Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, Условие равномерной интегрируемости в сильных предельных теоремах для отношений. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 517–532

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:13:52

© 2005 г.

ШУР М. Г.*

УСЛОВИЕ РАВНОМЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В СИЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ОТНОШЕНИЙ. I¹⁾

Задав цепь Маркова с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{E})$ и переходным оператором P и зафиксировав измеримую функцию $f \geq 0$, мы при надлежащих условиях рассматриваем величины $\mu(f_n)$, где $n \geq 1$ достаточно велико, $f_n = P^n f / \nu(P^n f)$, а μ и ν являются вероятностными мерами на $\mathcal{E}$. Для широкого класса ситуаций предложены достаточные, а по большей части необходимые и достаточные условия сходимости f_n к 1 при $n \rightarrow \infty$. Отличие этих результатов от принадлежащих Ори, Лину, Нуммелину и иным авторам проявляется в замене как традиционных условий типа возвратности цепи или равномерной ограниченности функций f_n , так и условия минорирования из [8] более гибкими предположениями, среди которых особую роль играет требование равномерной интегрируемости функций f_n относительно некоторого набора мер. Наши теоремы влекут слабую, а зачастую и сильную сходимость этих функций к $\varphi \equiv 1$ в соответствующих пространствах суммируемых функций.

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, сильная предельная теорема для отношений.

1. Введение

1. На протяжении работы всюду, где нет особых оговорок, речь идет об (однородной) цепи Маркова $X = (X_n; n \geq 0)$ с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{E})$ и переходным оператором P , действующим в пространстве $\mathcal{B}$ всех измеримых (т.е. $\mathcal{E}$ -измеримых) ограниченных снизу функций $f: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ (символ $\mathcal{B}_b$ будет обозначать семейство всех ограниченных $f \in \mathcal{B}$, а $\mathcal{B}_+$ — семейство $\{f \in \mathcal{B}_b: f \geq 0\}$). Сильные предельные теоремы для отношений (СПТО) при надлежащих условиях доставляют информацию о поведении отношений $\mu(P^{n+m}f)/\nu(P^n g)$ с целым m при $n \rightarrow \infty$, где $f, g \in \mathcal{B}_+$, меры μ и ν берутся из той или иной

* Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №04-01-169).

части семейства $\mathcal{P}$ всех вероятностных мер на $\mathcal{E}$, а символ типа $\mu(\varphi)$ обозначает интеграл $\int \varphi d\mu$, коль скоро тот имеет смысл для какой-либо функции φ . Эта информация, содержащаяся, например, в приведенных ниже соотношениях (1.2) и (1.5), существенно уточняет утверждения таких классических предельных теорем для отношений, как предельная теорема Дёблина для счетных возвратных цепей Маркова (см. [10, § 1.9] или [4, гл. 4]) или эргодическая теорема Чакона–Орнштейна, сформулированная в терминах положительных сжатий пространств суммируемых функций (см. [7], [9]).

Первые СПТО связаны с именами К. Л. Чжуна, П. Эрдёша, С. Ори, Н. Джейна и других авторов. Среди соответствующих результатов, подытоженных в [4], наиболее отшлифованы, на наш взгляд, относящиеся к дискретным возвратным цепям Маркова, причем в качестве прекрасного введения в этот круг вопросов можно рекомендовать книгу [16], описывающую, в частности, связи между СПТО, проблемами суммирования независимых случайных величин и теорией потенциала. В последовавших СПТО чаще всего рассматривались цепи с измеримыми пространствами состояний, включая, в частности, возвратные по Харрису цепи, симметричные цепи, случайные блуждания на алгебраических структурах (см., например, [2], [3], [8], [11]–[15]). Здесь мы напомним следующую СПТО из [8] (по поводу терминологии см. [8] или наш § 4; пока лишь условимся целые неотрицательные числа обозначать латинскими буквами от i до n включительно и, работая с вещественными a_n и b_n , $n \geq 0$, писать $a_n \sim b_n$, если $a_n/b_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$).

Теорема 1.1. Пусть σ -алгебра $\mathcal{E}$ счетнопорождена, а цепь X возвратна по Харрису и апериодична. Пусть функции $\mu, \nu \in \mathcal{P}$ и меры $f, g \in \mathcal{B}$ являются малыми и

$$\nu(P^{n+1}f) \sim \nu(P^n f). \quad (1.1)$$

Тогда при любом m

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(P^{n+m}g)}{\nu(P^n f)} = \frac{\pi(g)}{\pi(f)}, \quad (1.2)$$

где π — σ -конечная инвариантная мера для X ($\pi(E) > 0$).

Отметим, что при осуществлении (1.2) для достаточно большого запаса функций f, g и мер μ, ν нередко говорят о наличии у X свойства равномерности относительно π .

При выводе соотношений типа (1.2) в ряде случаев удалось заменить требование возвратности по Харрису более слабыми (к примеру, условием Лиувилля; см. [2], [11]–[15]). Кроме того, как видно из указанных работ, проверка условия (1.1) — а в дискретном случае его ослабленного варианта [4] — часто вызывает затруднения. Поэтому представляет интерес следующая теорема из [13], являющаяся версией теоремы

М. Лина [3] и отличающаяся от последней, например, отсутствием требований типа абсолютной непрерывности рассматриваемых мер.

Теорема 1.2. Пусть $f \in \mathcal{B}_+$ и $\nu \in \mathcal{P}$ таковы, что $\nu(P^n f) > 0$ при всех n , начиная с некоторого натурального n_0 , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(P^{n+1} f)}{\nu(P^n f)} \geq 1. \quad (1.3)$$

Пусть семейство функций $\mathcal{F} = \{f_n; n \geq n_0\}$ равномерно ограничено в E , где $f_n = P^n f / \nu(P^n f)$, $n \geq n_0$, и пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mu - \nu) P^n\| = 0 \quad (1.4)$$

для некоторой меры $\mu \in \mathcal{P}$. Тогда

$$\mu(P^n f) \sim \nu(P^n f). \quad (1.5)$$

Если, помимо указанных условий, применимо и (1.4) с νP вместо μ , то

$$\mu(P^{n+1} f) \sim \mu(P^n f) \quad \text{и} \quad \nu(P^{n+1} f) \sim \nu(P^n f). \quad (1.6)$$

Разумеется, справедливость (1.2) с $g = f$ и $g = Pf$ автоматически влечет (1.5) и (1.6). Поэтому теоремы, обеспечивающие применимость соотношений вида (1.5) или (1.6), можно трактовать как *простейшие* СПТО. Они имеют самостоятельную ценность, и, как правило, из них достаточно просто выводятся обычные СПТО (см. [3], [13] и часть II данной работы). Что касается требования (1.4), при его реализации с любыми $\mu, \nu \in \mathcal{P}$ естественно говорить об осуществлении благоприятной возможности, предусмотренной вторым законом нуля-двойки в форме Дерриеника и гарантированной, в частности, для возвратных по Харрису цепей Маркова со счетнопорожденной σ -алгеброй $\mathcal{E}$ [9].

2. Основная задача данной части работы состоит в получении простейших СПТО с более гибкими условиями, нежели имеющиеся в приведенных теоремах. Так, равномерная ограниченность семейства $\mathcal{F}$ не гарантируется даже в довольно простых ситуациях (см. [3, теорема 2.4]), и поэтому в наших СПТО 2.1 и 2.2 используется требование равномерной интегрируемости $\mathcal{F}$ по некоторым мерам, а в СПТО 2.3 — его усиленный вариант. Кроме того, в отличие от [8], мы по возможности не предполагаем цепь X ни возвратной по Харрису, ни удовлетворяющей условию минорирования из указанной книги, хотя при условиях из [8] рассматриваемый нами класс мер $\mathcal{M}_1(\nu)$ совпадает с классом малых мер в смысле [8]. Теоремы 2.1–2.4 мы считаем основными результатами работы (см. §§ 2 и 3). Способы проверки не совсем привычных предположений этих теорем обсуждаются в § 4, для чего пришлось внести некоторые уточнения в терминологию книги [8]. Читатель, готовый

считать $\mathcal{E}$ счетнопорожденной и постулировать упоминавшееся условие минорирования, может игнорировать эти уточнения.

Во второй части работы мы обсудим, каким образом можно полностью избавиться от предположений типа (1.1).

Ввиду леммы 3.1 наши результаты, в основном, связаны со слабой предкомпактностью семейства $\mathcal{F}$ в некоторых пространствах суммируемых функций (хотя иногда слабую топологию удается заменить сильной; см. теорему 2.4). Поэтому мы активно используем известный критерий Данфорда–Петтиса слабой компактности [1], [5], устанавливающий связь между слабой предкомпактностью и равномерной интегрируемостью функциональных семейств.

2. Обозначения и формулировки основных результатов

1. Начнем с обозначений. В части, непосредственно касающейся основных результатов работы, используются терминология и обозначения, близкие к традиционным для теории цепей Маркова в измеримых пространствах состояний [4], [9], но позже потребуются некоторые уточнения (см. § 4).

Как уже говорилось, в работе фиксируется измеримое пространство $(E, \mathcal{E})$. Под измеримыми функциями понимаются $\mathcal{E}$ -измеримые функции на E , а под мерами — σ -конечные меры на $\mathcal{E}$, причем мера ξ именуется тривиальной, если $\xi \equiv 0$. Совокупность всех мер обозначается $\mathcal{M}$.

Фиксируется также цепь Маркова $X = (X_n; n \geq 0)$ с пространством состояний $(E, \mathcal{E})$ и одношаговыми переходными вероятностями $p(\cdot, \cdot) \equiv p_1(\cdot, \cdot)$, и сохраняются уже введенные обозначения: $\mathcal{B}_+$, $\mathcal{P}$, $p_n(\cdot, \cdot)$ и т.д. Переходный оператор P определим равенством $Pf(x) = \int f(y) p(x, dy)$, $x \in E$, $f \in \mathcal{B}$, но иногда он будет истолковываться несколько иначе (см. § 3). Для $\alpha \geq 0$ и $f \in \mathcal{B}_+$ положим

$$G^\alpha f = \sum_{n \geq 0} \alpha^n P^n f \quad (2.1)$$

и $Gf = G^1 f$. Для ограниченного заряда μ на $\mathcal{E}$ его норму $\|\mu\|$ приравняем к его вариации, т.е. к $\sup\{\mu(f); f \in \mathcal{B} \text{ и } |f| \leq 1\}$, а заряды μP^n , $n \geq 1$, определим равенством $\mu P^n(f) = \mu(P^n f)$, $f \in \mathcal{B}_+$, распространив последнее определение и на любые меры μ на $\mathcal{E}$. Положим также $\mu G^\alpha(A) = \mu(G^\alpha 1_A)$, где 1_A — функция-индикатор измеримого множества A , а $\mu \in \mathcal{M}$ (разумеется, $\mu G^\alpha \notin \mathcal{M}$ при некоторых $\mu \in \mathcal{M}$ и $\alpha \geq 0$).

Измеримая функция $f: E \rightarrow [0, \infty]$ называется гармонической (для X), если $f \equiv Pf$ и $f \neq \infty$. Задав нетривиальную меру $\xi \in \mathcal{M}$, назовем цепь X обладающей ξ -свойством Лиувилля, коль скоро всякая гармоническая функция равна некоторой константе ξG^α -п.в. (т.е. ξG^α -поч-

ти всюду) при каком-либо, а потому и всех $\alpha > 0$. Всякая цепь Маркова, возвратная по Харрису, обладает ξ -свойством Лиувилля, если σ -алгебра $\mathcal{E}$ счетнопорождена и мера ξG^α абсолютно непрерывна относительно соответствующей инвариантной меры [4], [9].

Выделим некоторые подсемейства семейства $\mathcal{M}$. Всякой мере $\nu \in \mathcal{M}$, для которой $\eta = \nu G^\alpha \in \mathcal{M}$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$, сопоставим семейство $\mathcal{M}(\nu)$ всех мер $\mu \ll \nu$ с ограниченными плотностями $d\mu/d\nu$ и семейство $\mathcal{M}_1(\nu) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{M}(\nu P^n)$, а из этих семейств выделим соответствующие подсемейства вероятностных мер $\mathcal{P}(\nu)$ и $\mathcal{P}_1(\nu)$. Ясно, что если $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, то и $\mu P^n \in \mathcal{P}_1(\nu)$, $n \geq 0$, и что $\mathcal{P}(\nu) \subset \mathcal{P}_1(\nu) \subset \mathcal{P}(\eta)$, благодаря чему, в частности $\mathcal{P}_1(\eta) = \mathcal{P}(\eta)$. Разумеется, любая мера $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$ допускает плотность $h = d\mu/d\eta$ (этот факт мы отражаем в виде равенств $\mu = h\nu$ или $\mu = h \cdot \nu$). Поэтому

$$\mu = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m \mu_m, \quad (2.2)$$

если μ имеет указанный вид, где $\mu_m = h \cdot \nu P^m \in \mathcal{M}_1(\nu)$.

2. Переходя к формулировкам основных результатов, назовем пару $\{f, \nu\}$, состоящую из каких-либо $f \in \mathcal{B}_+$ и $\nu \in \mathcal{P}$, стандартной, если $\nu(P^n f) > 0$ при всех n , начиная с некоторого $n = n_0$.

Далее в §§ 2 и 3 фиксируется стандартная пара $\{f, \nu\}$ с соответствующим n_0 , а под $\mathcal{F}$, как и в § 1, подразумевается семейство $\{f_n; n \geq n_0\}$, где $f_n = P^n f / \nu(P^n f)$. Задается и мера $\eta = \nu G^\alpha$ с $\alpha \in (0, 1)$.

Мы предлагаем следующие необходимые и достаточные условия для реализации соотношения $\mu(P^n f) \sim \nu(P^n f)$, т.е. соотношения (1.5) с подходящими μ (см. теоремы 2.1 и 2.2, а также замечание 2.1).

Теорема 2.1. Пусть цепь X обладает ν -свойством Лиувилля (см. п. 1). Тогда для справедливости (1.5) с произвольным $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

(2А) семейство $\mathcal{F}$ равномерно интегрируемо по каждой мере νP^n , $n \geq 0$;

(2Б) для всех $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$

$$\mu(P^{n+1} f) \sim \mu(P^n f). \quad (2.3)$$

Из приведенных ниже условий (2Б₁) и (2Б₂) видно, что при проверке (2.3) довольно часто можно ограничиться случаем $\mu = \nu$, но иногда (см. (2Б₁)) можно избежать и этого. Простое условие, влекущее (2А), указано в предложении 4.1.

З а м е ч а н и е 2.1. а) Теорема останется в силе, если (1.5) усилить до соотношения $\mu(P^{n+m} f) \sim \nu(P^n f)$ с любыми $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$ и $m \geq 1$. Действительно, в силу (1.5) и (2.3) $\mu(P^{n+1} f) \sim \nu(P^{n+1} f) \sim \nu(P^n f)$,

если $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, а при рассмотрении прочих μ применимо следствие 3.1 (кстати, оно же позволяет в теореме заменить $\mathcal{P}(\eta)$ на $\mathcal{P}_1(\nu)$).

б) Как показано при доказательстве теоремы 2.1, она сохранит силу и тогда, когда условие 2Б заменяется условием

(2Б₁) при $\mu = \nu$ применимо (2.3) (иными словами, применимо (1.1)) и при любых $\mu \in \mathcal{P}_1(\eta)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(P^{n+1}f)}{\mu(P^n f)} \leq 1 \quad (2.4)$$

(при этом требование, касающееся (2.3), можно опустить, если цепь X возвратна по Харрису, σ -алгебра $\mathcal{E}$ счетнопорождена и $\eta \ll \pi$, где π — нетривиальная мера, инвариантная для X).

Здесь вместо π можно рассмотреть любую максимальную меру неприводимости цепи X (см. § 4).

Первый пункт замечания 2.1 переносится и на теорему 2.2.

Теорема 2.2. Теорема 2.1 останется в силе, если в ней вместо (2Б) использовать следующее требование:

(2Б₂) при $\mu = \nu$ справедливо (2.1) (ср. с (2Б₁)) и при всех $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(P^{n+1}f)}{\mu(P^n f)} \geq 1. \quad (2.5)$$

Как показывает пример 1 из [13], следующая теорема является полезным дополнением теоремы 1.2, причем доказательства обеих теорем сходны с доказательством теоремы 2.1 из [3].

Теорема 2.3. Пусть а) выполняется условие (2А) и найдется такое $M > 0$, что $\nu P^m(A_n) \rightarrow 0$, $m \geq 0$, при $n \rightarrow \infty$, где $A_n = \{x \in E: f_n(x) > M\}$, $n \geq n_0$, и б) требование а) сохранит силу и при замене ν некоторой мерой $\mu \in \mathcal{P}$. Если вдобавок имеют место (1.3) и (1.4), то реализуется и (1.5), а если еще выполняется (1.4) с νP вместо μ , то применимо и (1.6).

По лемме 3.1 осуществление (1.5) для всех $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$ влечет для тех же и некоторых других μ слабую сходимость f_n к 1 в $L(\mu)$ при $n \rightarrow \infty$. Нередко это заключение удастся усилить следующим образом.

Теорема 2.4. Пусть $\sup_{n \geq 1} q_n(x, E) = 1$ для всех $x \in E$, где $q_n(x, \cdot)$ — абсолютно непрерывная составляющая меры $p_n(x, \cdot)$ относительно η . Если (1.5) применимо с любыми $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 1$ всюду в E , причем $f_n \rightarrow 1$ в смысле сильной сходимости в $L(\mu)$ для всех $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$.

Условие, включенное в первую фразу этой теоремы, выполнено, в частности, если $q_n(x, E) \rightarrow 1$ всюду в E при $n \rightarrow \infty$, что характерно, например, для многих случайных блужданий на группах и соответствующих ν (см. доказательство предложения 1.6 в [9, гл. 5]).

3. Доказательства основных результатов

1. В этом параграфе мы продолжаем рассматривать некоторую стандартную пару $\{f, \nu\}$ вместе с соответствующими $n_0, f_n, \mathcal{F}$ и $\eta = \nu G^\alpha$, где $\alpha \in (0, 1)$, причем начинаем с серии лемм.

Лемма 3.1. *Если соотношение (1.5) справедливо для любых $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, то функции f_n слабо сходятся к 1 при $n \rightarrow \infty$ в любом из пространств $L(\mu)$, $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$ (т.е. $\mu(f_n u) \rightarrow \mu(u)$ для $u \in \mathcal{B}_b$).*

Доказательство. Пусть сначала $\xi \in \mathcal{P}$ и $\xi = g \cdot \nu P^m$ при некоторых $m \geq 0$ и $g \in \mathcal{B}_+$. Если $n \rightarrow \infty$, то

$$\nu P^m(f_n g) \rightarrow \nu P^m(g), \quad (3.1)$$

так как левая часть (3.1) при $n \geq n_0$ совпадает с величиной $\xi(f_n)$, стремящейся ввиду (1.5) к 1, а правая равна $\xi(E) = 1$. Поэтому (3.1) применимо с любой функцией $g \in \mathcal{B}_+$, для которой $P^m(g) > 0$, и то же можно сказать, если $g = 0$ νP^m -п.в. Теперь из (3.1) следует утверждение леммы для $\mu = \nu P^m$, $m \geq 0$, а вместе с тем и для всех $\mu \in \mathcal{M}_1(\nu)$.

Пусть известно лишь, что $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$, и пусть $\alpha(1 + \varepsilon) < 1$, где $\varepsilon > 0$. В соответствии с (1.5) отношения $\nu(P^{m+1}f_n)/\nu(P^m f_n) = \nu(P^{m+n+1}f)/\nu(P^{m+n}f)$ и $\nu(P^{N+n}f)/\nu(P^N f) = \nu(P^N f_n)$ стремятся к 1 при $m + n \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ соответственно, где N — натуральное число. Поэтому при некотором $N_1 > 0$ и всех $N > N_1$ они не превосходят $1 + \varepsilon$, если n превышает некое $n_1 = n_1(N) \geq n_0$ (вскоре выбор N_1 будет уточнен), и при $m > N > N_1$ и $n \geq n_1$ мы приходим к неравенству $\nu(P^m f_n) \leq (1 + \varepsilon)^{m-N} \nu(P^N f_n)$, согласно которому

$$s_n \equiv \sum_{m \geq N+1} \alpha^m \mu_m(f_n) \leq a \sum_{m \geq N+1} \alpha^m \nu(P^m f_n) \leq b \alpha^N \nu(P^N f_n) \leq (1 + \varepsilon) b \alpha^N,$$

где $\mu_m = h \cdot \nu P^m$ — те же, что и в (2.2), $a = \sup h$, $b = a[1 - \alpha(1 + \varepsilon)]^{-1}$ и $n \geq n_1$. Отсюда вывод: $s_n < \varepsilon$ при $n \geq n_1$ и $N \geq N_1$, если N_1 выбрано так, чтобы $(1 + \varepsilon) b \alpha^{N_1} < \varepsilon$, что мы и предположим впредь.

Пусть $u \in B_+$ и $|u| \leq 1$. Наш вывод ввиду (2.2) влечет неравенства

$$\left| \mu(u f_n) - \sum_{0 \leq m \leq N} \alpha^m \mu_m(u f_n) \right| \leq s_n < \varepsilon \quad (N \geq N_1, n \geq n_1).$$

Но $\mu_m \in \mathcal{M}_1(\nu)$ и, следовательно, $\mu_m(u f_n) \rightarrow \mu_m(u)$ при $n \rightarrow \infty$ (см. начало доказательства). По этой причине $\mu(u f_n)$ отличается от $\sigma_N = \sum_{0 \leq m \leq N} \alpha^m \mu_m(u)$ не больше, чем на 2ε , при заданном $N \geq N_1$ и достаточно большом n . Увеличив же при необходимости N , можем с учетом (2.2) считать, что $|\mu(u) - \sigma_N| < \varepsilon$. Таким образом, $\mu(u f_n) \rightarrow \mu(u)$ при $n \rightarrow \infty$, и лемма доказана.

Следствие 3.1. *Если соотношение (1.5) выполняется для любых $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, то оно справедливо и для всех $\mu \in \mathcal{P}(\eta)$.*

2. Всюду в этом пункте *постулируется условие* (2A). Кроме того, принимаются следующие соглашения. Символами $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}$ и т.п. будут обозначаться возрастающие последовательности натуральных чисел, каждое из которых не меньше введенного выше n_0 . Запись типа « $g_n \xrightarrow{w} g$ в $L(\mu)$, $n \in \mathfrak{N}$ », где μ — некоторая конечная мера, будет подразумевать, что $g_n, g \in L(\mu)$, $n \in \mathfrak{N}$ и функции g_n слабо сходятся в $L(\mu)$ к g , когда $n \rightarrow \infty$, пробегая $\mathfrak{N}$.

Лемма 3.2. *Каждая последовательность $\{f_n; n \in \mathfrak{N}\}$ содержит подпоследовательность $\{f_n; n \in \mathfrak{M}\}$, слабо сходящуюся в любом из пространств $L(\mu)$, $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, к некоторой функции F , одной и той же для указанных μ .*

Доказательство. Сначала, задав $m \geq 0$, допустим, что $f_n \xrightarrow{w} F$ в $L(\nu_m)$, $n \in \mathfrak{M}$, при подходящем выборе F и $\mathfrak{M}$, где $\nu_m = \sum_{0 \leq i \leq m} \nu P^i$. Тогда $\nu P^i = h_i \nu_m$ с некоторыми $h_i \in \mathcal{B}_+$, $0 \leq i \leq m$, и для $u \in \mathcal{B}_b$ получаем

$$\nu P^i(uf_n) = \nu_m(uh_i f_n) \longrightarrow \nu_m(uh_i F) = \nu P^i(uF), \quad (3.2)$$

когда $n \rightarrow \infty$ вдоль $\mathfrak{M}$. Иными словами, в нашем случае $f_n \xrightarrow{w} F$ в $L(\nu P^i)$, $n \in \mathfrak{M}$, при $0 \leq i \leq m$, чем вскоре мы и воспользуемся.

Опираясь на упоминавшийся в § 1 критерий Данфорда–Петтиса, выделим из $\mathfrak{N}$ одну за другой подпоследовательности $\mathfrak{N}_0 \supset \mathfrak{N}_1 \supset \dots$, для которых $f_n \xrightarrow{w} F_m$ в $L(\nu_m)$, $n \in \mathfrak{N}_m$, при подходящем выборе функций $F_m \geq 0$, $m \geq 0$. Так как меры ν_i , $0 \leq i \leq m$, допускают плотности $h_{im} = d\nu_i/d\nu_m \leq 1$, то $\nu_i(uf_n) = \nu_m(uh_{im}f_n)$ для $u \in \mathcal{B}_b$. Отсюда следует (ср. (3.2)), что $\nu_i(uF_i) = \nu_m(uh_{im}F_m) = \nu_i(uF_m)$ для тех же u , а это возможно лишь при $F_i = F_m$ ν_i -п.в., $i \geq 0$. Итак, $f_n \xrightarrow{w} F$ в $L(\nu_m)$, $n \in \mathfrak{N}_m$ при всех $m \geq 0$, где, например, можно взять $F = \varprojlim_{m \rightarrow \infty} F_m$. В этой фразе допустимо $\mathfrak{N}_m$ заменить «диагональной» последовательностью $\mathfrak{M}$, образующейся при выписывании один за другим первого элемента из $\mathfrak{N}_0$, второго из $\mathfrak{N}_1$ и т.д., после чего, вспомнив начало доказательства, получаем утверждение леммы для любых $\mu = \nu P^m$, $m \geq 0$, что и требовалось.

Чтобы подготовиться к следующему доказательству, рассмотрим меру ξ , удовлетворяющую условию:

$$\xi P \leq C\xi \quad (3.3)$$

при некотором $C > 0$ (в число таких мер входят, например, инвариантные меры, для которых $C = 1$, и меры $\xi = \mu G^\alpha$ с $\mu \in \mathcal{P}$, для которых можно взять $C = \alpha^{-1}$). Это условие позволяет трактовать P как ограниченный оператор, действующий в пространстве $L(\mu)$ (ср. [3], [7], [9]). Точнее, если $\hat{f}$ — класс функций, эквивалентных (относительно ξ) функции f , суммируемой по ξ , то Pf определяют как класс функций, экви-

валентных функции $\int f(y) p(\cdot, dy)$, заведомо определенной ξ -п.в. Тем самым, сохранив обозначение P , получают новый линейный оператор P , действующий в $L(\xi)$, с нормой $\|P\| \leq C$. Ему сопоставляется двойственный оператор P^* , действующий в $L_\infty(\xi)$, с нормой $\|P^*\| = \|P\|$, для которого $\xi(fP^*g) = \xi(gPf)$, если $f \in L(\xi)$ и $g \in L_\infty(\xi)$ [5], [7], [9].

При этом стоит отметить, что если некоторая мера $\nu \in \mathcal{M}$ имеет ограниченную плотность $g = d\nu/d\xi$, то ξ -п.в.

$$P^{*n}g = \frac{d(\nu P^n)}{d\xi} \quad (3.4)$$

при $n \geq 0$ (разумеется, $P^{*n} = (P^*)^n$). В самом деле, заставив f пробегать $\mathcal{B}_+$, выводим (3.4) из равенств

$$\nu(P^n f) = \xi(gP^n f) = \xi(fP^{*n}g). \quad (3.5)$$

Лемма 3.3. Если $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, F и μ те же, что и в предыдущей лемме, то $P^m f_n \xrightarrow{w} P^m F$ в $L(\mu)$, $n \in \mathfrak{M}$, где $m \geq 0$.

Доказательство. Сначала заметим, что

$$\nu P^i(uP^m\varphi) = \nu P^{m+i}(v\varphi), \quad (3.6)$$

если $i, m \geq 0$, $u, \varphi \in \mathcal{B}_b$, а v приравнено к отношению $P^{*m}(uP^{*i}g)/P^{*(m+i)}g$ там, где его знаменатель отличен от 0, и к 0 в остальных точках (здесь P^* — только что введенный оператор, отвечающий мере $\xi = \eta$, а $g = d\nu/d\eta$). Действительно, согласно (3.4) или (3.5), левая часть (3.6) совпадает с

$$\eta((uP^m\varphi)P^{*i}g) = \eta(\varphi P^{*m}(uP^{*i}g)) = \eta(\varphi vP^{*(m+i)}g),$$

что опять же в силу (3.4) равно правой части (3.6).

Далее, по условию леммы $f_n \xrightarrow{w} F$ в $L(\nu P^{m+i})$, $n \in \mathfrak{M}$, при $i, m \geq 0$, и, следовательно, $P^m F \in L(\nu P^i)$ и величина $\nu P^{m+i}(v f_n) = \nu P^i(u P^m f_n)$ стремится к $\nu P^{m+i}(v F) = \nu P^i(u P^m F)$, если $u \in \mathcal{B}_b$ и $n \rightarrow \infty$ вдоль $\mathfrak{M}$, где оба указанные равенства вытекают из (3.6). Это сразу влечет утверждение леммы для $\mu = \nu P^i$, $i \geq 0$, а затем и для остальных $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$.

Доказательство теоремы 2.1. Если соотношение (1.5) справедливо для любых $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, то очевидным образом выполняется и условие (2Б), тогда как (2А) вытекает из леммы 3.1 и критерия Данфорда–Петтиса. Иными словами, условия (2А) и (2Б), а потому (2Б₁) и (2Б₂) необходимы для выполнения (1.5) с любыми $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$.

Постулируем условия (2А) и (2Б₁) и установим их достаточность (тем самым будет обоснован и п. б) замечания 2.1). Если из $\mathcal{F}$ извлечена какая-либо последовательность $\{f_n; n \in \mathfrak{N}\}$, то по лемме 3.3 $\mathfrak{N}$ содержит

такую подпоследовательность $\mathfrak{M}$, что $P^m f_n \xrightarrow{w} P^m F$ в $L(\mu)$, $n \in \mathfrak{M}$, где $F \geq 0$ — некоторая измеримая функция, $m \geq 0$ и μ пробегает $\mathcal{P}_1(\nu)$. Поэтому нам достаточно установить, что

$$F = 1 \quad \mu\text{-п.в.} \quad (3.7)$$

для указанных μ независимо от конкретного выбора $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ рассматриваемого типа.

С этой целью, задав $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ и μ с требуемыми свойствами, докажем, что

$$P^{m+1}F \leq P^m F \quad \mu\text{-п.в.} \quad (3.8)$$

при $m \geq 0$. В самом деле, если $\xi = u\mu$, $u \in \mathcal{B}_+$ и мера ξ нетривиальна, то (2.4) применительно к ξ показывает, что

$$\mu(uP^{m+1}f_n) = \xi(P^{m+1}f_n) \leq (1 + \varepsilon) \xi(P^m f_n) = (1 + \varepsilon) \mu(uP^m f_n)$$

при заданных $i, m \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n . Отсюда вытекает неравенство $\mu(uP^{m+1}F) \leq (1 + \varepsilon) \mu(uP^m F)$, а вслед за ним и (3.8), так как выбор ε и u допускает достаточную свободу. (Для последующего отметим, что если вместо (2Б₁) ввести (2Б₂), то сходным образом можно получить (3.8), но со знаком неравенства, обращенным в другую сторону.)

Рассмотрим $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$ и множества $A = \{x \in E: P^{m+1}F(x) \leq P^m F(x), m = 0, 1, 2, \dots\}$, $B = E \setminus A$ и $D = \{x \in A: G^\alpha(x, B) = 0\}$. В соответствии с (3.8) $\mu P^n(B) = 0$, $n \geq 0$, так как $\mu P^n \in \mathcal{P}_1(\nu)$. Таким образом, $\mu G^\alpha(B) = 0$, а отсюда следует, что $\mu(A \setminus D) = 0$ и

$$\mu(E \setminus D) = \mu(B \cup (A \setminus D)) = 0. \quad (3.9)$$

Множество D является поглощающим в том смысле, что на нем $p(\cdot, D) \equiv 1$ (см. [8, предложение 2.2]), благодаря чему функция F_0 , совпадающая с F на D и с $+\infty$ вне D , оказывается супергармонической (т.е. $0 \leq PF_0 \leq F_0$ и $F_0 \not\equiv \infty$). Равенство $F = F_0$ μ -п.в., $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, вытекающее из (3.9), и определение слабой сходимости дают право далее считать саму функцию F супергармонической. Если реализуются условия, указанные в (2Б₁) после (2.4), то из свойств функций, супергармонических для возвратных по Харрису цепей Маркова (см. [9, гл. 3]), вытекает равенство $F = d$ π -п.в., а за ним и равенство $F = d$ η -п.в., где $d \geq 0$ постоянно, а π — соответствующая инвариантная мера. Сопоставив очевидные соотношения $\nu(f_n) \rightarrow \nu(F) = d$, где $n \rightarrow \infty$ вдоль $\mathfrak{M}$, и $\nu(f_n) = 1$, где $n \geq n_0$, приходим к равенству $F = 1$ η -п.в., влекущему (3.7).

Теперь откажемся от только что использованной части требований из (2Б₁). Если $n \rightarrow \infty$, пробегая $\mathfrak{M}$, то по лемме 3.3 $\nu P^m(f_n) \rightarrow \nu(P^m F)$,

а по условию (2Б₁) $\nu P^{m+1}(f_n)/\nu P^m(f_n) = \nu P^{m+n+1}(f)/\nu P^{m+n}(f) \rightarrow 1$, и, таким образом, $\nu P^{m+1}(F) = \nu P^m(F)$, $m \geq 0$. Так как F супергармонична, функции $P^n F$, не возрастаая с ростом n , сходятся к некоторой функции $\tilde{F}$, причем $0 \leq \tilde{F} \leq F$. Полученное только что равенство и теорема Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла показывают при $m \geq 0$, что, во-первых,

$$\nu P^m(\tilde{F}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu P^{m+n}(F) = \nu P^m(F) \quad (3.10)$$

и, стало быть, $\eta(F - \tilde{F}) = 0$ т.е. $\tilde{F} = F$ η -п.в., и, во-вторых, $\tilde{F} = P^m \tilde{F}$ на поглощающем множестве $D_1 = \{x \in E: F(x) < \infty\}$, для которого $\eta(E \setminus D_1) = 0$. Далее, положив $\varphi_1 = \tilde{F}$ на D_1 и $\varphi_1 = 0$ вне D_1 и отметив неравенства $F \geq \varphi_1$ и $P\varphi_1 \geq \varphi_1$, заключаем, что $F \geq P^n F \geq P^n \varphi_1 \geq P^{n-1} \varphi_1$, $n \geq 1$. Следовательно, функции $P^n \varphi_1$ при $n \rightarrow \infty$ снизу сходятся к некоторой функции $\varphi \leq F$, которая гармонична для X , что легко устанавливается с помощью теоремы Б. Леви о предельном переходе, и совпадает с $\varphi_1 = \tilde{F}$ на D_1 , а вместе с тем и с F η -п.в. Из свойства Лиувилля цепи X следует равенство $\varphi = d$ η -п.в., где снова $d \geq 0$ постоянно. Таким образом, $F = d$ η -п.в., а отсюда, как это уже делалось, выводится (3.7). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Необходимость условий (2А) и (2Б₂) уже установлена в начале предыдущего доказательства, и здесь мы, предположив эти условия выполненными, докажем (1.5).

Задача вновь сводится к проверке (3.7) для прежних $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, F и μ . Как отмечено при выводе (3.8), вместо (3.8) теперь применимо неравенство $P^{m+1}F \geq P^m F$ μ -п.в. для $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, и, следовательно, функции $P^n F$ на множестве $A_1 = \{x \in E: P^{m+1}F(x) \geq P^m F(x); m \geq 0\}$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся снизу к некоторой функции $\tilde{F}: A_1 \rightarrow [0, \infty]$, причем $\mu(E \setminus A_1) = 0$ для тех же μ . Приравняв $\tilde{F}$ к 0 на $E \setminus A_1$ и повторив с небольшими изменениями вывод (3.10), получаем равенства $\nu P^m(\tilde{F}) = \nu P^m(F)$, $m \geq 0$, ввиду которых $\tilde{F} = F$ η -п.в. (упомянутые изменения вызваны лишь тем, что теперешняя функция временно не может считаться супергармонической и что вместо теоремы Лебега здесь удобнее привлечь теорему Б. Леви). На основании сказанного $P^{m+1}F = P^m F$, $m \geq 0$, μ -п.в., если $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$. Таким образом, установлен усиленный вариант (3.8), позволяющий вновь вывести (3.7), используя (2.3) с ν в роли μ и немного упростив конец предыдущего доказательства.

Доказательство теоремы 2.3. Временно исключим условие теоремы, касающееся νP . Если $m \geq 1$ задано, а n достаточно велико, то для $J_n = |\mu(P^n f) - \nu(P^n f)|$ на основании (1.3) находим:

$$\begin{aligned} J_n &= |(\mu - \nu) P^m P^{n-m}(f)| \leq (I_1 + I_2) \nu(P^{n-m} f) \\ &\leq 2(I_1 + I_2) \nu(P^n f), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $I_1 = |(\mu - \nu) P^m(f_{n-m} 1_{A_{n-m}})|$, а I_2 определено аналогично, но с множеством A_{n-m} , замененным его дополнением (множества A_n и соответствующее $M > 0$ определены в тексте теоремы). Из предположений а) и б) следует, что $I_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и любом $m \geq 0$. Величину же I_2 можно сделать сколь угодно близкой к 0, подобрав m с учетом (1.4) и неравенства $I_2 \leq M \|(\mu - \nu) P^m\|$. Поэтому из (3.11) вытекает, что $J_n / \nu(P_n f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда и выводится (1.5).

Если теперь ввести исключенное вначале условие, то получим, в частности, (1.5) с νP вместо μ . Тем самым будет обосновано второе, а с ним в силу (1.5) и первое из соотношений (1.6).

Доказательство теоремы 2.4. Зададим $x \in E$ и $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Положив $\tilde{q}_n(y) = q_n(x, dy) / \eta(dy)$, $y \in E$, $n \geq 1$, подберем $m \geq 1$, а затем $C \geq 1$ из условий $q_m(x, E) > 1 - \varepsilon$ и $\eta(g) > 1 - 2\varepsilon$ соответственно, где $g(\cdot) = \min(\tilde{q}_m(\cdot), C)$. Ввиду (1.5) при достаточно больших n

$$f_n(x) = \frac{\nu(P^{n-m} f)}{\nu(P^n f)} P^m f_{n-m}(x) \geq (1 - \varepsilon) \eta(g f_{n-m}) \geq (1 - \varepsilon)^2 \eta(g) > (1 - 2\varepsilon)^3,$$

поскольку функции f_n слабо сходятся к 1 в $L(\eta)$ (см. лемму 3.1). Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 1$ всюду в E , что в сочетании с упомянутой слабой сходимостью функций f_n влечет их сильную сходимость к 1 (см. [1, теорема II.26]).

4. Дополнительные результаты

В связи с основными результатами работы (см. § 2) встает вопрос о способах проверки включенных в них требований, и мы обсуждаем его в последующих пп. 2 и 3, но сначала в п. 1 остановимся на терминологии, связанной с неприводимыми цепями Маркова.

1. Понятие неприводимой (точнее, неприводимой с мерой неприводимости ξ) цепи Маркова считается известным [4], [8]. Для такой цепи в качестве ξ всегда можно взять любой элемент множества $\mathcal{M}_0$ всех максимальных мер неприводимости, т.е. меру неприводимости ξ всегда можно выбрать так, чтобы $PG 1_A = 0$ ξ -п.в., если $A \in \mathcal{E}$ и $\xi(A) = 0$. При этом все меры из $\mathcal{M}_0$ эквивалентны друг другу (см. [8, предложение 2.7]).

Аналоги приводимых далее определений привязаны в [8] к ситуации, когда цепь X неприводима, σ -алгебра $\mathcal{E}$ счетнопорождена и реализуется условие минорирования, упомянутое в п. 2 введения, что заставляет нас несколько обобщить соответствующие понятия из [8].

Пусть цепь X неприводима и $\xi \in \mathcal{M}_0$. Эта цепь, по определению, является *аперiodической*, если, каковы бы ни были $f \in \mathcal{B}_+$ с $\xi(f) > 0$ и $x \in E$, неравенство $P^n f(x) > 0$ осуществляется при всех $x \in E$, начиная с некоторого n_1 , которое может зависеть от выбора как f , так

и x . В случае счетнопорожденной σ -алгебры $\mathcal{E}$ последнее определение эквивалентно принятому в [4].

Функция $f \in \mathcal{B}_+$ называется *малой*, если $\xi(f) > 0$ и для любой функции $g \in \mathcal{B}_+$ с $\xi(g) > 0$ найдутся такие $a > 0$ и целое $m \geq 0$, что $f \leq aP^m g$. Это определение имеет много общего с определением очень малой функции [3]; в отечественной литературе малые функции называют также минорантными.

Пусть для X найдется хотя бы одна *малая* функция (так обстоит дело, например, в недавно описанной ситуации из [8]). Тогда (см. [13]) существует *параметр сходимости* R цепи X , т.е. постоянная $R \in [1, \infty)$ со свойствами: а) $G^\alpha f < \infty$ на некотором поглощающем множестве, если функция f мала и $\alpha \in [0, R)$; б) $G^\alpha f \equiv \infty$ в E , если $\alpha > R$, $f \in \mathcal{B}_+$ и $\xi(f) > 0$.

2. Следующие утверждения предназначены для облегчения проверки требований типа (1.3), (2А) и (2Б) (теорема 4.1 является следствием теоремы 5 из [13] и ее доказательство опущено; остальные доказательства см. в п. 3).

Теорема 4.1. Пусть цепь Маркова X является неприводимой и апериодической и имеет параметр сходимости $R = 1$. Пусть, кроме того, ее переходные вероятности подчинены следующему условию минорирования: существуют натуральное N и ядра $q_n(x, A) \geq 0$, где $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $n \geq N$, такие, что $\inf_E q_n(\cdot, E) > 0$ и $p_m(\cdot, \cdot) \geq q_n(\cdot, \cdot)$ при всех $n \geq N$ и $m \in [N, n]$. Если для X найдется хотя бы одна малая функция, то (1.3) выполняется всякий раз, когда $\nu \in \mathcal{P}$, $f \in \mathcal{B}_+$ и $\xi(Gf) > 0$, где $\xi \in \mathcal{M}_0$.

Ясно, что эта теорема может оказаться полезной и при проверке условия (2Б₂). Упомянутое в ней условие минорирования выполнено, например, для многих случайных блужданий на группах [9], [13] и для дискретных апериодических цепей Маркова, удовлетворяющих условию Кингмана–Ори из принадлежащей им СПТО [4].

Предложение 4.1. Пусть мера ξ удовлетворяет условию (3.3). Пусть $\nu \in \mathcal{P}(\xi)$ и существуют множества $E_n \in \mathcal{E}$, $n \geq 1$, со свойствами: а) $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ и $\xi(E_n) < \infty$; б) любая из мер νP^n , $n \geq 0$, сосредоточена на некотором E_i , где $i = i(n)$. Если семейство $\mathcal{F}$ (см. § 2) равномерно интегрируемо по ξ на каждом E_n , то реализуется (2А).

З а м е ч а н и е 4.1. Рассмотрим апериодическую цепь Маркова со счетным множеством состояний, сообщающихся друг с другом (в качестве $\mathcal{E}$ берется совокупность всех подмножеств множества E). Предположив, что функция $f \geq 0$ и меры $\nu \in \mathcal{P}$ и $p(x, \cdot)$, $x \in E$, имеют конечные носители, и воспользовавшись уравнением Колмогорова–Чепмена, легко вывести (2А), коль скоро $f \not\equiv 0$ и последовательность

$\{p_{n+1}(x, x)/p_n(x, x); n \geq N\}$ ограничена при каком-либо $x \in E$, где $p_n(x, x) = p_n(x, \{x\})$, а $N > 0$ таково, что $p_n(x, x) > 0$ при $n \geq N$ (примеры подобных неограниченных последовательностей см. в [4] и [10]).

Договоримся причислять цепь X к классу $\mathcal{X}$, если найдутся $a > 0$ и натуральные $m > l$, при которых $p_m(\cdot, \cdot) \geq ap_l(\cdot, \cdot)$, и в этом случае положим $q = m - l$ и $Q = P^q$. Счетные цепи введенного класса впервые появились в [6]; более общий случай см. в [2] и [11].

Предложение 4.2. Пусть цепь X а) неприводима, аperiodична, обладает хотя бы одной малой функцией и имеет параметр сходимости $R = 1$; б) принадлежит классу $\mathcal{X}$. Пусть выполняется условие (2А) с такими $f \in \mathcal{B}_+$ и $\nu \in \mathcal{P}$, что $\xi(Gf) > 0$ и $\nu \ll \xi$, где $\xi \in \mathcal{M}_0$. Тогда для всех $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$ имеем $\mu(Q^{n+1}f) \sim \mu(Q^n f)$, что при $m = l + 1$ (см. определение класса $\mathcal{X}$) равносильно (2.3).

Здесь требование $m = l + 1$ можно заменить более общим предположением (IV') из [11]. Отметим также, что при выводе (2Б₁) может оказаться полезной лемма 5.2 из [11].

По поводу условия, включенного в первую фразу следующего предложения, см. теорему 4.1.

Предложение 4.3. Пусть имеет место (1.3) для всех $\nu \in \mathcal{P}$ и $f \in \mathcal{B}_+$ с $\xi(Gf) > 0$, где $\xi \in \mathcal{M}_0$. Если ν и f выбраны указанным образом и при этом справедливо соотношение (2.3) с $\mu = \nu$, то оно же выполняется и с любыми $\mu \in \mathcal{P}_1(\eta)$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(P^n f)}{\nu(P^n f)} > 0. \quad (4.1)$$

Легко видеть, что (4.1) применимо, например, если $\mu \geq c\nu$ при каком-либо $c > 0$ или если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n > 0$ на некотором $A \subset E$ с $\mu(A) > 0$, где f_n определено так же, как в § 2.

3. Приведем доказательства последних предложений.

Доказательство предложения 4.1. Зададим $m \geq 0$ и $\varepsilon > 0$, положим $\mu = \nu P^m$ и заметим, что $\mu = h\xi$, где $h \in \mathcal{B}_+$ (см. (3.4)) и $h = 0$ вне E_i при некотором $i \geq 1$. Пусть $\xi_B(A) = \xi(A \cap B)$ и $\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$, $A \in \mathcal{E}$, если множество B измеримо. Равномерная интегрируемость семейства F по ξ_{E_i} позволяет найти $a > 0$, при котором $a\xi_{E_i}(f_n) < \varepsilon$, $n \geq n_0$. При этом $\mu_D \leq a\xi_D \leq a\xi_{E_i}$, где $D = \{x \in E_i: h(x) \leq a\}$, и, следовательно, $\mu_D(f_n) < \varepsilon$, $n \geq n_0$. Неравенства же $a\xi_F \leq \mu_F \leq b\xi_F$, где $F = E_i \setminus D$ и $b = \sup h$, влекут равномерную интегрируемость $\mathcal{F}$ по μ_F , и для завершения доказательства остается воспользоваться равенством $\mu = \mu_D + \mu_F$.

Доказательство предложения 4.2. Пусть $\varphi_n = Q^n f / \nu(Q^n f)$, $n \geq n_0$. Согласно лемме 4.1 из [11] (замечание к ее доказательству см. в [12, § 6]) и теореме 4 из [13], отношения $Q^{n+1}f / Q^n f$

сходятся в E к 1 при $n \rightarrow \infty$, и по теореме Егорова найдутся измеримые множества $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, на каждом из которых эта сходимость равномерна, тогда как $\eta(E \setminus E_n) \rightarrow 0$, а потому и $\mu(E \setminus E_n) \rightarrow 0$ для всех $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$. По лемме 3.3 любая последовательность вида $\{\varphi_n; n \in \mathfrak{N}\}$ содержит подпоследовательность $\{\varphi_n; n \in \mathfrak{M}\}$, для которой $P^m \varphi_n \xrightarrow{w} P^m F$ в $L(\mu)$, $n \in \mathfrak{M}$, если $m \geq 0$, $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, а функция F выбрана должным образом. Так как $\nu(\varphi_n) = 1$ при $n \geq n_0$, отсюда следует равенство $\nu(F) = 1$, в силу которого $\xi(F) > 0$ (напомним, что $\nu \ll \xi$). Тем самым с учетом апериодичности X доказано, что $Q^n F(x) > 0$ при всех $x \in E$ и n , превышающих некоторое натуральное $n(x)$.

Теперь, задав $\mu \in \mathcal{P}_1(\nu)$, подберем $m \geq 1$ из условия $\mu(Q^m F) > 0$ (такое m назовем допустимым). Тогда $\mu(1_{E_k} Q^m F) > 0$ для всех достаточно больших k , и для них же

$$\frac{\mu(1_{E_k} Q^{m-1} \varphi_n)}{\mu(1_{E_k} Q^m \varphi_n)} \longrightarrow \frac{\mu(1_{E_k} Q^{m-1} F)}{\mu(1_{E_k} Q^m F)}, \quad (4.2)$$

если $n \in \mathfrak{M}$ стремится к ∞ . Одновременно $Q^{m-1} \varphi_n / Q^m \varphi_n = Q^{m+n-1} f / Q^{m+n} f$ стремится к 1 равномерно на E_k , так что левая часть (4.2) стремится к 1, но поскольку правая часть не зависит от n , то эта часть обязана равняться 1. Благодаря этому $\mu(1_{E_k} Q^{m-1} F) > 0$ при достаточно больших k , т.е. вместе с m допустимыми являются и все не превышающие его натуральные числа. Поэтому можно взять $m = 1$ и, учитывая наше заключение относительно правой части (4.2), получить для достаточно больших k равенство $\mu(1_{E_k} Q F) = \mu(1_{E_k} F)$, в силу которого $\mu(Q F) = \mu(F)$. Следовательно, $\mu(Q^{n+1} f) / \mu(Q^n f) = \mu(Q \varphi_n) / \mu(\varphi_n) \rightarrow 1$, если $n \rightarrow \infty$ вдоль $\mathfrak{M}$. Имеющаяся свобода в выборе $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$, как и при доказательстве теоремы 2.1, влечет требуемое утверждение.

Доказательство предложения 4.3. Пусть, вопреки нашему утверждению, соотношение (2.3) нарушается для какой-либо меры $\mu \in \mathcal{P}_1(\eta)$, удовлетворяющей (4.1). Тогда $\mu(P^{n+1} f) / \mu(P^n f) > 1 + \delta$ при некотором $\delta > 0$, если n пробегает некоторую возрастающую последовательность $\mathfrak{N}$. Поскольку $\mu \in \mathcal{P}_1(\eta)$, найдутся такие $a, c > 0$, что $\tilde{\nu} \in \mathcal{P}$ и $\mu_1 \leq \frac{1}{2} \tilde{\nu}$, где $\tilde{\nu} = a\eta$ и $\mu_1 = c\mu$. Соотношения (2.3) и (1.3) продолжают действовать, если ν в первом из них заменить на $\tilde{\nu}$, а во втором — на $\nu_1 = \tilde{\nu} - \mu_1 \geq \frac{1}{2} \tilde{\nu}$. Поэтому существуют $a_n \geq 0$ и $b_n \geq 0$, $n \geq 1$, стремящиеся к 1 при $n \rightarrow \infty$ и такие, что

$$\tilde{\nu}(P^{n+1} f) = a_n \tilde{\nu}(P^n f) = a_n \mu_1(P^n f) + a_n \nu_1(P^n f) \quad (4.3)$$

и $\nu_1(P^n f) \geq b_n \nu_1(P^n f)$. Последнее неравенство показывает, что

$$\tilde{\nu}(P^{n+1} f) = \mu_1(P^{n+1} f) + \nu_1(P^{n+1} f) \geq (1 + \delta) \mu_1(P^n f) + b_n \nu_1(P^n f), \quad (4.4)$$

где $n \in \mathfrak{N}$. Сравнение (4.3) и (4.4) приводит к соотношениям

$$\gamma_n \nu_1(P^n f) \geq (1 + \delta - a_n) \mu_1(P^n f) \geq \frac{\delta}{2} \mu_1(P^n f)$$

для достаточно больших $n \in \mathfrak{N}$, где $\gamma_n = a_n - b_n$. Таким образом, для тех же n получаем неравенство $\gamma_n \tilde{\nu}(P^n f) \geq \delta \mu(P^n f)/2$, которое несовместимо с (4.1), поскольку $\gamma_n \rightarrow 0$ и, как легко проверить, $\tilde{\nu}(P^n f) \sim \nu(P^n f)$. Тем самым доказательство завершено.

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dellacherie C., Meyer P.-A.* Probabilités et potentiel. Paris: Hermann, 1975, 291 p.
2. *Guivarch Y.* Théorèmes quotients pour les marches aléatoires. — *Astérisque*, 1980, v. 74, p. 15–28.
3. *Lin M.* Strong ratio limit theorems for mixing Markov operators. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1976, v. 12, № 2, p. 181–191.
4. *Orey S.* Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities. London: Van Nostrand, 1971, 108 p.
5. *Данфорд Р., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. Т. 1, М.: ИЛ, 1962, 895 с.
6. *Молчанов С. А.* Предельная теорема для отношений переходных вероятностей. *Успехи матем. наук*, 1967, т. 22, в. 2, с. 124–125.
7. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969, 309 с.
8. *Нуммелин Э.* Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989, 207 с.
9. *Ревюз Д.* Цепи Маркова. М.: РФФИ, 1997, 431 с.
10. *Чжун К.-Л.* Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964, 421 с.
11. *Шур М. Г.* Асимптотические свойства степеней положительных операторов. I, II. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1984, т. 29, в. 4, с. 692–702, 1985, т. 30, в. 2, с. 241–251.
12. *Шур М. Г.* К предельным теоремам для отношений, порожденных случайными блужданиями в однородных пространствах. I, II. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1988, т. 33, в. 4, с. 706–719, 1989, т. 34, в. 3, с. 516–527.
13. *Шур М. Г.* Об условии Лина в сильных предельных теоремах для отношений. — *Матем. заметки*, 2004, т. 75, в. 6, с. 927–940.
14. *Shur M. G.* New ratio limit theorems for Markov chains. — *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 2002, v. 207, p. 203–212.
15. *Woess W.* Random walks on infinite graphs and groups — a survey on selected topics. — *Bull. London Math. Soc.*, 1994, v. 26, № 1, p. 1–60.
16. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.

Поступила в редакцию
23.III.2004

Исправленный вариант
15.II.2005