Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Максимальные ветвящиеся процессы с неотрицательными значениями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 564–570

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp96>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:37:32

14. Paditz L. Über eine globale Fehlerabschätzung im zentralen Grenzwertsatz. — Wiss. Z. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List» Dresden, 1986, v. 33, № 2, p. 399–404.
15. Paditz L. On the error-bound in the nonuniform version of Esseen's inequality in the L_p -metric. — Statistics, 1996, v. 27, № 3–4, p. 379–394.
16. Tysiak W. Gleichmäßige und nicht-gleichmäßige Berry-Esseen-Abschätzungen. Dissertation. Wuppertal, 1983.

Поступила в редакцию
22.IV.2005

© 2005 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

МАКСИМАЛЬНЫЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ¹⁾

Проводится обобщение максимальных ветвящихся процессов (введенных Дж. Ламперти) с области значений $\mathbf{Z}_+$ на $\mathbf{R}_+$. Изучены некоторые их свойства, доказана эргодическая теорема, приведены примеры. Указаны приложения процессов в теории массового обслуживания.

Ключевые слова и фразы: максимальные ветвящиеся процессы, эргодические теоремы, ассоциированность, монотонность по параметрам, экстремумы, вентильные бесконечнолинейные системы.

1. Введение. Параллели между теорией суммирования и теорией экстремумов случайных величин давно и хорошо известны.

Так, центральной предельной теореме (и ее аналогам) соответствует теорема об экстремальных типах, устойчивым распределениям — максимум-устойчивые [1, гл. 1], устойчивым процессам Леви — экстремальные процессы [2, § 6.5]. При отказе от независимости случайных величин в обоих случаях вводятся некоторые условия перемешивания, позволяющие получать предельные теоремы и в ситуации зависимости.

Классическими объектами исследования в теории случайных процессов являются ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона (с одним типом частиц и дискретным временем) [3], [4]. Оказывается, для них также возможно разумным образом построить «экстремальные» аналоги, которые и называются максимальными ветвящимися процессами (МВП).

А именно, рассматриваются случайные процессы со значениями в $\mathbf{Z}_+$, заданные стохастически рекуррентными формулами вида

$$Z_{n+1} = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n}, \quad (1)$$

где через $\bigvee$ обозначена операция взятия максимума и $\xi_{m,n}$, $m \geq 1$, $n \geq 0$, — независимые случайные величины с общим распределением F на $\mathbf{Z}_+$. Полагаем (как и в случае суммирования), что результат взятия максимума «нуль раз» (при $Z_n = 0$) равен нулю.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 00-01-00131, 03-01-00724, 04-01-00700 и НШ 1758.2003.1.

Можно сказать (по аналогии с процессами Гальтона–Ватсона), что в максимальном ветвящемся процессе выживают потомки только той частицы, у которой их больше всего. Понятно также, что множество возможных значений МВП (при $n \geq 1$) совпадает с множеством возможных значений числа потомков. Из (1) следует, что процесс является однородной цепью Маркова на этом множестве.

Другую интерпретацию МВП можно предложить в теории массового обслуживания, рассмотрев вентильные бесконечнолинейные системы. Так называют системы с бесконечным числом приборов, в которых доступ заявок к обслуживанию регулируется вентилем. Предполагается, что вентиль открыт только в том случае, когда все приборы свободны. Заявки поступают в очередь с бесконечным числом мест ожидания, а обслуживание происходит по стадиям. В начале стадии, когда вентиль открывается, все заявки из очереди мгновенно получают доступ к приборам и далее обслуживаются параллельно и независимо, до полного освобождения всех приборов. В момент освобождения всех приборов вентиль вновь открывается для новой партии заявок (пришедших за это время) и следующей стадии.

Рассмотрим подобную систему с дискретным временем, и пусть в каждый момент времени поступает ровно по одной заявке. Тогда в силу параллельности работы приборов время обслуживания очередной партии заявок (а значит, и количество заявок в следующей) равно максимуму из времен их обслуживания. Таким образом, обозначая через Z_n длительность n -й стадии, а через $\xi_{m,n}$ — времена обслуживания заявок на ней, получаем в точности (1).

Вентильные бесконечнолинейные системы с непрерывным временем и пуассоновским входным потоком рассматривались, например, в [5] (другими методами). В этом случае необходимо оговорить, что происходит, если вентиль открывается при пустой очереди. Наиболее естественно предположить, что система ждет поступления новой заявки, с которой и начинается следующая стадия.

МВП были введены в [6] (в связи с моделями дальнего действия перколяции), и там же были получены критерии их возвратности. А именно (в предположении $F(0) = 0$), при выполнении условия

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) < e^{-\gamma}, \quad (2)$$

где $\gamma = 0.577 \dots$ — константа Эйлера, цепь $\{Z_n\}$ положительно возвратна, и напротив, при

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) > e^{-\gamma}$$

имеет место $Z_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, почти наверное (п.н.).

Далее, в [7] рассмотрен критический случай $x(1 - F(x)) \rightarrow e^{-\gamma}$, $x \rightarrow +\infty$, с учетом дальнейших членов разложения хвоста на бесконечности. Показано, что если $(e^\gamma x(1 - F(x)) - 1) \ln x \rightarrow d$, $x \rightarrow +\infty$, то процесс возвратен при $d < \pi^2/12$ и уходит на бесконечность п.н. при $d > \pi^2/12$.

Согласно (1) и предположению о случае $Z_n = 0$, процесс имеет переходные вероятности

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \leq j \mid Z_n = i) = F(j)^i, \quad i, j \in \mathbf{Z}_+$$

(где полагаем $0^0 = 1$), что подсказывает рассмотреть цепи Маркова на произвольном измеримом множестве $T \subset \mathbf{R}_+$ с переходными вероятностями

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \leq y \mid Z_n = x) = F(y)^x, \quad x, y \in T, \quad (3)$$

где F также сосредоточено на T .

Подобные процессы могут рассматриваться как самостоятельно, так и в качестве предельных (в каком-либо смысле) для МВП на $\mathbf{Z}_+$ (нормированных определенным образом). Например, они могут пригодиться для описания поведения вентильных бесконечнолинейных систем, в том числе предельного при большой загрузке и т.п.

В частности, для вентильной бесконечнолинейной системы с непрерывным временем и пуассоновским входным потоком последовательность длительностей стадий на периоде занятости удовлетворяет (3) с $F(x) = \exp\{-\lambda \bar{B}(x)\}$, $x \geq 0$, где λ — интенсивность входного потока, $B(x)$ — функция распределения времени обслуживания одной заявки, $\bar{B}(x) = 1 - B(x)$. Действительно, обозначим длительность n -й стадии

через Z_n . При условии $Z_n = x$ число заявок, поступивших на данной стадии, — пуассоновское с параметром λx , а Z_{n+1} есть максимум этого (случайного) числа независимых случайных величин с распределением B . Таким образом,

$$P(Z_{n+1} \leq y \mid Z_n = x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} B(y)^k = \exp\{-\lambda x \bar{B}(y)\} = F(y)^x.$$

Для описания системы на всем протяжении времени требуются уже МВП с иммиграцией в момент обнуления и т.п.

Далее будем говорить о максимальных ветвящихся процессах на T и обозначать МВП(T). Заметим, что аналогичным обобщением для процессов Гальтона–Ватсона являются процессы Иржины [8] (с непрерывным множеством состояний и дискретным временем), однако в данном случае T может быть любым измеримым подмножеством $\mathbf{R}_+$.

Если $T_1 \subset T_2$, то всякий МВП(T_1) является также МВП(T_2). Таким образом, любой МВП(T), в частности МВП($\mathbf{Z}_+$), является МВП($\mathbf{R}_+$).

Формула (1) для таких МВП в общем случае уже не имеет места, но в соответствии с (3) они допускают эквивалентное представление стохастической рекуррентной последовательностью вида:

$$Z_{n+1} = \begin{cases} F^{-1}(U_{n+1}^{1/Z_n}), & Z_n > 0, \\ 0, & Z_n = 0, \end{cases} \quad n \geq 0, \quad (4)$$

где $F^{-1}(y) = \inf\{x: F(x) \geq y\}$ и U_n , $n \geq 1$, — независимые равномерно распределенные на $(0, 1)$ случайные величины, а $Z_0 \geq 0$ и не зависит от них.

2. Некоторые свойства максимальных ветвящихся процессов. Докажем некоторые простые свойства МВП такие, как свойство преобразования подобия, ассоциированность [9] и монотонность по параметрам [10].

Свойство 1. Если $\{Z_n\}$ является МВП(T) с $F(x)$, то $\{\lambda Z_n\}$ при любом $\lambda > 0$ является МВП(λT) с $F(x/\lambda)^{1/\lambda}$.

Это свойство доказывается непосредственно подстановкой в (3).

Из данного свойства следует замкнутость класса МВП($\mathbf{R}_+$) относительно умножения на $\lambda > 0$ и замкнутость МВП($\mathbf{Z}_+$) при $\lambda \in \mathbf{N}$.

Лемма 1. Для любых чисел $Z'_0 \leq Z''_0$ и $U'_n \leq U''_n$, $n \geq 1$, где $Z'_0, Z''_0 \geq 0$ и $U'_n, U''_n \in (0, 1)$, числовые последовательности $\{Z'_n\}$ и $\{Z''_n\}$, построенные по формуле (4), удовлетворяют условию $Z'_n \leq Z''_n$ для всех $n \geq 0$.

Доказательство. По условию $Z'_0 \leq Z''_0$. Пусть верно $Z'_n \leq Z''_n$ для некоторого $n \geq 0$. Тогда, поскольку F^{-1} — неубывающая функция, из $U'_{n+1} \leq U''_{n+1}$ и формулы (4) получаем $Z'_{n+1} \leq Z''_{n+1}$. Утверждение леммы верно по принципу математической индукции.

Будем далее пользоваться понятием ассоциированности случайных величин [9]. Заметим, что свойство ассоциированности бывает очень полезным и имеет разнообразные применения в изучении случайных процессов и полей [11], [12].

Функцию многих переменных $f(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, назовем монотонно неубывающей, если из $x'_i \leq x''_i$, $1 \leq i \leq n$, следует $f(x') \leq f(x'')$. Случайные величины набора $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ называются ассоциированными, если $\text{cov}(f(\zeta), g(\zeta)) \geq 0$ для всех тех монотонно неубывающих f и g , для которых эта ковариация существует. Говорят, что случайный процесс или поле $\{\zeta(t): t \in \mathcal{T}\}$ ассоциированы, если ассоциированы их значения $\zeta(t_1), \dots, \zeta(t_n)$ для любого конечного множества $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathcal{T}$.

Согласно [9], независимые случайные величины ассоциированы; монотонно неубывающие функции от ассоциированных случайных величин также обладают этим свойством.

Свойство 2. Любой МВП ассоциирован.

Доказательство. Достаточно заметить, что по лемме 1 любые $Z_{i_1}, \dots, Z_{i_m}$ представляют собой неубывающие функции от независимых случайных величин Z_0 и U_n , $1 \leq n \leq \max\{i_1, \dots, i_m\}$.

Для установления монотонности по параметрам [10] введем отношение (частичного) порядка между распределениями: $F_1 \prec F_2$, если $F_1(x) \geq F_2(x)$ для любого x . Заметим, что из $F_1 \prec F_2$ следует $F_1^{-1}(y) \leq F_2^{-1}(y)$, $y \in (0, 1)$.

Обозначим через $Z = \mathcal{Z}(F, G)$ МВП с распределением «числа потомков» F и начальным распределением G для Z_0 .

Свойство 3. Если $F' \prec F''$ и $G' \prec G''$, то можно построить процессы $Z' = \mathcal{Z}(F', G')$ и $Z'' = \mathcal{Z}(F'', G'')$ на одном вероятностном пространстве так, что $Z'_n \leq Z''_n$ для всех $n \geq 0$ п.н.

Доказательство. Пусть U_0 — равномерно распределенная на $(0, 1)$ случайная величина, не зависящая от U_n , $n \geq 1$. Полагая $Z'_0 = (G')^{-1}(U_0)$ и $Z''_0 = (G'')^{-1}(U_0)$, получаем $Z'_0 \leq Z''_0$. Далее, из отношения $(F')^{-1}(y) \leq (F'')^{-1}(y)$ и формулы (4) получаем свойство 3 по принципу математической индукции.

3. Эргодическая теорема. Заметим, что для МВП нуль всегда является поглощающим состоянием. Так, для МВП(Z_+) при условиях (2) и $F(0) > 0$ это приводит к вырождению п.н. [6]. Для МВП(T), если $F(0) = 0$, нуль можно просто исключить из множества состояний, рассматривая процесс с ненулевым начальным условием. Однако если нуль является предельной точкой T , остается возможность асимптотической сходимости к нему при $n \rightarrow \infty$. Следующая теорема дает достаточные условия для того, чтобы исключить уход процесса как в нуль, так и на бесконечность, и сделать его эргодическим. Здесь и далее имеется в виду эргодичность по Харрису [13, гл. 1].

Теорема 1. Если для МВП(T), $T \subset (0, +\infty)$, выполнено условие (2) и

$$\liminf_{x \rightarrow 0} x(-\ln F(x)) > e^{-\gamma}, \quad (5)$$

то процесс эргодический.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $T = (0, +\infty)$. Прежде всего заметим, что условия (2) и (5) эквивалентны утверждению о существовании таких $0 < x_1 \leq x_2$ и $0 < c_2 < e^{-\gamma} < c_1$, что $F(x) \leq e^{-c_1/x}$ при $x \leq x_1$ и $F(x) \geq e^{-c_2/x}$ при $x \geq x_2$.

В качестве функции Ляпунова рассмотрим $g(x) = (\ln(x/x_2))_+ + (\ln(x_1/x))_+$, где $y_+ = \max\{0, y\}$. Обозначим

$$\mu(x) = \mathbf{E}(g(Z_{n+1}) \mid Z_n = x) - g(x),$$

тогда

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mathbf{E} \left\{ \ln \left(\frac{Z_{n+1}}{x_2} \right) \mathbf{I}(Z_{n+1} > x_2) \mid Z_n = x \right\} \\ &\quad + \mathbf{E} \left\{ \ln \left(\frac{x_1}{Z_{n+1}} \right) \mathbf{I}(Z_{n+1} < x_1) \mid Z_n = x \right\} - g(x) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\ln \left(\frac{Z_{n+1}}{x_2} \right) \mathbf{I}(Z_{n+1} > x_2) > y \mid Z_n = x \right) dy \\ &\quad + \int_0^\infty \mathbf{P} \left(\ln \left(\frac{x_1}{Z_{n+1}} \right) \mathbf{I}(Z_{n+1} < x_1) > y \mid Z_n = x \right) dy - g(x) \\ &\leq \int_0^\infty (1 - F(x_2 e^y)^x) dy + \int_0^\infty F(x_1 e^{-y})^x dy - g(x) \\ &\leq \int_0^\infty \left(1 - \exp \left\{ -\frac{c_2 x}{x_2} e^{-y} \right\} \right) dy + \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{c_1 x}{x_1} e^y \right\} dy - g(x) \\ &= \gamma + \ln \frac{c_2 x}{x_2} - \text{Ei} \left(-\frac{c_2 x}{x_2} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{c_1 x}{x_1} \right) - \left(\left(\ln \frac{x}{x_2} \right)_+ + \left(\ln \frac{x_1}{x} \right)_+ \right), \quad (6) \end{aligned}$$

где $\mathbf{I}(A)$ — индикатор события A и через Ei обозначена интегральная показательная функция

$$\text{Ei}(x) = - \int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x < 0,$$

обладающая, в частности, следующими свойствами:

$$\text{Ei}(-x) - \ln x \rightarrow \gamma, \quad x \rightarrow 0; \quad \text{Ei}(-x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Обозначим правую часть (6) через $\mu^*(x)$, тогда, используя (7), получаем $\mu^*(x) \rightarrow \ln(c_2/e^{-\gamma}) < 0$, $x \rightarrow \infty$, и $\mu^*(x) \rightarrow -\ln(c_1/e^{-\gamma}) < 0$, $x \rightarrow 0$. Следовательно, в силу оценки (6) существуют такие $\varepsilon > 0$ и $0 < v_1 \leq v_2$, что $\mu(x) \leq -\varepsilon$ при $x \notin V = [v_1, v_2]$. Кроме того, $\sup_{x \in V} \mathbf{E}(g(Z_{n+1}) \mid Z_n = x) < \infty$. Таким образом, условия Ляпунова [13, § 4.2] выполнены.

Проверим теперь условие перемешивания. Заметим, что для любых $0 < a < b$ и $0 < y_1 \leq y \leq y_2$ верно

$$F(b)^y - F(a)^y \geq \frac{y_1}{y_2} (F(b)^{y_2} - F(a)^{y_2}),$$

откуда следует, что для любого измеримого B выполняется

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \in B \mid Z_n = x) \geq \frac{v_1}{v_2} \mathbf{P}(Z_{n+1} \in B \mid Z_n = v_2) \quad \forall x \in V. \quad (8)$$

Кроме того, любой МВП неприводим и аperiodичен (иначе говоря, из любого состояния $x \in T$ можно попасть в любое множество $B \subset T$, причем за один шаг). Из условий Ляпунова и (8) по теореме 2 [13, § 2] следует эргодичность МВП.

Достаточное условие Ламперти для положительной возвратности МВП на $\mathbf{Z}_+$ (см. [6]) получается из теоремы 1 как частный случай.

Далее будем обозначать эргодическое распределение $\{Z_n\}$ через Ψ , а случайную величину с таким распределением через $\tilde{Z}$.

Свойство 4. Если для двух эргодических МВП(T) с F' и F'' верно $F' \prec F''$, то $\Psi' \prec \Psi''$.

Доказательство. Возьмем произвольные $G' = G''$ на T и построим процессы на одном вероятностном пространстве согласно свойству 3. Тогда из $Z'_n \leq Z''_n$ п.н. следует $\mathbf{P}\{Z'_n \leq x\} \geq \mathbf{P}\{Z''_n \leq x\}$, $n \geq 1$, откуда при $n \rightarrow \infty$ получаем $\Psi'(x) \geq \Psi''(x)$, $x > 0$.

Очевидно, свойство 4 верно и в тех случаях, когда одно или оба предельных распределения сосредоточены в нуле.

Следствие 1. Если для МВП($\mathbf{R}_+$) выполнено (2) и $F(0) > 0$, то процесс вырождается п.н.

Здесь под вырождением понимается обращение процесса в нуль, начиная с некоторого (случайного) момента.

Доказательство. Заметим, что для любых $C > 0$, $n \geq 0$ верно

$$\mathbf{P}\{Z_{n+1} = 0\} = \mathbf{E}F(0)^{Z_n} \geq \mathbf{P}\{Z_n = 0\} + F(0)^C \mathbf{P}\{0 < Z_n \leq C\}.$$

Последовательность $\mathbf{P}\{Z_n = 0\}$ монотонно не убывает и ограничена, а значит, стремится к некоторому пределу $p_0 \in (0, 1]$. Получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{0 < Z_n \leq C\} \leq p_0 F(0)^{-C} < \infty,$$

так что по лемме Бореля–Кантелли Z_n попадает в $(0, C]$ конечное число раз п.н. при любом $C > 0$, что может означать либо вырождение, либо уход на бесконечность при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $F^*(x) = F(x) \exp\{-1/x^2\} \mathbf{I}(x > 0)$, тогда $F \prec F^*$. Согласно свойству 3, можно построить МВП($\mathbf{R}_+$) с F^* такой, что $Z_n \leq Z_n^*$ п.н. Заметим, что F^* удовлетворяет условиям теоремы 1, так что $\mathbf{P}\{Z_n^* \rightarrow +\infty\} = 0$, а следовательно, и $\mathbf{P}\{Z_n \rightarrow +\infty\} = 0$. Таким образом, происходит вырождение п.н.

Это следствие можно применить для вывода достаточного условия конечности (п.н.) периода занятости вентиляционной бесконечнолинейной системы с непрерывным временем и пуассоновским входным потоком (см. выше). Поскольку в данном случае $\bar{F}(x) \sim \lambda \bar{B}(x)$, $x \rightarrow +\infty$, то оказывается достаточно выполнения неравенства

$$\lambda \limsup_{x \rightarrow +\infty} x(1 - B(x)) < e^{-\gamma}.$$

4. Примеры.

4.1. Переходные вероятности цепи Маркова для МВП(N) имеют вид:

$$p_{i,j} = F(j)^i - F(j-1)^i, \quad i, j \in \mathbf{N}.$$

Таким образом, в случае конечного $T \subset \mathbf{N}$ по матрице $P = (p_{i,j})$ не составляет труда рассчитать стационарное распределение.

Например, пусть число потомков принимает значения K и L с вероятностями p и $1-p$ соответственно, $1 \leq K < L$, $p \in [0, 1]$. Тогда стационарные вероятности определяются по формулам:

$$\mathbf{P}\{\tilde{Z} = K\} = \frac{p^L}{1 - p^K + p^L}, \quad \mathbf{P}\{\tilde{Z} = L\} = \frac{1 - p^K}{1 - p^K + p^L}.$$

4.2. Пусть $T = \{1/k : k \in \mathbf{N}\}$ и $F(1/k) = p^{k-1}$, $p \in (0, 1)$. В данном случае распределение F и множество T дискретны, однако нуль является предельной точкой T . Имеем $F(x) = p^{\lceil 1/x \rceil - 1} \leq p^{(1/x)-1}$, $x \in (0, 1]$, где через $[a]$ обозначено округление числа a в большую сторону. По теореме 1 такой МВП эргодический при $p < \exp\{-e^{-\gamma}\} = 0,570 \dots$

4.3. Если функция распределения $F(x)$ непрерывна и строго возрастает на $(0, +\infty)$, а $F(0) = 0$, то (4) преобразованием $\zeta_n = -\ln(-\ln F(Z_n))$ приводится к форме общей (нелинейной) авторегрессии первого порядка:

$$\zeta_{n+1} = f(\zeta_n) + \eta_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (9)$$

где $f(u) = \ln F^{-1}(\exp\{-e^{-u}\})$ и независимые случайные величины $\eta_n = -\ln(-\ln U_n)$, $n \geq 1$, имеют функцию распределения Гумбеля $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$.

Эргодичность подобных моделей изучалась, например, в [14].

Пусть $F(x) = \exp\{-(x/c)^\alpha\}$, $x, c, \alpha > 0$ (распределение Фреше), тогда МВП допускает конструктивное представление

$$Z_{n+1} = \nu_{n+1} Z_n^{1/\alpha},$$

где ν_n , $n \geq 1$, независимы и имеют распределение F , а (9) переписывается в форме линейной авторегрессии

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n \alpha^{-1} + \ln c + \eta_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Отметим, что $\mathbf{E}\eta_1 = \gamma$. При $\alpha < 1$ процесс $\{\zeta_n\}$ уходит на $\pm\infty$ в зависимости от знака начального условия ζ_0 . При $\alpha > 1$ процесс $\{\zeta_n\}$ эргодический. При $\alpha = 1$ имеем простое случайное блуждание, уходящее на $+\infty$ при $c > e^{-\gamma}$, на $-\infty$ при $c < e^{-\gamma}$ и осциллирующее между $\pm\infty$ при $c = e^{-\gamma}$. Отсюда легко получить результаты для $\{Z_n\}$, если учесть, что $Z_n = F^{-1}(\Lambda(\zeta_n))$, откуда $Z_n \rightarrow 0$ при $\zeta_n \rightarrow -\infty$ и $Z_n \rightarrow +\infty$ при $\zeta_n \rightarrow +\infty$, а эргодичность сохраняется.

Очевидно, условия теоремы 1 выполняются только при $\alpha > 1$, поскольку тогда $x(1 - F(x)) \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$, и $-x \ln F(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0$. В этом случае МВП эргодический.

4.4. Пусть $F(x) = \exp\{c(1 - 1/x)\}$, $x \in T = (0, 1)$, $c > 0$, тогда $F^{-1}(y) = 1/(1 - (\ln y)/c)$, $y \in (0, 1)$, и (4) принимает форму

$$Z_{n+1} = \frac{Z_n}{Z_n - (\ln U_{n+1})/c},$$

которая заменой $\rho_n = 1/Z_n$ и $\sigma_n = -(\ln U_n)/c$ приводится к виду обобщенной авторегрессии первого порядка

$$\rho_{n+1} = 1 + \sigma_{n+1}\rho_n.$$

Известно [13, § 8.4], что поведение такой последовательности определяется знаком $\mathbf{E} \ln \sigma_1 = -\gamma - \ln c$. При $c < e^{-\gamma}$ получаем $\rho_n \rightarrow +\infty$ и $Z_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ (п.н.). При $c > e^{-\gamma}$ процессы $\{\rho_n\}$ и $\{Z_n\}$ эргодические (в согласии с теоремой 1).

В дальнейшем теоретически интересными представляются точка зрения на сложение (числа потомков) у процессов Гальтона-Ватсона и взятие максимума у МВП

как на частные случаи обобщенного суммирования [15] и рассмотрение процессов, порожденных подобными операциями.

Автор благодарен А. М. Зубкову и А. В. Булинскому за внимание к работе, полезные советы и помощь в поиске информации, а также рецензенту за полезные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 392 с.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 304 с.
3. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
4. Ватутин В. А., Зубков А. М. Ветвящиеся процессы. I. — Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теорет. кибернетика. М.: ВИНТИ, 1985, т. 23, с. 3–67.
5. Browne S., Coffman E. G., Jr., Gilbert E. N., Wright P. E. The gated infinite-server queue: uniform service times. — SIAM J. Appl. Math., 1992, v. 52, № 6, p. 1751–1762.
6. Lamperti J. Maximal branching processes and «long-range percolation». — J. Appl. Probab., 1970, v. 7, № 1, p. 89–98.
7. Lamperti J. Remarks on maximal branching processes. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 1, с. 46–54.
8. Иржина М. Ветвящиеся случайные процессы с непрерывным пространством состояний. — Теория вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, в. 4, с. 482–484.
9. Esary J. D., Prochan F., Walkup D. W. Association of random variables, with applications. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 5, p. 1466–1474.
10. Штойян Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М.: Мир, 1979, 268 с.
11. Булинский А. В., Вронский М. А. Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей. — Фундам. прикл. матем., 1996, т. 2, № 4, с. 999–1018.
12. Лебедев А. В. Экстремумы полей дробового шума в случае правильно меняющихся хвостов. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 790–794.
13. Боровков А. А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: УРСС, 1999, 440 с.
14. Bhattacharya R. N., Lee C. Ergodicity of nonlinear first order autoregressive models. — J. Theoret. Probab., 1995, v. 8, № 1, p. 207–219.
15. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 416 с.

Поступила в редакцию
29.I.2002

Исправленный вариант
3.II.2003

© 2005 г.

ЛОБАНОВ С. Н.*

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАДЕНИЙ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ СО СНОСОМ

В работе исследуется распределение максимального падения и падения с максимума для броуновского движения со сносом. В отличие от стандартных мер риска эти статистики не фиксируют начальное значение, относительно которого измеряются потери. Вместо этого падения

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: me@slobanov.ru