Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Булинская, Рецензия на книгу F. Etienne de Vylder
“Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction”, *Тео-
рия вероятн. и ее примен.*, 1998, том 43, выпуск 1, 197–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp941>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразу-
мевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:09:45

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

F. Etienne de Vylder. *Advanced Risk Theory. A Self-Contained Introduction*. Forewords by Hans Bühlmann and Hans U. Gerber. — Editions de l'Université de Bruxelles, Swiss Association of Actuaries, 1996, XXXIV, 969 p.

Круг читателей, внимание которых должна привлечь книга де Вильдера, изданная Брюссельским университетом и Швейцарской ассоциацией актуариев, достаточно четко определен тем, что она включена в коллекцию «Актуариат» (Collection Actuariat). Предыдущими томами этой серии являются «Новые продукты в страховании жизни» (Les nouveaux produits d'assurance-vie. Thierry Delvaux et Martine Magnée, 1991) и «Стохастические финансы» (Finance stochastique. Pierre Devolder, 1993).

Сам автор, говоря о причинах написания книги и ее целях, отмечает следующее: «В основе теории риска лежат теория вероятностей и статистика, случайные процессы, функциональный анализ, теория оптимизации и гильбертовы пространства. Любое лицо, занимающееся бизнесом, связанным с риском, является потенциальным потребителем теории риска. В первую очередь сюда относятся актуарии. Однако совершенно нереалистично предполагать знакомство с вышеуказанными разделами математики у лиц, не занимающихся научной работой или преподаванием в университетах. По собственному опыту могу сказать, что книга, содержащая слишком много результатов или доказательств, опирающихся на другие публикации, будет быстро отложена в сторону. С такими мыслями я приступил к написанию этой книги "Продвинутый курс теории риска. Самодостаточное введение". Читатель, интересующийся математическими аспектами, найдет здесь полные доказательства. Наиболее технические из них вынесены в дополнения. Там приведены упрощенные частные случаи знаменитых классических результатов. Книга не требует знания случайных процессов с непрерывным временем. Все используемые процессы определяются детерминистически, исходя из случайных последовательностей. Исключение составляют два параграфа, имеющие дело с мартингалами. Их можно пропустить без ущерба для понимания остальной части книги».

Ф. Э. де Вильдер является не только одним из основателей журнала «Insurance: Mathematics and Economics» (Страхование: математика и экономика) и одним из издателей серии «Страхование» (Insurance series), в которую входит [5] в качестве третьего тома, но и ученым с мировой известностью, внесшим значительный вклад в теорию риска. Интересно отметить, что из 29 глав, составляющих рассматриваемую книгу, лишь в 6 нет ссылок на работы ее автора, среди них такие как «Основы анализа, свертки и уравнения восстановления», «Условные математические ожидания» и «Линейное программирование и матричные игры». Из 267 книг и статей, приведенных в списке литературы, 41 принадлежит де Вильдеру.

Книга, состоящая из 3 частей и 11 дополнений, предваряется предисловиями двух классиков актуарной математики, по книгам [3] и [4] которых училось не одно поколение актуариев, Х. Бюльмана (H. Bühlmann), создателя современной теории достоверности (credibility theory), и Х. Гербера (H. Gerber), который первым использовал мартингалы в актуарной теории риска. Каждая часть снабжена схемой, показывающей связь между ее главами и необходимые сведения, содержащиеся в дополнениях или предыдущих частях. Предполагается, что читатель знаком с математическим анализом и основами теории вероятностей.

Часть I «Теория разорения» состоит из 10 глав. Глава 1 напоминает, что такие функции распределения, соответствующие некоторой мере на прямой, и функции ограниченной вариации, а также основные теоремы, касающиеся интегрирования. Так, теоремы Лебега (о мажорируемой и монотонной сходимости) и Фубини приводятся без доказательства. В то же время дан вывод формул интегрирования по частям на конечном и бесконечном интервалах. Также подробно рассмотрены свертки на $\mathbf{R}_+$ и их свойства.

Имеющаяся на с. 19 досадная опечатка, когда пропущено слово *независимые* при объяснении, что свертка представляет собой распределение суммы случайных величин, может ввести в заблуждение лишь слабо подготовленного читателя. Кстати, в книге неотрицательные числа $x \geq 0$ называются положительными, а положительные $x > 0$ строго положительными, о чем сказано в списке обозначений в начале книги. Пожалуй, труднее примириться с появляющимся на с. 57 обозначением: $o(\tau)$ — это такая функция τ , которая стремится к 0 при $\tau \rightarrow 0$.

Характеристическим (adjustment) коэффициентом пары (G, q) называется такое положительное число ρ , для которого $q \int_0^\infty e^{\rho x} dG(x) = 1$. Если ρ существует, то уравнение восстановления $f = g + qf * G$ ($q < 1$), как показано в заключение, с помощью экспоненциального преобразования можно свести к случаю $q = 1$, к которому применимы теоремы восстановления. В этой главе теоремы доказаны при дополнительном предположении: $V'_G(\infty)$ существует и конечно (здесь $V_G(x)$ — функция восстановления). В дополнении А, где вводятся непосредственно интегрируемые по Риману функции, дополнительные условия снимаются. Дискретные уравнения восстановления рассмотрены в дополнении В.

Глава 2, посвященная условным математическим ожиданиям (у.м.о.), начинается с рассмотрения «старомодного» определения, т.е. тех частных случаев, когда у.м.о. может быть подсчитано в явном виде (непрерывный случай, дискретный и смешанный). Далее вводится современное определение $E(X | Y)$ — у.м.о. положительной (или интегрируемой) случайной величины (с.в.) X при фиксированном Y , где Y — это n -мерный случайный вектор, но не в обычном понимании как у.м.о. относительно σ -алгебры, порожденной Y , а в следующей эквивалентной форме: это единственная положительная (или интегрируемая) с.в. $g(Y)$ такая, что $E[g(Y)h(Y)] = E(Xh(Y))$ для любой ограниченной положительной функции h на $\mathbf{R}^n$ (единственность следует из предположения, что совпадающие с вероятностью 1 с.в. не различаются). Доказаны основные свойства у.м.о. и рассмотрена условная независимость, а также условные дисперсии и ковариации. Эти результаты особенно важны для изучения части III.

В гл. 3 описываются изучаемые далее в гл. 5–9 модели риска с непрерывным временем, связанные с деятельностью страховой компании. Основным объектом для исследования является размер резервов R_t в момент $t \geq 0$, который задается следующим образом: $R_t = u + P_t - S_t$, где u — начальный резерв, P_t — премии, собранные за время $[0, t]$, а S_t — размер выплат за то же время. За исключением гл. 9, вся случайность в модели заключена в точечном процессе $(T_k, X_k, k \geq 1)$, где T_k — момент урегулирования, а X_k — размер k -го требования. При этом $S_t = X_1 + \dots + X_{N_t}$, где N_t — число требований в интервале $[0, t]$, а $P_t = \gamma(t, N_t, T_1, X_1, \dots, T_{N_t}, X_{N_t})$ с некоторой неслучайной функцией γ .

В общей модели предполагается, что процессы $\{T_k\}$ и $\{X_k\}$ независимы, с.в. X_k независимы, одинаково распределены и имеют конечное строго положительное математическое ожидание (м.о.), N_t конечно для любого t и имеет конечное м.о., но число требований в $[0, \infty[$ бесконечно. В классической модели N_t — пуассоновский процесс с постоянной интенсивностью λ , а $P_t = (1 + \eta)ES_t$, где $\eta > 0$ — страховая нагрузка. Кроме определений найдены различные характеристики введенных процессов и указаны применяемые в дальнейшем методы, относящиеся к теории мартингалов и слабой сходимости.

В гл. 4 изучаются точечные процессы, способы их задания с помощью плотностей и интенсивностей, а также их свойства. В частности, рассматриваются пуассоновские процессы, однородные, неоднородные и имеющие случайную интенсивность, и процессы восстановления.

Глава 5 посвящена вероятности разорения в фиксированный момент t , т.е. $P(R_t < 0) = P(S_t > u + P_t)$, и ее асимптотическому поведению при больших t (t считается большим, если велико ожидаемое число требований в $[0, t]$). Для классической модели доказана асимптотическая нормальность S_t при $t \rightarrow \infty$ в предположении конечности второго момента размера индивидуальных требований и продемонстрировано ее использование для определения начального капитала и/или страховой нагрузки. Рассмотрены также неоднородные портфели.

Для общей модели риска показано, как находить приближенное значение для вероятности разорения с помощью формулы Панджера (Panjer), если вероятности $p_k = P(N_t = k)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $kp_k = [a + b(k-1)]p_{k-1}$, $k \geq 1$, для некоторых a и b , которые, возможно, зависят от t . При некоторых дополнительных предположениях доказано, что предельное распределение (при $t \rightarrow \infty$) нормированного суммарного размера требований $(S_t - ES_t)/\sqrt{DS_t}$ совпадает с распределением линейной комбинации двух независимых с.в., одна из которых имеет стандартное нормальное распределение, а другая имеет предельное распределение нормированного числа требований $(N_t - EN_t)/\sqrt{DN_t}$.

В гл. 6 изучаются вероятности разорения за конечный промежуток времени $\Psi(t, u) = P(R_\tau < 0 \text{ для некоторого } \tau \in [0, t])$. Предполагается, что процесс $\{T_k\}$ задается плотностями. Прежде всего, для $U(t, u) = 1 - \Psi(t, u)$ получено представление в виде ряда из кратных интегралов, который используется во всех подсчетах для моделей с непрерывным временем. В случае пуассоновского процесса со случайной интенсивностью получена формула для $U(t, 0)$, которая в классическом случае носит название формулы Прабху (Prabhu). С использованием мартингалов для классической модели получено неравенство Лундберга (Lundberg) и верхняя граница для $\Psi(t, u)$ в общей модели, приведены численные результаты.

Глава 7 посвящена вероятности разорения за бесконечное время $\Psi(u)$ для классической модели. Все результаты в этой и следующей главе выводятся с помощью уравнения восстановления, которому удовлетворяет $U(u) = 1 - \Psi(u)$, вероятность неразорения: $U = p + qU * G$. Здесь $G(x) = \mu^{-1} \int_0^x [1 - F(y)] dy$, распределение F размера отдельного требования имеет первый момент μ , а $q = 1 - p = (1 + \eta)^{-1}$. Явный вид решения этого уравнения дает так называемое разложение Беекмана (Beekman) для U . Если F сосредоточена в целочисленных точках, то получено разложение Шиу (Shiu) в виде знакопеременного ряда. Найден явный вид верхних и нижних оценок для $\Psi(u)$ и асимптотическая формула Крамера (Cramér), устанавливающая экспоненциальное убывание $\Psi(u)$ при неограниченном росте начального капитала u . Подробно исследован случай субэкспоненциальной G . Приближенное значение $\Psi(u)$ получается с помощью экспоненциальной аппроксимации де Вильдера, т.е. заменой исходной модели на новую, имеющую при любом t те же первые три момента размера резервов и экспоненциальное распределение F размера требований. Это простейший вид распределений F , рассматриваемых в следующей гл. 8, для которых возможно найти явный вид Ψ , а именно, распределений, представимых в виде сумм произведений полиномов, экспонент и тригонометрических функций $\sin(ax), \sin(bx), \cos(ax), \cos(bx) \dots$. Основной аппарат исследования — степенные ряды. В дальнейшем в книге результаты этой главы не используются.

В отличие от остальных глав, в гл. 9 предполагается, что пополнение резервов описывается случайным процессом, более точно, увеличение резервов за время $d\tau$ равно $\gamma(R_\tau) d\tau$, где интенсивность γ — некоторая положительная функция. В классической модели $\gamma = \mu\lambda(1 + \eta)$. Специальным выбором функции γ можно охватить такие случаи, как получение процентов от инвестирования резервов, модель с дивидендами

и модель со страховой нагрузкой, зависящей от размера резервов. Основное внимание уделяется так называемой полуклассической модели, где процесс выплат такой же, как в классической модели, а пополнение резервов задается некоторой интенсивностью. Получены оценки сверху вероятности разорения за бесконечный промежуток времени, в частности, оценка Асмусена-Нильсена (Asmussen-Nielsen), являющаяся обобщением неравенства Лундберга.

Алгоритм для подсчета вероятностей разорения удается построить для дискретных моделей, рассматриваемых в гл. 10. Они получаются с помощью «дискретизации» изучавшихся ранее моделей с непрерывным временем и перехода к новой единице измерения времени и новой денежной единице. В результате уровень резервов в целочисленные моменты времени становится целочисленным. Для классической и полуклассической моделей приведены численные примеры. Рассмотрены также вероятности разорения с учетом возникающего в момент разорения дефицита.

Часть II «Теория оптимизации» состоит из 11 глав. Глава 1 знакомит читателя с набором технических средств, необходимых для оптимизации. Прежде всего дается формулировка оптимизационных проблем в наиболее общем виде с целевой функцией φ и некоторыми ограничениями:

$$P := \inf_{s \in \text{Space}} \{\varphi(s)/\text{Cond}(s)\}, \quad Q := \sup_{s \in \text{Space}} \{\varphi(s)/\text{Cond}(s)\}.$$

В качестве основного пространства (Space), по которому происходит оптимизация, рассматриваются подмножества $\mathbf{R}^n$ или пространство распределений на $\mathbf{R}$. Дополнительные ограничения $\text{Cond}(s)$ могут иногда и отсутствовать. Важную роль при решении оптимизационных задач играют двойственные проблемы, а также компактность, выпуклость и экстремальные точки. Для более глубокого знакомства с ними читатель отсылается к дополнению С «Выпуклый анализ в $\mathbf{R}^n$ » и дополнению Е «Теорема Крейна-Милмана для вероятностных распределений». Глава заканчивается рассмотрением пространств, образованных смесями распределений, и строением выпуклых оболочек в $\mathbf{R}^n$.

Глава 2 посвящена общим пространствам вероятностных распределений. Чистые пространства $\text{Prob}[S]$ состоят из распределений F , сосредоточенных на S , некотором подмножестве $\mathbf{R}$. Они могут учитывать добавочные условия типа: распределение имеет не более k атомов или конечное их число, либо интегральные ограничения $\int f dF = \alpha$ (или $\leq \alpha$). Унимодальные пространства состоят из m -унимодальных распределений, т.е. имеющих возрастающую (в понимании автора) плотность на $]-\infty, m[$ и убывающую на $]m, \infty[$, в точке m , возможно, сосредоточена некоторая масса. Частными случаями являются прямоугольные распределения $\mathbf{R}_{m,\theta}$, т.е. равномерные распределения на интервалах с концами $m, \theta \in \mathbf{R}$, а также их выпуклые комбинации. Пространство смесей с базисом $\{F_\theta, \theta \in S\}$ включает распределения $F_U(x) = \int F_\theta(x) dU(\theta)$, где U — функция распределения вероятностной меры, сосредоточенной на S . Рассматривается связь пространств смесей с чистыми пространствами, а также теоремы существования различных типов пространств распределений, их компактность и экстремальные точки. Глава заканчивается пространствами Крейна-Милмана, т.е. выпуклыми компактными пространствами, являющимися выпуклой замкнутой оболочкой своих экстремальных точек.

Моментные пространства, т.е. семейства распределений с фиксированными n первыми моментами, изучаются в гл. 3. Отдельно рассматриваются частные случаи $n = 1, 2, 3$. Особое внимание уделено вопросам существования чистых моментных пространств $\text{Prob}[S, \mu_1, \dots, \mu_n]$, а также m -унимодальных, и их свойствам. В заключение рассматриваются вопросы аппроксимации прямоугольных распределений распределениями с конечным числом атомов. Это важно для численных подсчетов вероятностей разорения.

Глава 4 «Общие оптимизационные проблемы» начинается с описания актуар-

ных проблем оптимизации. Приводятся примеры целевых функционалов, которые подробно рассматриваются в гл. 8, 10, 11, это премии, составные распределения (или вероятности разорения в фиксированный момент), вероятность разорения на бесконечном промежутке времени, расстояние до некоторого фиксированного распределения и характеристические коэффициенты. Если целевой функционал имеет вид $T(F) = \int g dF$, то говорят об интегральной оптимизационной проблеме, а в случае $T(F) = \psi(\int g_1 dF, \dots, \int g_k dF)$ — о мультиинтегральной. Приведена также терминология, связанная с пространствами, по которым производится оптимизация, и дополнительными ограничениями. Важным частным случаем является тот, когда решением служит экстремальная точка. В связи с этим изучается дискретизация в исходной проблеме на выпуклом пространстве и связанной с ней проблеме, где оптимизация проводится только по экстремальным точкам. Для последней строится алгоритм, дающий численное решение.

Глава 5 имеет дело с линейным программированием и теорией игр. После краткого обсуждения задач линейного программирования рассматриваются обобщенные задачи, где целевая функция — линейная функция конечного числа переменных, а число ограничений, имеющих вид линейных равенств или неравенств, может быть бесконечно. Теорема существования решения таких задач используется в гл. 7. Далее исследуются проблемы двойственности в линейном программировании, что служит хорошей подготовкой к гл. 7, так как используемая методология одна и та же, только в гл. 5 рассматривается дискретный случай, а в гл. 7 — непрерывный.

Игры двух лиц с нулевой суммой и игры с полной информацией в дальнейшем не используются, однако доказательство теоремы фон Неймана о существовании решения матричной игры служит одним из наиболее ярких примеров применения двойственности в линейном программировании.

Глава 6 имеет дело с интегральными оптимизационными проблемами. Прежде всего доказано, что задача максимизации интеграла по пространству смесей с n интегральными ограничениями имеет решение в виде выпуклой комбинации $(n + 1)$ элемента базиса. Хотя этот результат вытекает из доказанного в гл. 4, новое доказательство не только устанавливает существование решения, но и указывает способ его нахождения. Далее дается геометрическая интерпретация решений и рассматривается несколько примеров их построения, в заключение приводятся численные результаты.

В гл. 7 автор занимается двойственными задачами к задачам интегральной оптимизации, в частности, показано, что это обобщенные задачи линейного программирования. Изучение свойств пары (исходная и двойственная задачи) дает возможность аналитического исследования решения исходной задачи, каково бы ни было число n интегральных ограничений.

Если множество S , на котором сосредоточены распределения, конечно, то двойственная задача — это классическая задача линейного программирования, которую можно решать, например, симплексным методом. Если нет простого аналитического решения, то проводится дискретизация исходной задачи (для численных подсчетов), тогда S автоматически оказывается конечно.

В следующей гл. 8 исследуется проблема двойственности для того частного случая, когда рассматриваемые интегральные ограничения — это просто n первых моментов. В частности, установлено, при каких условиях решение сосредоточено в k точках ($k \leq n + 1$). В качестве иллюстрации рассматривается максимизация ненагруженной стоп-лосс премии.

В гл. 9 предлагается общий алгоритм оптимизации в следующих условиях: пространство, на котором производится максимизация, это пространство Крейна-Милмана с конечным числом экстремальных точек. Целевой функционал $T(F)$ имеет производную $T'(F, G)$ в любой точке F по любому направлению G , и она линейна по направлению. Исходя из начального приближения F_0 , находят оптимальное

направление из этой точки, т.е. ту из экстремальных точек G_{opt} , для которой максимален $T'(F_0, G_{ext})$. Следующее приближение выбирается на сегменте $[F_0, G_{opt}]$, там, где функционал T имеет наибольшее значение. Процесс заканчивается, как только производная по направлению всех экстремальных точек окажется меньше заранее выбранного достаточно малого ε . Рассмотрены некоторые практические аспекты применения алгоритма. В качестве иллюстрации решается задача минимизации расстояния до некоторого фиксированного распределения.

В следующей гл. 10 впервые немного нарушается принцип самодостаточности, провозглашенный автором. Читатель отсылается к книгам Гербера [4] и Говертса и др. [5] для более подробного знакомства с принципами подсчета премий (с нагрузкой). Это можно объяснить тем, что с точки зрения оптимизации важно лишь следующее: принцип подсчета премии задает функционал $T(F) \geq E_F(X)$, где правая часть представляет собой чистую премию риска X с функцией распределения F . Если функция F неизвестна полностью, а страховщик использует, например, принцип Эшшера (Esscher) подсчета премии, тогда наиболее безопасная стратегия — требовать с клиента премию в размере $\sup_{F \in \text{Space}} T(F)$ для некоторого гипотетического пространства распределений. Более остро та же проблема возникает у перестраховщика, даже если он использует принципы, основанные на первых двух моментах (такие как принцип среднего, дисперсии или среднеквадратического отклонения). Далее проверяется, когда можно использовать алгоритмы гл. 4 и гл. 9 для четырех основных принципов подсчета премий. Численные примеры рассмотрены для перестрахования стоп-лосс, пространства распределений берутся с фиксированными k моментами ($k = 1, 2, 3$).

В последней гл. 11 в качестве функционала $T(F)$ выбирается вероятность разорения в фиксированный момент либо за бесконечное время в классической модели. Предварительно проводится дискретизация модели. Затем $T(F)$ подсчитывается с помощью формулы Панджера, если речь идет о фиксированном моменте времени, при этом число происшествий N_t за время t может иметь не только пуассоновское распределение, как в классическом случае, но и биномиальное, геометрическое или отрицательно биномиальное. Если речь идет о бесконечном времени, то используются результаты гл. 10 части I. Приведены примеры численных подсчетов. Заканчивается глава исследованием существования решения задач максимизации и минимизации вероятности неразорения $U(F, u)$ по $F \in \text{Prob}[[a, b], \mu_1, \mu_2]$ и его свойств, в частности, при большом начальном капитале u .

Часть III «Теория достоверности» включает 7 глав. Глава 1 посвящена проекциям в гильбертовых пространствах. Сначала рассматривается пространство $\mathbf{R}^n$, затем общее гильбертово пространство и L^2 — пространство с.в., обладающих вторыми моментами.

В гл. 2 приводятся результаты, касающиеся элементарных статистических моделей. Среди них оценка среднего по результатам n независимых наблюдений, оценка дисперсии при известном или неизвестном среднем. Далее рассматриваются аналогичные вопросы для взвешенных наблюдений.

Глава 3 «Однородная по времени теория достоверности» начинается с объяснения перехода от достоверности ограниченных флуктуаций (или американской достоверности) к современной теории достоверности, которая началась с работы Х. Бюлмана 1967 г. В то время как первый подход зависит от двух заранее заданных параметров и опирается на центральную предельную теорему, современная достоверность ничего этого не требует, более того, не делается никаких гипотез о виде распределений размеров требований или их числа. Это очень полезный подход при работе с неоднородными портфелями, позволяющий использовать не только индивидуальные данные по отдельному контракту, но и информацию, касающуюся всей их совокупности, при подсчете премий и резервов. Этот метод нашел широкое применение при создании системы бонус-малус в страховании автомобилей.

Изложение материала в этой главе как бы следует истории развития предмета. Сначала представляется теория достоверности с невзвешенными наблюдениями: модель Бюлмана с одним контрактом, затем с несколькими (1967 г.). Далее, модель Бюлмана-Штрауба (Bühlmann-Straub) имеет дело со взвешенными наблюдениями (1970 г.), равно как и иерархическая модель Джевелла (Jewell) 1975 г. Наконец, рассматриваются семилинейные и параметрические модели.

Модель Бюлмана с одним контрактом задается случайным вектором $(\Theta, X_1, \dots, X_n)$, причем при фиксированном Θ наблюдаемые случайные величины $X_1, \dots, X_n$ условно независимы и одинаково распределены. Можно интерпретировать X_k как полный размер требований или их число за k -й год. Случайная величина Θ показывает, что рассматриваемый контракт вложен в некоторый теоретический портфель гипотетических контрактов, где ему соответствует конкретная реализация θ параметра Θ . Во всех рассмотренных случаях важен не вид распределения Θ , а лишь три структурных параметра: $\mu = E\mu(\Theta)$, $a = D\mu(\Theta)$, где $\mu(\Theta) = E(X_k/\Theta)$, и $\sigma^2 = E\sigma^2(\Theta) + \sigma^2(\Theta) = D(X_k/\Theta)$. Задача заключается в оценке чистой премии $\mu(\Theta)$ по результатам наблюдений.

Как известно, наилучшее (среднеквадратическое) приближение с.в. из L^2 с помощью борелевских функций от n с.в. дается у.м.о., подсчет которого в явном виде в большинстве случаев невозможен. Однако в некоторых случаях это у.м.о. является линейной комбинацией с.в., фигурирующих в условии. Это и есть так называемая точная достоверность. Поскольку теория достоверности имеет дело с наилучшим среднеквадратическим приближением с помощью линейных функций, то дело сводится к проектированию на (сдвинутое) линейное подпространство гильбертова пространства. Де Вильдер это один из тех актуариев, которые стали систематически использовать такой подход. Поскольку получаемые приближения (или оценки достоверности) зависят от параметров модели μ, a, σ^2 , большое внимание уделяется получению оценок этих параметров по результатам наблюдений. В заключительной части главы приведены явные выражения в случае точной достоверности.

Глава 4 знакомит читателя с гильбертовыми пространствами случайных векторов и случайных матриц. Специальный раздел посвящен векторам с нулевым эксцессом. Дело в том, что везде в части III автор стремится к получению оптимальных оценок параметров, т.е. несмещенных и с минимальной дисперсией. Без дополнительных предположений о виде распределения это не всегда удается. Простейшим условием, обеспечивающим оптимальность, и является нулевой эксцесс. Это менее ограничительно, чем предположение о нормальности, и часто выполняется на практике, по крайней мере приближенно.

В гл. 5 изучаются классические модели регрессии. Важную роль при этом играет проектирование в гильбертовых пространствах. Вначале рассматривается детерминированный вариант: для заданных вектора x и матрицы y найти вектор b такой, чтобы расстояние между x и yb было минимально. Затем речь идет о модели с одним наблюдаемым случайным вектором и трех моделях с несколькими векторами $X_1, \dots, X_{k^0}$. Модель III

$$EX_k = \mu, \quad \text{Cov } X_k = v + u_k,$$

где вектор μ и положительно определенная матрица v неизвестны, а u_k , $k = 1, \dots, k^0$, — заданные положительно определенные матрицы, появляется и в следующей гл. 6, связанной с оценками достоверности. В ней исследуются регрессионные модели Хакмайстера (Hachmeister) с одним и с несколькими контрактами. Для таких моделей находятся наилучшие (неоднородные) линейные аппроксимации неизвестных векторов с помощью результатов наблюдений. Во многих рассмотренных предположениях нулевой эксцесс.

Заключительная глава 7 имеет дело с IBNR-резервами, т.е. с оценкой произошедших, но еще незаъявленных требований (во многих случаях правильнее говорить —

еще неурегулированных). Модели IBNR-резервов делятся на микро- и макро-модели (первые учитывают размеры отдельных требований, вторые — суммарный объем требований). Другое разделение производится на детерминированные и стохастические модели, которые в свою очередь подразделяются на параметрические (вид распределения известен с точностью до параметров, которые надо оценить) и непараметрические (в которых не делается никаких предположений о распределениях). Сначала рассматривается метод цепных лестниц, затем детерминистическая модель наименьших квадратов и, наконец, модель теории достоверности.

Для полноты описания содержания книги отметим, что кроме упоминавшихся ранее дополнений А, В, С и Е имеются также следующие: D «Матрицы», F «Ортogonalное проектирование в гильбертовом пространстве», G «Характеристические функции», H «Производящие функции», I «Моментные функции», J «Преобразования Лапласа», K «Суммы, интегралы, интерполяции и асимптотические значения».

Сравнивая данную книгу с существовавшими ранее учебниками, в которых излагается теория риска для подготовки актуариев к университетским экзаменам, можно заметить, что ни один из них (кроме, пожалуй, книги [2] Бауэрса и др.) не может похвастаться похожим объемом. И, конечно, никто из авторов не ставил задачи написать пособие, позволяющее не обращаться за доказательствами к дополнительной литературе. Более того, большинство авторов старалось избегать сложной математики, в ряде случаев вообще опуская доказательства.

Если говорить об уже упомянутой книге [2], то теории риска там посвящены только 3 главы из 19 и затронуты лишь элементарные вопросы.

Книга [1] Бэрда и др. «Теория риска» имеет подзаголовок «Стохастический базис страхования» и этим определяется ее содержание. Здесь основное внимание уделяется обычному и сложному пуассоновскому распределениям, а также различным приближениям последнего, в частности, нормальному, приближению Эшера и методу Монте-Карло, и лишь одна глава (из 13) посвящена вероятности разорения за бесконечное время.

В книге Сил [7] одна из 6 глав имеет дело с вероятностями разорения за конечное и бесконечное время. Остальные посвящены распределению суммарного размера требований, подсчету справедливой чистой премии, страховым нагрузкам и перестрахованию. Интересно отметить, что хотя достоверность и упоминается при определении размера премии по результатам предыдущих наблюдений, но речь идет лишь об американском варианте.

Конечно, это объясняется тем, что почти 30 лет назад, когда писались книги [1], [3], [7], современная теория достоверности еще не была создана. Но даже в вышедшей 10 лет спустя книге [4] «Введение в математическую теорию риска» Гербера, являющегося учеником Бюлмана, теории достоверности посвящена лишь одна глава (из 10), состоящая всего из 6 страниц. Две главы посвящены теории разорения, еще три имеют дело с принципами подсчета премий, перестрахованием и принятием решений (например, о выплате дивидендов). Первые три главы излагают используемый в книге теоретико-вероятностный аппарат: случайные величины и случайные процессы, в том числе мартингалы. Последние используются, когда речь идет о принятии решений и вероятности разорения. Интересно отметить, что Гербер ссылается здесь на статью де Вильдера (1977 г.) о мартингалах и вероятности разорения.

Написанная еще через 9 лет книга Штрауба [8], хотя и называется «Математика в страховании не жизни», также может считаться введением в теорию риска, потому что традиционно именно с этой областью страхования (в отличие от страхования жизни) связано использование теории риска. Говоря о принципах подсчета премий, Штрауб специально останавливается на теории достоверности, и отдельный параграф посвящен случаю точной достоверности. Вероятность разорения рассматривается не только сама по себе, но и в связи с перестрахованием и созданием резервов. Интересны приведенные параллели между математическими методами в теории

страхования и теориях массового обслуживания, запасов, надежности и водохранилищ. Однако автор отмечает, что он не стремился к полноте и точности изложения, поскольку «во-первых, это стимулирует работу ума читателей, во-вторых, любое совершенство и точность скучны, а в-третьих, первые две отговорки очень удобны».

Сравним теперь с одним из наиболее поздних руководств по теории риска для актуариев [5], первый из авторов которого является вместе с де Вильдером издателем серии «Страхование» и, наряду с покойным ныне Хазендонком (Haezendonck), соучредителем журнала «Insurance: Mathematics and Economics». Книга [5] тоже состоит из 3 частей, но первая из них посвящена упорядочиванию рисков (что вообще не затрагивается в рецензируемой книге), вторая — теории достоверности, хотя в меньшем объеме, а третья — IBNR-резервам (которым у де Вильдера уделено место только в последней главе). Вопросы разорения и оптимизации рассматриваются лишь в связи с упорядочиванием рисков, принципами подсчета премий или перестрахованием. Как и [8], книга [5] снабжена упражнениями.

Наконец, еще остановимся на монографии Грандела [6] «Некоторые аспекты теории риска». Она характеризуется высоким математическим уровнем, однако полностью посвящена вопросам разорения (главным образом на бесконечном интервале). Начиная с классической модели, автор переходит ко все более сложным процессам выплаты. Как отмечает сам автор, эту книгу не следует рассматривать как учебник для актуариев.

На русском языке имеется мало публикаций, посвященных проблематике рецензируемой книги. В этой связи можно отметить книгу Г. И. Фалина [9], являющуюся введением в математический анализ рисков в страховании.

Таким образом, мы видим, что де Вильдер успешно справился с поставленной им задачей создать современное руководство по теории риска, практически не отсылающее к другим источникам. Особенно интересна при этом часть II, так как другие книги почти ничего не говорят об оптимизации. В то же время, полностью заменить все существовавшие до этого учебники и монографии эта книга не может.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beard R. E., Pentikainen T., Pensonen E.* Risk Theory. Methuen, 1969. 2nd. London: Chapman & Hall, 1977, 195 p.
2. *Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., Nesbitt C. J.* Actuarial Mathematics. Itasca, IL: Society of Actuaries, 1986, 624 p.
3. *Bühlmann H.* Mathematical Methods in Risk. Berlin: Springer-Verlag, 1970. (2nd printing, 1996, 210 p.)
4. *Gerber H. U.* An Introduction to Mathematical Risk Theory. — Philadelphia: S. S. Heubner Foundation for Actuarial Education, University of Pennsylvania, 1979, 164 p.
5. *Goovaerts M., Kaas R., von Heerwaarden A., Bauwelinckx T.* Effective Actuarial Methods. Amsterdam: North-Holland, 1990, 316 p.
6. *Grandell J.* Aspects of Risk Theory. New York: Springer-Verlag, 1992, 175 p.
7. *Seal H. L.* Stochastic Theory of Risk Business. New York: Wiley, 1969, 210 p.
8. *Straub E.* Non-Life Insurance Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1988, 136 p.
9. *Фалин Г. И.* Математический анализ рисков в страховании. М.: Российский юридический издательский дом, 1994, 130 с.