Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Запорожец, Пример случайного полинома с необычным поведением корней, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 549–555

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp94>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:30:07

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2005 г.

ЗАПОРОЖЕЦ Д. Н.*

ПРИМЕР СЛУЧАЙНОГО ПОЛИНОМА
С НЕОБЫЧНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ КОРНЕЙ¹⁾

В этой заметке построен пример случайных полиномов степени $n = 1, 2, \dots$ с независимыми одинаково распределенными коэффициентами, имеющих в среднем менее 9 вещественных корней при всех n . Что касается комплексных корней, то в среднем $n/2 + o(1)$ из них концентрируются около нуля и столько же уходит на бесконечность при $n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова и фразы: случайные полиномы, среднее число вещественных корней.

1. Введение. Пусть дана последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$. На протяжении всего изложения мы будем по умолчанию предполагать, что эти величины являются независимыми, одинаково распределенными и невырожденными.

Рассмотрим полином одной переменной

$$G_n(t) = \xi_0 + \xi_1 t + \dots + \xi_{n-1} t^{n-1} + \xi_n t^n$$

и обозначим через $M_n(\Omega)$ число корней полинома G_n , принадлежащих какому-нибудь множеству Ω комплексной плоскости. Пусть $M_n = M_n(\mathbf{R}^1)$ обозначает число вещественных корней полинома G_n . Все корни считаются с учетом их кратности.

Теорема. Для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_n \rightarrow 0$ существует такая последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$, что для построенных указанным выше способом случайных полиномов G_n выполняются следующие оценки:

$$\mathbf{E} M_n < 9, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (a)$$

$$\mathbf{E} M_n(\{|z| < \varepsilon_n\}) = \mathbf{E} M_n\left(\left\{|z| > \frac{1}{\varepsilon_n}\right\}\right) = \frac{n}{2} + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (b)$$

2. Краткий исторический обзор.

2.1. Вещественные корни. Блох и Пойа первыми по существу рассмотрели задачу о корнях случайных полиномов. Они получили оценку [8]

$$\mathbf{E} M_n = O(\sqrt{n}), \quad n \rightarrow \infty,$$

для случая, когда $\mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \frac{1}{3}$. Их исследования продолжили Литтлвуд и Оффорд [14]–[16], которые для нормально распределенных,

* С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, ул. Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия; e-mail: zdn@pdmi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 05-01-00911), РФФИ-ННИО (№ 04-01-0400), программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2258.2003.1) и INTAS (№ 03-51-5018).

равномерно распределенных на $[-1, 1]$ и равномерно распределенных на $\{-1, 1\}$ величин ξ_i доказали соотношение

$$\frac{C \ln n}{(\ln \ln n)^2} \leq \mathbf{E} M_n \leq 25(\ln n)^2 + 12 \ln n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Первый асимптотически точный результат был получен Кацем для нормальных [12] и равномерно распределенных [13] случайных величин:

$$\mathbf{E} M_n = \frac{2}{\pi} \ln n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Впоследствии И. А. Ибрагимов и Н. Б. Маслова [3], [4] обобщили данную формулу на класс случайных величин, распределение которых принадлежит области притяжения нормального закона: для распределений с нулевым средним выполнено соотношение

$$\mathbf{E}\{M_n \mid G_n(t) \neq 0\} = \frac{2}{\pi} \ln n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

для распределений с ненулевым средним половина корней «исчезает»:

$$\mathbf{E}\{M_n \mid G_n(t) \neq 0\} = \frac{1}{\pi} \ln n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Примерно в это же время Логан и Шепп [17], [18] показали, что для случайных величин ξ_i с характеристической функцией распределения $e^{-|\zeta|^\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 2$) справедливо асимптотическое равенство

$$\mathbf{E} M_n = c_\alpha \ln n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

где константа c_α была ими явно выписана. Эта оценка была распространена И. А. Ибрагимовым и Н. Б. Масловой [5] на класс распределений, принадлежащих области притяжения устойчивого закона.

Из личной беседы с И. А. Ибрагимовым автору стало известно, что среди специалистов в данной области существует гипотеза о том, что для *любого* невырожденного распределения коэффициентов существуют такие константы c_1, c_2 , что справедливо следующее неравенство:

$$c_1 \ln n \leq \mathbf{E} M_n \leq c_2 \ln n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пример, построенный в настоящей работе, опровергает данную гипотезу.

2.2. Комплексные корни. Первый результат в изучении поведения среднего числа корней в комплексной области получил Хаммерсли [10]. Он вывел точную формулу для $\mathbf{E} M_n(\{|z| < r\})$ в случае нормально распределенных коэффициентов (случай произвольного распределения, имеющего плотность, рассмотрен в [1]).

Вскоре после этого Д. И. Шпаро и М. Г. Шур [7] доказали предельную теорему, формулируемую следующим образом. Пусть $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbf{Z}_+$. Рассмотрим монотонно неубывающую функцию

$$f(t) = \left[\underbrace{\ln^+ \cdots \ln^+ t}_{m+1} \right]^{1+\varepsilon} \prod_{k=1}^m \underbrace{\ln^+ \cdots \ln^+ t}_k,$$

где $\ln^+ s = \max(1, \ln s)$. Пусть выполнено неравенство

$$\mathbf{E} f(|\xi_i|) < \infty$$

(которое заведомо верно, если $\mathbf{E} |\xi_i|^a < \infty$ для некоторого $a > 0$). Тогда для любого $\delta > 0$ и любых α, β , подчиненных неравенствам $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} M_n(\{1 - \delta \leq |z| \leq 1 + \delta\}) &\xrightarrow{\mathbf{P}} 1, \quad n \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{n} M_n(\{\alpha < \arg z < \beta\}) &\xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{\beta - \alpha}{2\pi}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е. при довольно слабых ограничениях на коэффициенты случайного полинома с ростом степени почти все его корни «равномерно концентрируются» около единичной окружности.

Шепп и Вандербей [19] показали, что в гауссовском случае для любого $0 < s < \infty$ выполнено соотношение

$$\frac{1}{n} \mathbf{E} M_n(\{e^{-s/n} \leq |z| \leq e^{s/n}\}) \longrightarrow \frac{1 + e^{-2s}}{1 - e^{-2s}} - \frac{1}{s}, \quad n \rightarrow \infty,$$

которое И. А. Ибрагимов и Зейтуни [11] обобщили на класс распределений, принадлежащих области притяжения устойчивого закона с показателем α :

$$\frac{1}{n} \mathbf{E} M_n(\{e^{-s/n} \leq |z| \leq e^{s/n}\}) \longrightarrow \frac{1 + e^{-\alpha s}}{1 - e^{-\alpha s}} - \frac{2}{\alpha s}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Построенный в данной заметке пример случайного полинома показывает, что помимо «концентрации» корней около единичной окружности комплексной плоскости в их поведении может наблюдаться совершенно иная картина.

2.3. Случайные полиномы от нескольких переменных. Результаты, связанные с изучением случайных полиномов от нескольких переменных, можно найти в [2], [6], [9].

3. Доказательство теоремы.

3.1. Схема построения примера. Основная идея заключается в том, чтобы выбрать такое распределение коэффициентов, при котором самый большой по абсолютной величине коэффициент с большой вероятностью очень сильно отличался бы от всех остальных. Рассмотрим дискретное симметричное распределение

$$\mathbf{P}\{\xi_0 = b_k\} = \mathbf{P}\{\xi_0 = -b_k\} = \frac{a_k}{2}, \quad k \in \mathbf{N},$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1, \quad 0 < b_1 < \dots < b_k < \dots, \quad b_k \rightarrow \infty,$$

и будем подбирать соответствующие a_k и b_k .

В силу теоремы Безу и равномерности распределения величин $M_n(\{|z| < r\})$ и $M_n(\{|z| > r^{-1}\})$ вместо (б) достаточно доказать

$$\mathbf{E} M_n(\{\varepsilon_n \leq |z| \leq 1\}) = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (\bar{\text{б}})$$

а в силу равномерности $M_n((0, 1])$ и $M_n([1, \infty))$ и симметричности распределения коэффициентов случайного полинома вместо (а) достаточно доказать

$$\mathbf{E} M_n([0, 1]) < 2 + \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (\bar{\text{а}})$$

Сначала мы построим такую последовательность a_k , чтобы с большой вероятностью (порядка $1 - O(n^{-2})$) среди коэффициентов $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ был ровно один максимальный по модулю и чтобы этот модуль был достаточно большой (т.е. равнялся некоторому b_m с достаточно большим m). После этого возьмем в качестве b_k настолько быстро растущую последовательность, чтобы при этом условии моном с максимальным по модулю коэффициентом был больше суммы всех остальных (по абсолютному значению) при $\varepsilon_n < |z| \leq 1$, что повлечет за собой отсутствие корней в этой области и выполнение (б). Для доказательства (а) вероятностное пространство разбивается на события, соответствующие тому, сколько первых коэффициентов имеют одинаковый знак, после чего применяется теорема Ролля.

3.2. Построение a_k . Зафиксируем $\lambda \in (0, \min\{e^{-2}, \frac{1}{8}\})$, после чего рассмотрим числовую последовательность

$$p_1 = \lambda, \quad p_k = \left(\frac{\lambda}{k^2}\right)^{1/k} - \left(\frac{\lambda}{(k-1)^2}\right)^{1/(k-1)} \quad (k \geq 2).$$

Положим

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \dots = a_{N_1} = \frac{p_1}{N_1}, \\ a_{N_1+1} &= a_{N_1+2} = \dots = a_{N_1+N_2} = \frac{p_2}{N_2}, \\ &\dots, \\ a_{N_1+\dots+N_{k-1}+1} &= a_{N_1+\dots+N_{k-1}+2} = \dots = a_{N_1+\dots+N_k} = \frac{p_k}{N_k}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

где строго возрастающую последовательность натуральных чисел $N_1, N_2, \dots$ мы зададим позже. Так как функция

$$g(x) := (\lambda x^{-2})^{1/x}$$

строго возрастает при $x > e\lambda^{1/2}$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$, то все $p_k > 0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

следовательно, то же самое верно и для a_j .

Мы будем говорить, что коэффициент ξ_i принадлежит k -й группе, если $|\xi_i| = b_j$ и при этом $a_j = p_k/N_k$.

Введем в рассмотрение событие A , означающее, что у всех коэффициентов $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ номера групп не превосходят $n+1$:

$$A = \{|\xi_i| \leq b_{N_1+\dots+N_{n+1}}, i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Его вероятность равна

$$\mathbf{P}(A) = (p_1 + \dots + p_{n+1})^{n+1} = \lambda(n+1)^{-2}. \quad (1)$$

Обозначим через B событие, заключающееся в том, что среди $|\xi_0|, |\xi_1|, \dots, |\xi_n|$ есть хотя бы два одинаковых максимума. Оценим вероятность $B \setminus A$. Для этого рассмотрим событие

$$C_k = \left\{ b_{N_1+\dots+N_{k-1}} < \max(|\xi_0|, |\xi_1|, \dots, |\xi_n|) \leq b_{N_1+\dots+N_k} \right\}.$$

Другими словами, C_k выражает тот факт, что максимальный по модулю коэффициент лежит в k -й группе. Пусть событие D_k^{ij} ($0 \leq i < j \leq n$) означает, что коэффициенты ξ_i и ξ_j принадлежат k -й группе и $|\xi_i| = |\xi_j|$. Тогда нетрудно видеть, что

$$B \cap C_k \subset \bigcup_{0 \leq i < j \leq n} D_k^{ij},$$

следовательно,

$$\mathbf{P}(B \cap C_k) \leq \sum_{0 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(D_k^{ij}) = \frac{n(n+1)}{2} N_k \left(\frac{p_k}{N_k} \right)^2.$$

Если мы положим $N_k = [\lambda^{-1} k^4 2^k] + 1$, то будет выполнено

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B \setminus A) &= \sum_{k=n+2}^{\infty} \mathbf{P}(B \cap C_k) \leq \frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\lambda p_k^2}{k^4 2^k} \\ &\leq \frac{\lambda n(n+1)}{2(n+2)^4} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{\lambda}{(n+1)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что для вероятности события $Q = (A \cup B)^c$ верна оценка

$$\mathbf{P}(Q) \geq 1 - 2\lambda(n+1)^{-2}.$$

3.3. Построение b_k и окончание доказательства. Зададим последовательность b_k рекуррентно:

$$b_1 = \max \left\{ 1, \frac{1}{2\varepsilon_1} \right\}, \quad b_k = \max \left\{ (k! b_{k-1})^k, \frac{1}{(k+1)! \varepsilon_k} \right\}.$$

Пусть произошло событие Q . Так как $Q \cap B = \emptyset$, то существует единственный максимальный по модулю коэффициент, номер которого мы обозначим через τ . Из того, что $Q \cap A = \emptyset$, следует, что $|\xi_\tau| \geq b_{n+1}$, поэтому $|\xi_\tau| = b_{n+s}$ для некоторого $s \in \mathbf{N}$. Важным моментом в дальнейших рассуждениях, на который сейчас стоит обратить внимание, является тот факт, что остальные коэффициенты по модулю не превосходят b_{n+s-1} . Используя его, мы будем разбивать полином на две части, одна из которых строго больше другой по абсолютной величине на некотором промежутке вещественной прямой (или в некоторой области комплексной плоскости), тем самым доказывая, что на этом промежутке (области) нет корней. (Напомним, мы предположили, что произошло событие Q .)

Пусть $((n+1)! b_{n+s-1})^{-1} \leq |z| \leq 1$. Тогда

$$|\xi_\tau z^\tau| \geq \frac{b_{n+s}}{((n+1)! b_{n+s-1})^\tau} \geq \frac{((n+s)! b_{n+s-1})^{n+s}}{((n+s)! b_{n+s-1})^\tau} > n b_{n+s-1} \geq \left| \sum_{i \neq \tau} \xi_i z^i \right|,$$

откуда следует, что G_n не имеет корней при $((n+1)! b_{n+s-1})^{-1} \leq |z| \leq 1$ (если произошло Q). Так как $((n+1)! b_{n+s-1})^{-1} \leq \varepsilon_n$, то, обозначая через 1_X индикатор события X , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} M_n(\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}) &= \mathbf{E} M_n(\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}) 1_Q + \mathbf{E} M_n(\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}) 1_{Q^c} \\ &= \mathbf{E} M_n(\{\varepsilon_n < |z| \leq 1\}) 1_{Q^c} \leq n \mathbf{P}(Q^c) \leq n \frac{2\lambda}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

что доказывает (b̄).

Для доказательства (ā) разобьем вероятностное пространство на $2n+2$ события

$$\begin{aligned} F_k &= \{\xi_k < 0\} \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} \{\xi_j > 0\}, \quad k = 1, \dots, n, & F_{n+1} &= \bigcap_{j=0}^n \{\xi_j > 0\}, \\ H_k &= \{\xi_k > 0\} \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} \{\xi_j < 0\}, \quad k = 1, \dots, n, & H_{n+1} &= \bigcap_{j=0}^n \{\xi_j < 0\}, \end{aligned}$$

вероятности которых суть

$$\mathbf{P}(F_k) = \mathbf{P}(H_k) = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad \mathbf{P}(F_{n+1}) = \mathbf{P}(H_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Докажем, что если произошло событие $Q \cap F_k$, то $G(t)$ имеет на отрезке $[0, 1]$ не более чем k вещественных корней. Как и при доказательстве (b̄), рассмотрим максимальный по модулю коэффициент ξ_τ , для которого выполнено $|\xi_\tau| = b_{n+s}$, $s \in \mathbf{N}$.

Предположим сначала, что $\xi_\tau > 0$. В этом случае $G(t)$ вообще не имеет корней на $[0, 1]$. Действительно, при $\tau = 0$

$$\xi_0 = b_{n+s} > n b_{n+s-1} \geq \left| \sum_{i=1}^n \xi_i t^i \right|.$$

Если $\tau > 0$, то разобьем отрезок $[0, 1]$ на две части. При $1 \geq t \geq ((n+1)! b_{n+s-1})^{-1}$ получаем

$$\begin{aligned} \xi_0 + \xi_\tau t^\tau &> \xi_\tau t^\tau = b_{n+s} t^\tau \geq b_{n+s} t^n \geq \frac{b_{n+s}}{((n+1)! b_{n+s-1})^n} \geq \frac{b_{n+s}}{((n+s)! b_{n+s-1})^{n+s-1}} \\ &\geq (n+s)! b_{n+s-1} > n b_{n+s-1} \geq \left| \sum_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\tau\}} \xi_i t^i \right|. \end{aligned}$$

При $0 \leq t < ((n+1)!b_{n+s-1})^{-1}$ получаем

$$\xi_0 + \xi_\tau t^\tau \geq \xi_0 \geq 1 > (n+1)!b_{n+s-1}t \geq nb_{n+s-1}t \geq \left| \sum_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\tau\}} \xi_i t^i \right|.$$

Разберем теперь случай, когда $\xi_\tau < 0$. В силу определения F_k выполнено $\xi_k < 0$ и $\tau \geq k$. Если мы докажем, что k -я производная полинома

$$G^{(k)}(t) = \sum_{i=k}^n \frac{i!}{(i-k)!} \xi_i t^{i-k}$$

на $[0, 1]$ не имеет корней, то из теоремы Ролля будет следовать, что $G(t)$ имеет на $[0, 1]$ не более k корней. Заметим, что свободный член $G^{(k)}(t)$ (т.е. ξ_k) того же знака, что и ξ_τ (оба отрицательные), значит, можно действовать так же, как и в первом случае: при $\tau = k$

$$-\xi_k = b_{n+s} > nn!b_{n+s-1} \geq \left| \sum_{i=k+1}^n \frac{i!}{(i-k)!} \xi_i t^{i-k} \right|.$$

Если $\tau > k$, то разобьем отрезок $[0, 1]$ на две части. При $1 \geq t \geq ((n+1)!b_{n+s-1})^{-1}$ получаем

$$\begin{aligned} -\xi_k - \frac{\tau!}{(\tau-k)!} \xi_\tau t^{\tau-k} &> -\xi_\tau t^\tau = b_{n+s} t^\tau \geq b_{n+s} t^n \geq \frac{b_{n+s}}{((n+1)!b_{n+s-1})^n} \\ &\geq \frac{b_{n+s}}{((n+s)!b_{n+s-1})^{n+s-1}} \geq (n+s)!b_{n+s-1} \\ &> nn!b_{n+s-1} \geq \left| \sum_{i \in \{k+1, \dots, n\} \setminus \{\tau\}} \frac{i!}{(i-k)!} \xi_i t^{i-k} \right|. \end{aligned}$$

При $0 \leq t < ((n+1)!b_{n+s-1})^{-1}$ получаем

$$-\xi_k - \frac{\tau!}{(\tau-k)!} \xi_\tau t^{\tau-k} \geq -\xi_k \geq 1 > nn!b_{n+s-1}t \geq \left| \sum_{i \in \{k+1, \dots, n\} \setminus \{\tau\}} \frac{i!}{(i-k)!} \xi_i t^{i-k} \right|.$$

Итак, мы доказали, что если произошло событие $Q \cap F_k$, то $G(t)$ имеет не более k корней на $[0, 1]$. Так как распределение коэффициентов симметрично, то это же справедливо и для события $Q \cap H_k$. Поэтому выполнена оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{E}M_n([0, 1]) &= \mathbf{E}M_n([0, 1]) \mathbf{1}_{Q^c} + \sum_{k=1}^n \mathbf{E}M_n([0, 1]) \mathbf{1}_{Q \cap F_k} + \sum_{k=1}^n \mathbf{E}M_n([0, 1]) \mathbf{1}_{Q \cap H_k} \\ &\leq n \frac{2\lambda}{(n+1)^2} + 2 \sum_{k=1}^n k \frac{1}{2^{k+1}} < 2 + \frac{2\lambda}{n} \leq 2 + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

которая доказывает (а).

Автор выражает глубокую признательность И. А. Ибрагимову за постановку задачи, за многочисленные обсуждения вопросов, связанных со случайными полиномами, а также за помощь в подготовке статьи к выходу в печать.

Автор благодарен А. Ю. Зайцеву за то, что он прочел рукопись и дал множество ценных советов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Запорожец Д. Н. О распределении числа вещественных корней случайного полинома. — Записки науч. семин. ПОМИ, 2004, т. 320, с. 69–79.

2. Запорожец Д. Н. Случайные полиномы и геометрическая вероятность. — Докл. РАН, 2005, т. 400, № 3, с. 299–303.
3. Ибрагимов И. А., Маслова Н. Б. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов. I. Коэффициенты с нулевым средним. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 2, с. 229–248.
4. Ибрагимов И. А., Маслова Н. Б. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов. II. Коэффициенты с ненулевым средним. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 3, с. 495–503.
5. Ибрагимов И. А., Маслова Н. Б. Среднее число вещественных корней случайных полиномов. — Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 1, с. 13–16.
6. Ибрагимов И. А., Подкорытов С. С. О случайных вещественных алгебраических поверхностях. — Докл. РАН, 1995, т. 343, № 6, с. 734–736.
7. Шпаро Д. И., Шур М. Г. О распределении корней случайных многочленов. — Вест. Моск. ун-та, 1962, № 3, с. 40–43.
8. Bloch A., Pólya G. On the roots of certain algebraic equations. — Proc. London Math. Soc., 1931, v. 33, p. 102–114.
9. Edelman A., Kostlan E. How many zeros of a random polynomial are real? — Bull. Amer. Math. Soc., 1995, v. 32, № 1, p. 1–37.
10. Hammersley J. M. The zeroes of a random polynomial. — Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Berkeley–Los Angeles: Univ. California Press, 1956, p. 89–111.
11. Ibragimov I., Zeitouni O. On roots of random polynomials. — Trans. Amer. Math. Soc., 1997, v. 349, № 6, p. 2427–2441.
12. Kac M. On the average number of real roots of a random algebraic equation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1943, v. 49, p. 314–320.
13. Kac M. On the average number of real roots of a random algebraic equation. II. — Proc. London Math. Soc., 1949, v. 50, p. 390–408.
14. Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. I. — J. London Math. Soc., 1938, v. 13, p. 288–295.
15. Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. II. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1939, v. 35, p. 133–148.
16. Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. III. — Матем. сб., 1943, т. 12, № 3, с. 277–286.
17. Logan B. F., Shepp L. A. Real zeros of random polynomials. — Proc. London Math. Soc., 1968, v. 18, p. 29–35.
18. Logan B. F., Shepp L. A. Real zeros of random polynomials. II. — Proc. London Math. Soc., 1968, v. 18, p. 308–314.
19. Shepp L. A., Vanderbei R. J. The complex zeros of random polynomials. — Trans. Amer. Math. Soc., 1995, v. 347, № 11, p. 4365–4384.

Поступила в редакцию
12.IV.2005

© 2005 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*, ШЕВЦОВА И. Г.*

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ. II¹⁾

Приведены оценки асимптотически правильных констант в оценках точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными момен-

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkorolev@comtv.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-01-00428, 04-01-00671, 05-07-90103).