Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова, О точности нормальной аппроксимации. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 555–564

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:00:04

2. Запорожец Д. Н. Случайные полиномы и геометрическая вероятность. — Докл. РАН, 2005, т. 400, № 3, с. 299–303.
3. Ибрагимов И. А., Маслова Н. Б. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов. I. Коэффициенты с нулевым средним. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 2, с. 229–248.
4. Ибрагимов И. А., Маслова Н. Б. О среднем числе вещественных нулей случайных полиномов. II. Коэффициенты с ненулевым средним. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 3, с. 495–503.
5. Ибрагимов И. А., Маслова Н. Б. Среднее число вещественных корней случайных полиномов. — Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 1, с. 13–16.
6. Ибрагимов И. А., Подкорытов С. С. О случайных вещественных алгебраических поверхностях. — Докл. РАН, 1995, т. 343, № 6, с. 734–736.
7. Шпаро Д. И., Шур М. Г. О распределении корней случайных многочленов. — Вест. Моск. ун-та, 1962, № 3, с. 40–43.
8. Bloch A., Pólya G. On the roots of certain algebraic equations. — Proc. London Math. Soc., 1931, v. 33, p. 102–114.
9. Edelman A., Kostlan E. How many zeros of a random polynomial are real? — Bull. Amer. Math. Soc., 1995, v. 32, № 1, p. 1–37.
10. Hammersley J. M. The zeroes of a random polynomial. — Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Berkeley–Los Angeles: Univ. California Press, 1956, p. 89–111.
11. Ibragimov I., Zeitouni O. On roots of random polynomials. — Trans. Amer. Math. Soc., 1997, v. 349, № 6, p. 2427–2441.
12. Kac M. On the average number of real roots of a random algebraic equation. — Bull. Amer. Math. Soc., 1943, v. 49, p. 314–320.
13. Kac M. On the average number of real roots of a random algebraic equation. II. — Proc. London Math. Soc., 1949, v. 50, p. 390–408.
14. Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. I. — J. London Math. Soc., 1938, v. 13, p. 288–295.
15. Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. II. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1939, v. 35, p. 133–148.
16. Littlewood J. E., Offord A. C. On the number of real roots of a random algebraic equation. III. — Матем. сб., 1943, т. 12, № 3, с. 277–286.
17. Logan B. F., Shepp L. A. Real zeros of random polynomials. — Proc. London Math. Soc., 1968, v. 18, p. 29–35.
18. Logan B. F., Shepp L. A. Real zeros of random polynomials. II. — Proc. London Math. Soc., 1968, v. 18, p. 308–314.
19. Shepp L. A., Vanderbei R. J. The complex zeros of random polynomials. — Trans. Amer. Math. Soc., 1995, v. 347, № 11, p. 4365–4384.

Поступила в редакцию
12.IV.2005

© 2005 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*, ШЕВЦОВА И. Г.*

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ. II¹⁾

Приведены оценки асимптотически правильных констант в оценках точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными момен-

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkorolev@comtv.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-01-00428, 04-01-00671, 05-07-90103).

тами порядка $2 + \delta$, $0 < \delta < 1$. Построены уточненные практически применимые оценки точности нормальной аппроксимации, при этом правая часть оценки представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых является ляпуновской дробью с абсолютной константой, близкой к асимптотически правильной, а второе убывает быстрее $n^{-\delta/2}$. При этом для второго слагаемого получены явные оценки и специальные «разложения».

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, нормальная аппроксимация, неравенство Берри–Эссеена, оценка скорости сходимости, асимптотически правильная константа.

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{D}X_1 = \sigma^2 < \infty. \quad (1)$$

Функцию распределения случайной величины X_1 обозначим $F(x)$, ее характеристическую функцию — $f(t)$. Введем аналогичные обозначения для функции распределения и характеристической функции нормированной суммы $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/(\sigma\sqrt{n})$:

$$F_n(x) = F^{*n}(x\sigma\sqrt{n}), \quad f_n(t) = \left[f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n.$$

Функцию распределения и плотность стандартного нормального закона обозначим $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Центральная предельная теорема утверждает, что последовательность функций распределения нормированных сумм S_n случайных величин, удовлетворяющих условию (1), при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится к стандартной нормальной функции распределения:

$$\rho(F_n, \Phi) \equiv \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0.$$

Известно, что при условии существования абсолютного момента порядка $2 + \delta$ с $0 < \delta \leq 1$, т.е. при условии

$$\beta^{2+\delta} \equiv \mathbf{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty, \quad (2)$$

величина $\rho(F_n, \Phi)$ имеет порядок $n^{-\delta/2}$. А именно, справедливо неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C_\delta L_n^{2+\delta}, \quad (3)$$

где

$$L_n^{2+\delta} = \frac{\beta^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta} n^{\delta/2}},$$

а C_δ — положительная абсолютная постоянная (см., например, [8, гл. VI, теорема 6]). При $\delta = 0$ нормальная сходимость имеет место, но может быть как угодно медленной [6].

Для случая $\delta = 1$ наилучшая на сегодняшний день верхняя оценка соответствующей константы C_1 в неравенстве (3) равна 0.7655 [11].

Для случая $0 < \delta < 1$ в работе [16] (см. также [15]) получена следующая таблица значений оценок константы C_δ :

$\delta =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$C_\delta \leq$	1.102	1.076	1.008	0.950	0.902	0.863	0.833	0.812	0.802

Л. Падитц [14] показал, что при $\delta = 0$ имеет место неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq 3.51 \cdot \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{E} \left(X_1^2 \min \left\{ 1, \frac{|X_1|}{\sigma\sqrt{n}} \right\} \right),$$

откуда вытекает, что имеет место равномерная по $\delta \in [0, 1]$ оценка $C_\delta \leq 3.51$, так как при любом $\delta \in (0, 1]$ выражение в правой части последнего неравенства не превосходит $3.51 \cdot L_n^{2+\delta}$.

Для случая $\delta = 1$ известны многие работы (см., например, [13], [2], [12], [10]), в которых разрыв между точностью, устанавливаемой неравенством (3), и *реальной* точностью нормальной аппроксимации компенсируется за счет отыскания минимально возможной константы $\underline{C}$, обеспечивающей выполнение неравенства

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \underline{C} L_n^3 + o(L_n^3).$$

Еще в работе [13] было показано, что $\underline{C} = (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi}) \approx 0.4098$ (дальнейшие усилия были направлены на поиск оптимальной оценки для $o(L_n^3)$, см. исторический обзор и соответствующий список литературы в [4]).

В то же время для случая $0 < \delta < 1$ практически ничего не известно об оценках наименьших возможных констант $\underline{C}(\delta)$, обеспечивающих при любых распределениях F , удовлетворяющих условиям (1) и (2), справедливость неравенства

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \underline{C}(\delta) L_n^{2+\delta} + o(L_n^{2+\delta}). \quad (4)$$

Другими словами,

$$\underline{C}(\delta) = \sup \limsup_{n \rightarrow \infty} (L_n^{2+\delta})^{-1} \rho(F_n, \Phi),$$

где супремум берется по всем распределениям F , удовлетворяющим условиям (1) и (2). Данная статья посвящена проблеме оценивания асимптотически правильных констант $\underline{C}(\delta)$ для случая $0 < \delta < 1$ и, как следствие, построению уточненных практически вычислимых оценок точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Эта задача, наряду с теоретическим, представляет некоторый интерес и с точки зрения *практических* приложений, в которых используется нормальная аппроксимация (например, в теории надежности, теории управления запасами, актуарной и финансовой математике), поскольку в большинстве практических задач объем выборки n *фиксирован*. Вопрос о точности нормальной аппроксимации для распределений сумм слагаемых, распределения которых имеют тяжелые (в некотором смысле) хвосты, приобретает дополнительную важность в связи с необходимостью решать задачи, связанные с большими рисками. Случай $0 < \delta < 1$ как раз соответствует ситуации, в которой слагаемые имеют настолько тяжелые хвосты, что у них отсутствуют моменты третьего порядка.

В работе [4] мы рассмотрели «гладкий» случай, когда распределения слагаемых имеют ограниченную плотность. Здесь мы рассматриваем случай *произвольных* распределений слагаемых. Мы выписываем практически вычислимую оценку для $o(L_n^{2+\delta})$ в (4) и оцениваем асимптотически правильную константу $\underline{C}(\delta)$. Мы вводим функцию $C(\delta)$ такую, что $\underline{C}(\delta) \leq C(\delta)$, причем в зависимости от δ

$$(0.0665 \approx) \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \leq C(\delta) \leq \frac{1}{\pi} \quad (\approx 0.3184)$$

(левая граница соответствует значениям δ , близким к единице, правая — значениям δ , близким к нулю).

В книге [9, с. 611] отмечено, что «в последнее время большое внимание уделялось обобщениям теоремы Берри–Эссеена на величины, не имеющие момента третьего порядка. В этом случае граница в неравенстве выражается через момент дробного порядка или какую-нибудь родственную величину... Обычные вычисления в этом случае достаточно запутаны, а попытки разработать универсальные методы, применимые ко многим случаям, не предпринимались... Необходимость в моментах

третьего порядка появляется в доказательстве теоремы [Берри-Эссеена] только из-за неравенства

$$\left| e^{itx} - 1 - itx + \frac{(tx)^2}{2} \right| \leq \frac{|tx|^3}{6} \gg. \quad (5)$$

В большинстве работ, посвященных изучению ситуации, когда существуют лишь моменты порядка $2 + \delta$, неравенство (5) используется в некотором конечном интервале изменения аргумента x , а для остальных значений аргумента используется граница порядка $(tx)^2$ (см., например, [7], [8], [1]). Для доказательства наших результатов (см. лемму 1 ниже) вместо упомянутого метода усечения, основанного на использовании неравенства (5), мы используем иной подход, базирующийся на оценке

$$\left| e^{ix} - \left(1 + ix + \dots + \frac{(ix)^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{2^{1-\delta} \Gamma(1+\delta) |x|^{n+\delta}}{\Gamma(n+1+\delta)}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

справедливой для любого целого $n \geq 0$ и для любого $\delta \in (0, 1]$. Это позволяет использовать традиционную универсальную схему рассуждений, основанную на применении классического неравенства сглаживания и его модификаций, ориентированных на оптимизацию абсолютных констант. Доказательство неравенства (6) (в неявной форме) можно найти, например, в [5, с. 212–213].

Здесь и далее символ $\Gamma(\cdot)$, как обычно, обозначает эйлерову гамма-функцию,

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty z^{y-1} e^{-z} dz, \quad y > 0.$$

Всюду далее для упрощения записей, не ограничивая общности, мы полагаем $\sigma^2 = 1$.

2. Вспомогательные результаты. Пусть d — некоторое число, лежащее в интервале $(0, \sqrt{2})$. Введем функции

$$a_1(d) = \frac{1}{4} \sum_{r=2}^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2} \right)^{r-2} = -\frac{1}{d^4} \left[\frac{d^2}{2} + \ln \left(1 - \frac{d^2}{2} \right) \right], \quad (7)$$

$$a_2(d) = d^{2-\delta} a_1(d) + \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}, \quad (8)$$

$$b_1(d) = \frac{1}{2} - d^{\delta/2} a_2(d). \quad (9)$$

Несложно видеть, что

$$a_1(d) = \frac{1}{4} \sum_{r=2}^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2} \right)^{r-2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \sum_{r=3}^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2} \right)^{r-2} \right],$$

причем

$$\sum_{r=3}^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{2} \right)^{r-2} = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j+2} \left(\frac{d^2}{2} \right)^j \leq \frac{1}{3} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{d^2}{2} \right)^j = \frac{d^2}{3(2-d^2)},$$

так что

$$\lim_{d \rightarrow 0+} a_1(d) = \frac{1}{8},$$

и, стало быть,

$$\lim_{d \rightarrow 0+} a_2(d) = \frac{2^{1-\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)}, \quad \lim_{d \rightarrow 0+} b_1(d) = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Более того, можно убедиться, что функция $b_1(d)$ монотонно убывает при $d \in (0, \sqrt{2})$, причем на интервале $(0, \sqrt{2})$ лежит единственный нуль этой функции, который мы обозначим $d_0(\delta)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (1) и (2) при $0 < \delta \leq 1$. Тогда для любого $d \in (0, \sqrt{2})$ и любого $n \geq 1$ при $|t| \leq d\sqrt{n}/\beta^{2+\delta}$ справедлива оценка

$$\left| f_n(t) - e^{-t^2/2} \right| \leq a_2(d) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} |t|^{2+\delta} \exp \{ -b_1(d) t^2 \}.$$

Доказательство, основанное на применении неравенства (6), см. в [4].

Пусть $v > 0$ и $\gamma > 0$ — произвольные числа. Рассмотрим плотность вероятностей

$$p_{v,\gamma}(x) = \frac{\gamma}{2\pi v} \left(\frac{\sin(\gamma x/(2v))}{\gamma x/(2v)} \right)^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Несложно убедиться, что плотности $p_{v,\gamma}(x)$ соответствует характеристическая функция

$$g_{v,\gamma}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{v}{\gamma} |t|, & \text{если } |t| \leq \frac{\gamma}{v}, \\ 0, & \text{если } |t| > \frac{\gamma}{v}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\alpha = \alpha(\gamma) = \int_{-v}^v p_{v,\gamma}(x) dx = \left(= \frac{2}{\pi} \int_0^{\gamma/2} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 dy = \frac{2}{\pi\gamma} (\gamma \operatorname{Si}(\gamma) + \cos \gamma - 1) \right).$$

Пусть γ_0 — решение уравнения

$$\alpha(\gamma) = \frac{1}{2}.$$

Численные расчеты показывают, что $\gamma_0 \approx 1.69957$. Для всех $\gamma > \gamma_0$ имеем $\alpha(\gamma) > \frac{1}{2}$.

Лемма 2. Для любых $\gamma > \gamma_0$ и $v > 0$ справедливо неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{2\alpha(\gamma) - 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma/v}^{\gamma/v} \left| \frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| |g_{v,\gamma}(t)| dt + \frac{v\alpha(\gamma)}{\sqrt{2\pi}} \right].$$

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство леммы 12.2 из [1].

3. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1) и (2) для некоторого $0 < \delta \leq 1$. Тогда для любого $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq C_n(\delta) L_n^{2+\delta},$$

где

$$C_n(\delta) = \inf_{\substack{\gamma_0 < \gamma < \infty \\ 0 < d < d_0(\delta)}} \left\{ \frac{1}{2\alpha(\gamma) - 1} \left[K_\delta(d) + \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{\sqrt{2\pi}dn^{(1-\delta)/2}} \right] \right\},$$

$$K_\delta(d) = \frac{\Gamma((2+\delta)/2) a_2(d)}{2\pi[b_1(d)]^{1+\delta/2}}.$$

Поскольку $C_n(\delta)$ — невозрастающая функция n при каждом $\delta \in (0, 1]$, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 неравенство (3) справедливо с $C_\delta \leq C_1(\delta)$, где

$$C_1(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \inf_{\substack{\gamma_0 < \gamma < \infty \\ 0 < d < d_0(\delta)}} \left\{ \frac{1}{2\alpha(\gamma) - 1} \left[\frac{\Gamma((2+\delta)/2) a_2(d)}{\sqrt{2\pi} [b_1(d)]^{1+\delta/2}} + \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{d} \right] \right\}.$$

Значения константы $C_1(\delta)$ при некоторых δ приведены в таблице.

δ	$C_1(\delta)$	δ	$C_1(\delta)$	δ	$C_1(\delta)$
0.05	$9.7036 \cdot 10^7$	0.40	6.1990	0.75	3.2426
0.10	$6.8100 \cdot 10^4$	0.45	5.2118	0.80	3.1219
0.15	365.8883	0.50	4.5772	0.85	3.0229
0.20	54.9891	0.55	4.1387	0.90	2.9408
0.25	20.2670	0.60	3.8199	0.95	2.8721
0.30	11.3497	0.65	3.5790	1.00	2.8143
0.35	7.9034	0.70	3.3916		

Несмотря на то, что приведенные значения оценки абсолютной константы $C_1(\delta)$ в целом довольно невелики, они все же заметно хуже значений, полученных в работах [16] и [14]. Возможно, оценки абсолютной константы $C_1(\delta)$ могут быть уточнены за счет использования более тонкого неравенства сглаживания, нежели то, которое составляет утверждение леммы 2. Тем не менее, теорема 1 позволяет получить вполне приемлемые и, по крайней мере для некоторых диапазонов δ , неулучшаемые оценки асимптотически правильной константы $\underline{C}(\delta)$ в (4). Этому и посвящена оставшаяся часть данного пункта.

Учитывая соотношения (10), легко видеть, что на интервале $(0, d_0(\delta))$ функция $K_\delta(d)$ монотонно и непрерывно возрастает, причем

$$\lim_{d \rightarrow 0+} K_\delta(d) = \frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((\delta+2)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} \equiv C(\delta), \quad \lim_{d \rightarrow d_0(\delta)-} K_\delta(d) = +\infty. \quad (11)$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует корень $d(\delta, \varepsilon)$ уравнения

$$K_\delta(d) = C(\delta) + \varepsilon, \quad (12)$$

лежащий в полуинтервале $(0, d_0(\delta))$. При этом $d(\delta, \varepsilon)$ как функция ε монотонно и непрерывно возрастает от $0+$ до $d_0(\delta)$ при ε , изменяющемся от $0+$ до $+\infty$.

Легко видеть, что при γ , изменяющемся от γ_0 до ∞ , величина $\alpha(\gamma)$ монотонно и непрерывно возрастает от $\frac{1}{2}$ до 1 . Поэтому на указанном интервале изменения параметра γ функция $w(\gamma) = (2\alpha(\gamma) - 1)^{-1}$ монотонно и непрерывно убывает от $+\infty$ до 1 . Стало быть, для любого $\omega > 0$ существует конечный корень $\gamma(\omega)$ уравнения

$$w(\gamma) = 1 + \omega, \quad (13)$$

причем $\gamma(\omega)$ монотонно и непрерывно убывает от $+\infty$ до γ_0 при ω , изменяющемся от 0 до $+\infty$. При этом

$$\alpha(\gamma(\omega)) = \frac{2 + \omega}{2(1 + \omega)}. \quad (14)$$

Принимая во внимание сказанное, из теоремы 1 с учетом (14) мы получаем следующий результат, который делает более наглядным вид коэффициента $C_n(\delta)$.

Следствие 2. В условиях (1) и (2) при $0 < \delta \leq 1$ для любого $n \geq 1$

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \inf_{\varepsilon > 0, \omega > 0} \left\{ (C(\delta) + \varepsilon)(1 + \omega) + \frac{(2 + \omega)\gamma(\omega)}{2\sqrt{2\pi}d(\delta, \varepsilon)n^{(1-\delta)/2}} \right\} \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

Пусть $\{\omega_n\}_{n \geq 1}$ и $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ — две последовательности положительных чисел такие, что

$$\omega_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_n \downarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Выберем эти последовательности так, чтобы

$$\frac{\gamma(\omega_n)}{d(\delta, \varepsilon_n)} = o(n^{(1-\delta)/2}) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

(такой выбор возможен в силу монотонной и непрерывной зависимости функций $\gamma(\omega)$ и $d(\delta, \varepsilon)$ от своих аргументов, обоснованной выше). Тогда, подставляя указанные ω_n и ε_n в вытекающее из следствия 2 неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq (C(\delta) + \varepsilon)(1 + \omega) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + \frac{(2 + \omega)\gamma(\omega)}{2\sqrt{2\pi}d(\delta, \varepsilon)} \frac{\beta^{2+\delta}}{\sqrt{n}}, \quad (15)$$

мы приходим к заключению о справедливости следующего утверждения.

Следствие 3. Пусть выполнены условия (1) и (2) при $0 < \delta < 1$. Тогда неравенство (4) справедливо при $\underline{C}(\delta) \leq C(\delta)$, где $C(\delta)$ определено в (11), причем для величины $o(L_n^{2+\delta})$ в правой части неравенства (4) справедливо представление

$$o(L_n^{2+\delta}) = (\varepsilon_n + \omega_n C(\delta) + \varepsilon_n \omega_n) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + \frac{(2 + \omega_n)\gamma(\omega_n)}{2\sqrt{2\pi}d(\delta, \varepsilon_n)} \frac{\beta^{2+\delta}}{\sqrt{n}}.$$

Другими словами, в условиях (1) и (2) при $\delta \in (0, 1)$

$$\underline{C}(\delta) \leq \inf_n C_n(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(\delta) = C(\delta) \equiv \frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((2+\delta)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)}.$$

Значения константы $C(\delta)$ при некоторых δ приведены в таблице.

δ	$C(\delta)$	δ	$C(\delta)$	δ	$C(\delta)$
0.05	0.2867	0.40	0.1515	0.75	0.0907
0.10	0.2592	0.45	0.1399	0.80	0.0850
0.15	0.2352	0.50	0.1294	0.85	0.0797
0.20	0.2141	0.55	0.1201	0.90	0.0750
0.25	0.1955	0.60	0.1116	0.95	0.0706
0.30	0.1791	0.65	0.1040	1.00	0.0665
0.35	0.1645	0.70	0.0970		

Сопоставляя эту таблицу с таблицей из работы [16], мы замечаем, что при всех значениях $\delta \in (0, 1)$ константа $C(\delta)$ существенно меньше константы C_δ . При этом отношение $C_\delta/C(\delta)$ изменяется от 4 (при малых δ) до примерно 11 (при δ , близких к единице). Минимальное же значение отношения $C_1(\delta)/C(\delta)$ превосходит 35.

Несложно убедиться, что

$$\sup_{0 < \delta \leq 1} C(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{2^{1-\delta/2} \Gamma((2+\delta)/2)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)} = \frac{1}{\pi} < 0.31831.$$

Поэтому мы получаем следующую равномерную по δ оценку асимптотически правильной абсолютной константы $\underline{C}(\delta)$.

Следствие 4. В условиях (1) и (2) с $\delta \in (0, 1)$ выполнено неравенство $\underline{C}(\delta) \leq 1/\pi$.

З а м е ч а н и е 1. Асимптотически правильная константа $\underline{C}(\delta)$ не является непрерывной функцией аргумента δ при $0 < \delta \leq 1$, так как она имеет разрыв в точке $\delta = 1$: из следствия 3 вытекает, что $\lim_{\delta \rightarrow 1-} \underline{C}(\delta) \leq \lim_{\delta \rightarrow 1-} C(\delta) = 1/(6\sqrt{2\pi})$, более того, из асимптотического разложения Эссеена вытекает, что в случае $\delta = 1$ число $1/(6\sqrt{2\pi})$ является наилучшаемой, асимптотически правильной константой для случая нерешетчатых распределений слагаемых. В то же время, как мы уже отмечали, в работе [13] показано, что $\underline{C}(1) = (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi})$.

Чтобы конкретизировать порядок малости величины $o(L_n^{2+\delta})$, фигурирующей в следствиях 3 и 4, для начала заметим, что из следствия 2, очевидно, вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. В условиях (1) и (2) с $\delta \in (0, 1)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует число $c(\delta, \varepsilon) \in (0, \infty)$ такое, что выполнено неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq (C(\delta) + \varepsilon) L_n^{2+\delta} + c(\delta, \varepsilon) (L_n^{2+\delta})^{1+(1-\delta)/\delta}.$$

Комбинируя утверждения следствий 4 и 5, мы получаем следующий результат.

Следствие 6. В условиях (1) и (2) с $\delta \in (0, 1)$ существует число $c(\delta) \in (0, \infty)$ такое, что выполнено неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{\pi} L_n^{2+\delta} + c(\delta) (L_n^{2+\delta})^{1+(1-\delta)/\delta}. \quad (16)$$

От присутствия добавки ε в абсолютной константе при первом слагаемом в правой части (16) можно избавиться совсем. Однако платой за это будет некоторое ухудшение скорости убывания второго слагаемого. Чтобы в этом убедиться, заметим, что с помощью элементарных рассуждений можно получить оценки

$$\gamma(\omega) \leq 2\pi + \frac{4}{\pi\omega} \quad (17)$$

$$d(\delta, \varepsilon) \geq M(\delta) \varepsilon^{2/\delta}, \quad (18)$$

где

$$M(\delta) = \{8\pi(1+\delta)(2+\delta)\}^{2/\delta} \left\{ 2^{1-\delta/2}(1+\delta)(2+\delta) \Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right) + \left(6+\delta + \frac{2^{1-\delta}}{1+\delta}\right) \times \left[2^{1-\delta/2} \Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right) + \pi(1+\delta)(2+\delta) \right] \right\}^{-2/\delta}.$$

Подставляя оценки (17) и (18) в неравенство (15), мы получим

$$\begin{aligned} \rho(F_n, \Phi) \leqslant & C(\delta) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} + (\varepsilon + \omega C(\delta) + \varepsilon \omega) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} M(\delta) \varepsilon^{2/\delta}} \left(\pi + \frac{1}{\pi} + \frac{\omega \pi}{2} + \frac{2}{\pi \omega} \right) \frac{\beta^{2+\delta}}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Полагая теперь в последнем неравенстве $\omega = n^{-a}$ и $\varepsilon = n^{-b}$ с $a > 0$ и $b > 0$, можно заметить, что при

$$a = b = \frac{\delta(1-\delta)}{4(1+\delta)}$$

минимальная скорость убывания выражений, зависящих от a и b , с ростом n является наибольшей. Таким образом, мы окончательно приходим к следующему «разложению» оценки коэффициента $C_n(\delta)$ в теореме 1.

Следствие 7. В условиях (1) и (2) при $\delta \in (0, 1]$

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \left(C(\delta) + Q_1(\delta) \tau_n + Q_2(\delta) \tau_n^2 + Q_3(\delta) \tau_n^3 \right),$$

где

$$\tau_n = \tau_n(\delta) = n^{-(1-\delta)/(2(1+\delta))},$$

$$Q_1(\delta) = 1 + C(\delta) + \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2} M(\delta)}, \quad Q_2(\delta) = 1 + \frac{\sqrt{2}(1+\pi^2)}{\pi^{3/2} M(\delta)}, \quad Q_3(\delta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} M(\delta)}.$$

К примеру, если $\delta = \frac{1}{2}$, то имеет место неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant \frac{\beta^{2+1/2}}{n^{1/4}} \left(0.1294 + \frac{9.98}{n^{1/24}} + \frac{49.1008}{n^{1/12}} + \frac{21.8378}{n^{1/8}} \right).$$

Если же $\delta = \frac{3}{4}$, то

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant \frac{\beta^{2+3/4}}{n^{3/8}} \left(0.0907 + \frac{3.2435}{n^{1/14}} + \frac{12.6510}{n^{1/7}} + \frac{5.2896}{n^{3/14}} \right).$$

З а м е ч а н и е 2. С учетом неравенства $C(\delta) \leqslant 1/\pi$ из следствия 7 мы получаем оценку

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \left(\frac{1}{\pi} + Q_1(\delta) \tau_n + Q_2(\delta) \tau_n^2 + Q_3(\delta) \tau_n^3 \right),$$

из которой вытекает, что при малых δ константу в оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме «портят» добавки, соответствующие более высоким степеням $1/n$, нежели $\delta/2$.

Так как $\beta^{2+\delta} \geqslant 1$, то из следствия 7 вытекает оценка

$$\begin{aligned} \rho(F_n, \Phi) \leqslant & C(\delta) L_n^{2+\delta} + Q_1(\delta) (L_n^{2+\delta})^{1+(1-\delta)/(2(1+\delta))} \\ & + Q_2(\delta) (L_n^{2+\delta})^{1+(1-\delta)/(1+\delta)} + Q_3(\delta) (L_n^{2+\delta})^{1+3(1-\delta)/(2(1+\delta))}. \end{aligned}$$

В правой части этой оценки порядки слагаемых, очевидно, упорядочены по возрастанию. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 8. В условиях (1) и (2) при $\delta \in (0, 1]$ и $n \geqslant \beta^{2+\delta}$ имеет место оценка

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant C(\delta) L_n^{2+\delta} + Q(\delta) (L_n^{2+\delta})^{1+(1-\delta)/(2(1+\delta))},$$

где $C(\delta)$ определено соотношением (11),

$$Q(\delta) = Q_1(\delta) + Q_2(\delta) + Q_3(\delta),$$

а коэффициенты $Q_j(\delta)$, $j = 1, 2, 3$, определены в следствии 7.

4. Доказательство теоремы 1. Из леммы 2 вытекает, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leq \frac{1}{2\alpha(\gamma) - 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\gamma/v}^{\gamma/v} \left| \frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| dt + \frac{v\alpha(\gamma)}{\sqrt{2\pi}} \right] \equiv \frac{I_1 + I_2}{2\alpha(\gamma) - 1}.$$

Величину I_1 оценим с помощью леммы 1 и положим

$$v = v_n = \frac{\gamma\beta^{2+\delta}}{d\sqrt{n}}, \quad d \in (0, \sqrt{2}).$$

Получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{|t| \leq d\sqrt{n}/\beta^{2+\delta}} \left| \frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t} \right| dt \leq \frac{a_2(d)}{2\pi} \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{1+\delta} \exp\{-b_1(d)t^2\} dt \\ &= \frac{a_2(d)}{\pi} \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \int_0^{+\infty} t^{1+\delta} \exp\{-b_1(d)t^2\} dt + \frac{a_2(d)}{2\pi[b_1(d)]^{1+\delta/2}} \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \int_0^{+\infty} y^{\delta/2} e^{-y} dy \\ &= \frac{\Gamma((2+\delta)/2) a_2(d)}{2\pi[b_1(d)]^{1+\delta/2}} \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}} \equiv K_\delta(d) \frac{\beta^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом область возможных значений параметра d сужается до интервала $(0, d_0(\delta))$, определяющего область сходимости интеграла в (19), где $d_0(\delta)$ — единственный нуль монотонно убывающей функции $b_1(d)$ на $(0, \sqrt{2})$.

Подставляя указанное выше значение $v = v_n$ в выражение для I_2 , получаем

$$I_2 = \frac{v\alpha(\gamma)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\gamma\alpha(\gamma)}{\sqrt{2\pi}d} \frac{\beta^{2+\delta}}{\sqrt{n}}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением. М.: Наука, 1982, 286 с.
2. Золотарев В. М. Абсолютная оценка остаточного члена в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 1, с. 108–119.
3. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
4. Королев В. Ю., Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 3, с. 353–366.
5. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
6. Мацкявичюс В. К. О нижней оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 3, с. 565–569.
7. Осипов Л. В. Уточнение теоремы Линдберга. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, в. 2, с. 339–342.
8. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
10. Чистяков Г. П. Новое асимптотическое разложение и асимптотически наилучшие постоянные в теореме Ляпунова. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 326–344.
11. Шиганов И. С. Об уточнении верхней константы в остаточном члене центральной предельной теоремы. — Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды ВНИИСИ, 1982, с. 109–115.
12. Bentkus V. On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theoret. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 211–224.
13. Esseen C.-G. A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarietidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.

14. Paditz L. Über eine globale Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List» Dresden, 1986, v. 33, № 2, p. 399–404.
15. Paditz L. On the error-bound in the nonuniform version of Esseen's inequality in the L_p -metric. — Statistics, 1996, v. 27, № 3–4, p. 379–394.
16. Tysiak W. Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry-Esseen-Abschätzungen. Dissertation. Wuppertal, 1983.

Поступила в редакцию
22.IV.2005

© 2005 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

МАКСИМАЛЬНЫЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ¹⁾

Проводится обобщение максимальных ветвящихся процессов (введенных Дж. Ламперти) с области значений $\mathbf{Z}_+$ на $\mathbf{R}_+$. Изучены некоторые их свойства, доказана эргодическая теорема, приведены примеры. Указаны приложения процессов в теории массового обслуживания.

Ключевые слова и фразы: максимальные ветвящиеся процессы, эргодические теоремы, ассоциированность, монотонность по параметрам, экстремумы, вентильные бесконечнолинейные системы.

1. Введение. Параллели между теорией суммирования и теорией экстремумов случайных величин давно и хорошо известны.

Так, центральной предельной теореме (и ее аналогам) соответствует теорема об экстремальных типах, устойчивым распределениям — максимум-устойчивые [1, гл. 1], устойчивым процессам Леви — экстремальные процессы [2, § 6.5]. При отказе от независимости случайных величин в обоих случаях вводятся некоторые условия перемешивания, позволяющие получать предельные теоремы и в ситуации зависимости.

Классическими объектами исследования в теории случайных процессов являются ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона (с одним типом частиц и дискретным временем) [3], [4]. Оказывается, для них также возможно разумным образом построить «экстремальные» аналоги, которые и называются максимальными ветвящимися процессами (МВП).

А именно, рассматриваются случайные процессы со значениями в $\mathbf{Z}_+$, заданные стохастически рекуррентными формулами вида

$$Z_{n+1} = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n}, \quad (1)$$

где через $\bigvee$ обозначена операция взятия максимума и $\xi_{m,n}$, $m \geq 1$, $n \geq 0$, — независимые случайные величины с общим распределением F на $\mathbf{Z}_+$. Полагаем (как и в случае суммирования), что результат взятия максимума «нуль раз» (при $Z_n = 0$) равен нулю.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 00-01-00131, 03-01-00724, 04-01-00700 и НШ 1758.2003.1.