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2(l+1)/s}} - 1 = \frac{\vartheta_k}{1 + \sqrt{1 + \vartheta_k}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_k &= \int_0^s \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)^+ g(x) dx \leq \int_0^s \frac{\vartheta_k}{1 + \sqrt{1 + \vartheta_k}} g(x) dx \\ &\leq \frac{\vartheta_k}{1 + \sqrt{1 + \vartheta_k}} \leq \frac{1}{2} \vartheta_k, \end{aligned}$$

что (для четных k) уменьшает полученную в [1] оценку сверху для расстояния ρ_k более, чем в два раза.

Заключительное замечание. Рассмотрим случайные векторы $\mathbf{Z}_{(k)} = (Z_1, \dots, Z_k) \in \mathbf{R}^k$, $\mathbf{X}_{(k)} = (X_1, \dots, X_k) \in \mathbf{R}^k$ и векторы $\{\sigma \mathbf{Z}_{(k)}\}$, $\{\sigma \mathbf{X}_{(k)}\}$ их дробных частей после умножения на масштабный параметр $\sigma > 0$. Расстояние по вариации между распределениями этих случайных векторов не превышает ρ_k . Расстояние по вариации между распределением $\{\sigma \mathbf{Z}_{(k)}\}$ и распределением, равномерным в единичном кубе пространства $\mathbf{R}^k$, оценено в работе [16].

Таким путем можно изучить распределение дробных частей $\{\sigma \mathbf{X}_{(k)}\}$. Эта тема будет развита во второй части этой статьи.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Ю. В. Прохорова, привлечшего внимание автора к результатам работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Diaconis P., Freedman D. A dozen de Finetti-style results: in search a theory. — Ann. Inst. H. Poincare, 1987, v. 23, p. 397–423.
2. Stam A. J. Limit theorems for uniform distributions on high dimensional Euclidean spaces. — J. Appl. Probab., 1982, v. 19, p. 221–228.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, с. 306.
4. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974, 331 с.
5. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. 2-е изд. М.: УРСС, 2002, 273 с.
6. Физтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. 5-е изд. М.: Физматлит, 1969.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Физматлит, 1981, 798 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. М. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Физматлит, 1983, 750 с.
9. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Ч.1. М.: ИЛ, 1949, 798 с.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 830 с.
11. Bochner S. Harmonic Analysis and the Theory of Probability. Berkeley–Los Angeles: Univ. California Press, 1955, 176 с.
12. Ботнер С. Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962.
13. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестник МГУ, 1953, т. 10, с. 29–38. (Перепечатано в кн.: Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986, с. 373–383.)
14. Ширяев А. Н. Вероятность. 2-е изд. М.: Наука, 1989, 640 с.
15. Sheffé H. A useful convergence theorem for probability distributions. — Ann. Math. Statist., 1947, v. 18, p. 434–438.
16. Куликова А. А., Прохоров Ю. В. Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 399–402.
17. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. 3-е изд. М.: Наука, 1983, 416 с.