Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лобанов, Вероятностные характеристики падений броуновского движения со сносом, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 570–579

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp97>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:27:08

как на частные случаи обобщенного суммирования [15] и рассмотрение процессов, порожденных подобными операциями.

Автор благодарен А. М. Зубкову и А. В. Булинскому за внимание к работе, полезные советы и помощь в поиске информации, а также рецензенту за полезные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 392 с.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 304 с.
3. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
4. Ватутин В. А., Зубков А. М. Ветвящиеся процессы. I. — Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теорет. кибернетика. М.: ВИНТИ, 1985, т. 23, с. 3–67.
5. Browne S., Coffman E. G., Jr., Gilbert E. N., Wright P. E. The gated infinite-server queue: uniform service times. — SIAM J. Appl. Math., 1992, v. 52, № 6, p. 1751–1762.
6. Lamperti J. Maximal branching processes and «long-range percolation». — J. Appl. Probab., 1970, v. 7, № 1, p. 89–98.
7. Lamperti J. Remarks on maximal branching processes. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 1, с. 46–54.
8. Иржина М. Ветвящиеся случайные процессы с непрерывным пространством состояний. — Теория вероятн. и ее примен., 1959, т. 4, в. 4, с. 482–484.
9. Esary J. D., Prochan F., Walkup D. W. Association of random variables, with applications. — Ann. Math. Statist., 1967, v. 38, № 5, p. 1466–1474.
10. Штойян Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М.: Мир, 1979, 268 с.
11. Булинский А. В., Вронский М. А. Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей. — Фундам. прикл. матем., 1996, т. 2, № 4, с. 999–1018.
12. Лебедев А. В. Экстремумы полей дробового шума в случае правильно меняющихся хвостов. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 790–794.
13. Боровков А. А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: УРСС, 1999, 440 с.
14. Bhattacharya R. N., Lee C. Ergodicity of nonlinear first order autoregressive models. — J. Theoret. Probab., 1995, v. 8, № 1, p. 207–219.
15. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 416 с.

Поступила в редакцию
29.I.2002

Исправленный вариант
3.II.2003

© 2005 г.

ЛОБАНОВ С. Н.*

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАДЕНИЙ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ СО СНОСОМ

В работе исследуется распределение максимального падения и падения с максимума для броуновского движения со сносом. В отличие от стандартных мер риска эти статистики не фиксируют начальное значение, относительно которого измеряются потери. Вместо этого падения

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: me@slobanov.ru

выбирают в качестве начальной и конечной точек некоторые моменты внутри интервала. В частности, максимальное падение выбирает два последовательных момента, чтобы максимизировать разницу между значениями процесса в этих точках. Падение с максимума использует соответственно абсолютный максимум и последующий локальный минимум в качестве точек отсчета потерь. Основной результат работы — формула для преобразования Лапласа по длине интервала от функции распределения падений. Преобразования Лапласа в данном случае более удобны для аналитической работы, чем явные формулы. Тем более, что явная формула функции распределения известна только для максимального падения. Она представляется в виде суммы ряда с коэффициентами, являющимися корнями уравнений, которые не решаются в аналитическом виде. Кроме того, обращение преобразования Лапласа не превосходит по вычислительной сложности задачу суммирования ряда, фигурирующего в формуле для функции распределения максимального падения.

Ключевые слова и фразы: падение броуновского движения.

1. Введение. В данной работе исследуется распределение максимального падения и падения с максимума броуновского движения со сносом на отрезке. Эти характеристики описывают соответственно наибольшую разность между двумя последовательными точками броуновского движения и разницу между абсолютным максимумом и последующим локальным минимумом. Эти статистики отличаются от обычных мер риска, которые описывают разницу между значениями процесса в начальной и конечной точках. Предлагаемый в данной работе метод измерения рискованности портфеля интересен прежде всего потому, что заинтересованные стороны оценивают стоимость портфеля, используя в качестве отправной точки различные моменты времени внутри интервала. Правила, согласно которым агенты финансовых рынков выбирают исходные точки для оценки доходности активов, могут быть достаточно сложны, что подтверждается многочисленными публикациями на эту тему. Этот круг вопросов получил название «prospect theory» и широко исследуется в поведенческой экономике. Например, агенты могут использовать в качестве точки отсчета абсолютный максимум портфеля на отрезке, потому что люди легко привыкают к «хорошим» вещам и не хотят признавать «плохие». Статистики, изучаемые в этой статье, очень тесно связаны с максимумом и минимумом броуновского движения на отрезке. В действительности они совпадают с разницей между максимумом и минимумом броуновского движения на множестве траекторий, которые сначала достигают своего абсолютного максимума на отрезке, а затем достигают своего абсолютного минимума. Тем не менее, распределение падений было впервые изучено в работе [5] для специального случая с нулевым сносом. Впоследствии, на основании работы [4], в статье [7] была получена явная формула для функции распределения максимального падения в общем случае. Однако формула, предложенная в этой статье, сложна для использования в аналитических построениях. Кроме того, получение значений функции распределения с ее помощью требует численных вычислений достаточно высокой сложности. В данной работе получено преобразование Лапласа по длине интервала для функции распределения падений. Этот результат может быть использован, в частности, для вычисления функции распределения с помощью численных методов. Обращение преобразования Лапласа является не более сложной процедурой, чем непосредственное вычисление значения функции распределения по формуле, которая приведена в работе [7]. Кроме того, с аналитической точки зрения преобразование Лапласа более удобно, чем бесконечная сумма с коэффициентами, являющимися последовательными корнями некоторого уравнения.

Опишем структуру данной работы. В п. 2 содержатся основные определения и формулируются основные свойства исследуемых случайных величин. В п. 3 доказывается несколько тождеств по распределению, которые устанавливают связь между исследуемыми статистиками и «bang-bang»-процессом. Этот пункт обобщает работу [5], которая исследует свойства падений в случае нулевого сноса. Пункт 4 содержит основные результаты данной работы, а именно преобразования Лапласа для

функций распределения падений. Пункт 5 демонстрирует приложения полученных преобразований Лапласа. В п. 6 резюмируются полученные результаты и обсуждаются дальнейшие направления исследования в области экстремальных характеристик броуновского движения.

2. Определение и основные свойства. Главной целью данной работы является описание распределения следующих статистик для броуновского движения со сносом:

$$\mathbb{D}_t^\lambda = \sup_{0 \leq s' \leq s'' \leq t} (B_{s'}^\lambda - B_{s''}^\lambda), \quad \bar{\mathbb{D}}_t^\lambda = B_{\sigma_t}^\lambda - \inf_{\sigma_t < s' < t} B_{s'}^\lambda, \quad \underline{\mathbb{D}}_t^\lambda = \sup_{0 < s' < \sigma'_t} B_{s'}^\lambda - B_{\sigma'_t}^\lambda,$$

где $B_t^\lambda = B_t + \lambda t$ — броуновское движение со сносом λ , а σ_t и σ'_t определены следующим образом:

$$\sigma_t = \inf \left\{ 0 \leq s \leq t: B_s^\lambda = \sup_{0 \leq u \leq t} B_u^\lambda \right\}, \quad \sigma'_t = \inf \left\{ 0 \leq s \leq t: B_s^\lambda = \inf_{0 \leq u \leq t} B_u^\lambda \right\}.$$

Как легко заметить, падения броуновского движения тесно связаны между собой. Например, $\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda = \underline{\mathbb{D}}_t^\lambda = \mathbb{D}_t^\lambda$ на множестве $\{\sigma_t \leq \sigma'_t\}$. Также очевидно, что $\mathbb{D}_t^\lambda = \max(\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda, \underline{\mathbb{D}}_t^\lambda)$ на множестве $\{\sigma_t > \sigma'_t\}$. Кроме того, статистики $\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda$ и $\underline{\mathbb{D}}_t^\lambda$ одинаково распределены, как показывает следующая теорема.

Теорема 1. *Имеет место следующее равенство законов распределения:*
 $\bar{\mathbb{D}}_t^{\lambda \text{ law}} \equiv \underline{\mathbb{D}}_t^\lambda.$

Доказательство. Для того чтобы доказать данное равенство, удобно рассмотреть следующий процесс на интервале $[0, t]$:

$$\tilde{B}_s^\lambda = B_t^\lambda - B_{t-s}^\lambda = \lambda t + B_t - (\lambda t - \lambda s) - B_{t-s} = \lambda s + (B_t - B_{t-s}).$$

Известно, что $\tilde{B}_s^\lambda = B_t - B_{t-s}$ является броуновским движением на $[0, t]$. Таким образом, $\tilde{B}_s^\lambda$ также является броуновским движением на $[0, t]$. В частности, это означает, что $1 - \tilde{\sigma}_t = \sigma'_t$ выполняется почти наверное. Таким образом, возможно использовать $\tilde{B}_s^\lambda$ в определении $\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda$ и осуществить следующую цепочку преобразований, которая завершает доказательство данной теоремы:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{D}}_t^\lambda &= \tilde{B}_{\tilde{\sigma}_t}^\lambda - \inf_{\tilde{\sigma}_t < s' < t} \tilde{B}_{s'}^\lambda = B_t^\lambda - B_{t-\tilde{\sigma}_t}^\lambda - \inf_{\tilde{\sigma}_t < s' < t} (B_t^\lambda - B_{t-s'}^\lambda) \\ &= -B_{t-\tilde{\sigma}_t}^\lambda - \inf_{\tilde{\sigma}_t < s' < t} (-B_{t-s'}^\lambda) = \sup_{0 < s' < \sigma'_t} B_{s'}^\lambda - B_{\sigma'_t}^\lambda = \underline{\mathbb{D}}_t^\lambda. \end{aligned}$$

Следует упомянуть, что $\mathbb{D}_t^\lambda$, $\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda$, $\underline{\mathbb{D}}_t^\lambda$ обладают следующими свойствами масштабирования в случае $\lambda = 0$:

$$\alpha \mathbb{D}_t^\lambda = \mathbb{D}_{\alpha^2 t}^\lambda; \quad \alpha \bar{\mathbb{D}}_t^\lambda = \bar{\mathbb{D}}_{\alpha^2 t}^\lambda; \quad \alpha \underline{\mathbb{D}}_t^\lambda = \underline{\mathbb{D}}_{\alpha^2 t}^\lambda.$$

Эти свойства являются тривиальным следствием соответствующего свойства для стандартного броуновского движения. В случае $\lambda \neq 0$ они принимают вид

$$\alpha \mathbb{D}_t^\lambda = \mathbb{D}_{\alpha^2 t}^{\lambda/\alpha}; \quad \alpha \bar{\mathbb{D}}_t^\lambda = \bar{\mathbb{D}}_{\alpha^2 t}^{\lambda/\alpha}; \quad \alpha \underline{\mathbb{D}}_t^\lambda = \underline{\mathbb{D}}_{\alpha^2 t}^{\lambda/\alpha}.$$

Хотя это утверждение выглядит элементарным, оно позволяет обобщить результаты данной статьи на случай, когда коэффициент диффузии броуновского движения со сносом отличен от 1.

3. Основные тождества по распределению. В этом пункте устанавливается связь между падениями и «bang-bang»-процессом. Эти отношения важны в силу абсолютной локальной непрерывности меры «bang-bang»-процесса относительно ви́неровской меры. Этот факт и приводимая ниже теорема будут использованы для доказательства теоремы 3 в следующем пункте.

Теорема 2. *Выполняются следующие равенства законов распределения:*

$$\mathcal{L}aw(\mathbb{D}_t^\lambda) = \mathcal{L}aw\left(\sup_{0 < s' < t} |X_{s'}^\lambda|\right), \quad (1)$$

$$\mathcal{L}aw(\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda) = \mathcal{L}aw\left(\sup_{g_t < s'' < t} |X_{s''}^\lambda|\right), \quad (2)$$

где X^λ — это «bang-bang»-процесс, который определяется как единственное решение уравнения

$$dX_t^\lambda = -\lambda \operatorname{sign} X_t^\lambda dt + dB_t, \quad X_0^\lambda = 0,$$

а $g = \sup(0 < s \leq t: |X_s^\lambda| = 0)$.

Доказательство. Для доказательства удобно рассмотреть следующие преобразования:

$$\mathbb{D}_t^\lambda = \sup_{0 < s' < s'' < t} (B_{s'}^\lambda - B_{s''}^\lambda) = \sup_{0 < s' < t} \left(\sup_{0 < s'' < s'} B_{s'}^\lambda - B_{s''}^\lambda \right) = \sup_{0 < s'' < t} (\bar{B}_{s''}^\lambda - B_{s''}^\lambda),$$

где $\bar{B}_t^\lambda = \sup_{0 < s < t} (\bar{B}_s^\lambda)$. Как легко заметить, правая часть напоминает один из процессов, который фигурирует в теореме Леви, с тем отличием, что в данном случае используется не стандартное броуновское движение, а броуновское движение со сносом. В работе [6] обобщена теорема Леви и доказано следующее тождество:

$$\mathcal{L}aw(\bar{B}^\lambda - B^\lambda, \bar{B}^\lambda) = \mathcal{L}aw(|X^\lambda|, L(X^\lambda)),$$

где $L(X)$, как обычно, есть локальное время процесса X в нуле. Отсюда получаем доказательство равенства (1).

Для доказательства равенства (2) воспользуемся следующим результатом из работы [6]:

$$\mathcal{L}aw(\bar{B}_s^\lambda - B_s^\lambda, \bar{B}_s^\lambda, B_s^\lambda; s \leq t) = \mathcal{L}aw\left(|X_t^\lambda|, L_t(X^\lambda), L_t(X^\lambda) - |X_t^\lambda|; s \leq t\right).$$

Это позволяет получить следующее равенство:

$$\mathcal{L}aw(\bar{B}_s^\lambda - B_s^\lambda, \bar{B}_s^\lambda, B_s^\lambda; \sigma_t \leq s \leq t) = \mathcal{L}aw\left(|X_t^\lambda|, L_t(X^\lambda), L_t(X^\lambda) - |X_t^\lambda|; g_t \leq s \leq t\right).$$

Используя последнее утверждение, уже просто показать, что верно и равенство (2):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{D}}_t^\lambda &= B_{\sigma_t}^\lambda - \inf_{\sigma_t \leq s \leq t} (B_s^\lambda) = B_{\sigma_t}^\lambda + \sup_{\sigma_t \leq s \leq t} (-B_s^\lambda) \\ &\stackrel{d}{=} L_{g_t}(X^\lambda) - |X_{g_t}^\lambda| + \sup_{g_t \leq s \leq t} (|X_s^\lambda| - L_s(X^\lambda)) \\ &= L_{g_t}(X^\lambda) + \sup_{g_t \leq s \leq t} (|X_s^\lambda|) - L_{g_t}(X^\lambda) = \sup_{g_t \leq s \leq t} |X_s^\lambda|. \end{aligned}$$

4. Получение преобразований Лапласа. Теперь, когда установлена связь распределения падений и «bang-bang»-процесса, можно использовать абсолютную локальную непрерывность между мерой «bang-bang»-процесса и винеровской мерой для получения преобразований Лапласа функций распределения падений.

Теорема 3. *Распределение $\mathbb{D}_t^\lambda$ характеризуется следующим преобразованием Лапласа:*

$$\mathbf{P}\{\mathbb{D}_{S_\theta}^\lambda > a\} = \frac{\exp(-\lambda a)}{\operatorname{ch}(a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) \operatorname{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2})}$$

(где S_θ — экспоненциально распределенная случайная величина с параметром $\theta^2/2$, независимая от B_t , которое использовалось в определении $\mathbb{D}_t^\lambda$), или, эквивалентно,

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\mathbb{D}_t^\lambda > a\} \exp(-st) dt = \frac{\exp(-\lambda a)}{s[\operatorname{ch}(a\sqrt{\lambda^2 + 2s}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \operatorname{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + 2s})]}.$$

Доказательство. Используя теорему 2, легко получить:

$$\mathbf{P}\{\mathbb{D}_{S_\theta}^\lambda > a\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{0 < s' < S_\theta} |X_{s'}^\lambda| > a\right\} = \mathbf{P}\{S_\theta > \hat{T}_a^\lambda\} = \mathbf{E} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} \hat{T}_a^\lambda\right),$$

где $\hat{T}_a^\lambda = \inf\{t > 0: |X_t^\lambda| = a\}$. Рассмотрим следующее преобразование меры:

$$d\tilde{\mathbf{P}}^\lambda = \exp\left(\lambda \int_0^t \operatorname{sign} X_s^\lambda dB_s - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) d\mathbf{P} = \exp\left(\lambda \int_0^t \operatorname{sign} X_s^\lambda dX_s^\lambda + \frac{\lambda^2 t}{2}\right) d\mathbf{P}.$$

Согласно теореме Гирсанова,

$$\mathcal{L}aw(X^\lambda | \tilde{\mathbf{P}}^\lambda) = \mathcal{L}aw(B | \mathbf{P}).$$

Таким образом, для любой ограниченной борелевской функции G имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}G(\hat{T}_a^\lambda) &= \tilde{\mathbf{E}}^\lambda\left(\exp\left(-\lambda \int_0^t \operatorname{sign} X_s^\lambda dX_s^\lambda - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) G(\hat{T}_a^\lambda)\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\exp\left(-\lambda(|B_t| - L_t) - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) G(T_a)\right), \end{aligned}$$

где $T_a = \inf\{t > 0: |B_t| = a\}$, L_t — локальное время броуновского движения в нуле и на последнем этапе преобразований используется формула Танака. Если положить $G(x) = \exp(-x)$, то легко показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} \hat{T}_a^\lambda\right) &= \mathbf{E}\left[\exp\left(-\lambda(|B_{T_a}| - L_{T_a}) - \frac{\lambda^2 T_a}{2}\right) \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} T_a\right)\right] \\ &= \exp(-\lambda a) \mathbf{E} \exp\left(\lambda L_{T_a} - \frac{\lambda^2 + \theta^2}{2} T_a\right). \end{aligned}$$

В [9, гл. 6, § 4, с. 254] утверждается, что процесс

$$[\beta \operatorname{ch}(\beta|B_t|) + \alpha \operatorname{sh}(\beta|B_t|)] \exp\left(-\alpha L_t - \frac{\beta^2}{2} t\right)$$

является локальным мартингалом для любых действительных α и β . Для того чтобы применить этот факт к данной ситуации, достаточно положить $\alpha = -\lambda$, $\beta^2 = \lambda^2 + \theta^2$. Учитывая, что $\mathbf{E} \exp(\lambda L_{T_a} - (\lambda^2 + \theta^2) T_a/2)$ ограничено и

$$\left[\sqrt{\lambda^2 + \theta^2} \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}|a|) - \lambda \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}|a|)\right]$$

не обращается в 0, легко доказать следующее тождество:

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(-\alpha L_{T_a} - \frac{\beta^2}{2} T_a\right)\right] = \frac{\beta}{\beta \operatorname{ch} a\beta + \alpha \operatorname{sh} a\beta}.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mathbb{D}_{S_\theta}^\lambda > a\} &= \exp(-\lambda a) \mathbf{E} \exp\left(\lambda L_{T_a} - \frac{\lambda^2 + \theta^2}{2} T_a\right) \\ &= \frac{\exp(-\lambda a)}{\operatorname{ch}(a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) \operatorname{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2})}. \end{aligned}$$

В процессе доказательства было также показано, что

$$\mathbf{E} \exp(-sT_a^\lambda) = \frac{\exp(-\lambda a)}{\operatorname{ch}(a\sqrt{\lambda^2 + 2s}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \operatorname{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + 2s})}.$$

Этот факт будет использован при доказательстве теоремы 4.

Следующая лемма показывает, каким образом распределение $\mathbb{D}_t^\lambda$ связано с распределением моментов выхода на уровень для $|X_t^\lambda|$. Доказательство данной леммы тривиально и будет опущено.

Лемма 1. Распределение $\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda$ может быть представлено следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda > a\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\{T_{0,n+1}^\lambda > t\} \cap \{T_{a,n}^\lambda < t\}\right),$$

где

$$T_{0,0}^\lambda \equiv 0, \quad T_{a,0}^\lambda = \inf\{t > T_{0,0}^\lambda : |X_t^\lambda| = a\}$$

и, рекурсивно,

$$T_{0,n}^\lambda = \inf\{t > T_{a,n-1}^\lambda : |X_t^\lambda| = 0\}, \quad T_{a,n}^\lambda = \inf\{t > T_{0,n}^\lambda : |X_t^\lambda| = a\}.$$

Следовательно, для описания распределения $\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda$ достаточно знать распределение

$$\mathcal{L}aw(T_{0,n}^\lambda, T_{a,n}^\lambda)$$

при всех n . Учитывая, что $|X_t^\lambda|$ является марковским процессом, достаточно знать распределения $T_{a,0}^\lambda$ и $T_{0,1}^\lambda - T_{a,0}^\lambda$, так как через них легко выражаются распределения всех остальных моментов. Преобразование Лапласа для первой случайной величины уже было получено в теореме 3, а следующая лемма дает преобразование Лапласа второго момента: $\tau_a^\lambda = T_{0,1}^\lambda - T_{a,0}^\lambda$.

Лемма 2. Распределение момента τ_a^λ описывается следующим преобразованием Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp(-s\tau_a^\lambda) = \exp(a\lambda - a\sqrt{\lambda^2 + 2s}).$$

Доказательство. Процесс $|X_t^\lambda|$ является единственным решением следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$d|X_t^\lambda| = -\lambda dt + \text{sign } X_t^\lambda dB_t + dL_t(X^\lambda), \quad |X_{x,0}^\lambda| = 0.$$

Используя это представление, легко получить следующий результат:

$$|X_{T_{0,1}^\lambda}^\lambda| - |X_{T_{a,0}^\lambda}^\lambda| = -\lambda(T_{0,1}^\lambda - T_{a,0}^\lambda) + \int_{T_{a,0}^\lambda}^{T_{0,1}^\lambda} \text{sign } X_t^\lambda dB_t + L_{T_{0,1}^\lambda}(X_x^\lambda) - L_{T_{a,0}^\lambda}(X_x^\lambda).$$

Из определения $T_{a,0}^\lambda$ и $T_{0,1}^\lambda$ следует, что $L_{T_{0,n+1}^\lambda}(X^\lambda) - L_{T_{a,n}^\lambda}(X^\lambda) = 0$. Таким образом, получаем

$$-a = -\lambda\tau_a^\lambda + \tilde{B}_{\tau_a^\lambda}, \quad \text{или, эквивалентно, } \tilde{B}_{\tau_a^\lambda} = \lambda\tau_a^\lambda - a,$$

где $\tilde{B}$ — броуновское движение. Учитывая, что для всех b выполняется тождество

$$\mathbf{E} \exp\left(b\tilde{B}_{\tau_a^\lambda} - \frac{b^2}{2}\tau_a^\lambda\right) = 1,$$

и заменяя $\tilde{B}_{\tau_a^\lambda}$ в этом выражении на $\lambda\tau_a^\lambda - a$, легко получить:

$$\mathbf{E} \exp\left(b\tilde{B}_{\tau_a^\lambda} - \frac{b^2}{2}\tau_a^\lambda\right) = \mathbf{E} \exp(-ba) \exp\left(b\lambda - \frac{b^2}{2}\right) \tau_a^\lambda = 1.$$

Очевидно, что для доказательства леммы достаточно решить следующее уравнение:

$$\lambda b - \frac{b^2}{2} = -s,$$

где решением будет $b = \lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2s}$.

Следует отметить, что сумма $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\{T_{0,n+1}^\lambda > t\} \cap \{T_{a,n}^\lambda < t\})$ может быть выражена через свертку функций распределения $T_{a,0}^\lambda$ и $T_{0,1}^\lambda - T_{a,0}^\lambda$. Но свертка при преобразовании Лапласа переходит в произведение образов исходных функций. Следующая теорема использует это свойство и описывает преобразование Лапласа для $\bar{\mathbb{D}}_t^\lambda$.

Теорема 4. Распределение $\overline{\mathbb{D}}_{S_\theta}^\lambda$ может быть охарактеризовано следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\overline{\mathbb{D}}_{S_\theta}^\lambda > a\} = \frac{e^{-a\lambda} - \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) \operatorname{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) - \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2})}$$

(где S_θ — экспоненциально распределенная случайная величина с параметром $\theta^2/2$, независимая от B_t , которое было использовано в определении $\mathbb{D}_t^\lambda$), или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{P}\{\overline{\mathbb{D}}_t^\lambda > a\} e^{-st} dt \\ = \frac{e^{-a\lambda} - \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + 2s})}{s[\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda^2 + 2s}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \operatorname{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + 2s}) - \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + 2s})]}. \end{aligned}$$

Доказательство. Используя лемму 1, проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{P}\{\overline{\mathbb{D}}_t^\lambda > a\} e^{-st} dt &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}\left(\{T_{0,n+1}^\lambda > t\} \cap \{T_{a,n}^\lambda < t\}\right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\{T_{0,1}^\lambda > t\} \cap \{T_{a,0}^\lambda < t\}\right) e^{-st} dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \int_0^t \mathbf{P}\left(\{T_{0,1}^\lambda > t-q\} \cap \{T_{a,0}^\lambda < t-q\}\right) \rho_{T_{0,n}^\lambda}(q) dq e^{-st} dt, \end{aligned}$$

где $\rho_{T_{0,n}^\lambda}(x)$ — плотность $T_{0,n}^\lambda$. Преобразуя второй член, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \int_0^t \mathbf{P}\left(\{T_{0,1}^\lambda > t-q\} \cap \{T_{a,0}^\lambda < t-q\}\right) \rho_{T_{0,n}^\lambda}(q) dq e^{-st} dt \\ = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \int_q^\infty \mathbf{P}\left(\{T_{0,1}^\lambda > t-q\} \cap \{T_{a,0}^\lambda < t-q\}\right) \\ \quad \times \exp(-s(t-q)) \exp(-sq) dt \rho_{T_{0,n}^\lambda}(q) dq \\ = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \int_q^\infty \mathbf{P}\left(\{T_{0,1}^\lambda > t-q\} \cap \{T_{a,0}^\lambda < t-q\}\right) \\ \quad \times \exp(-s(t-q)) \exp(-sq) dt \rho_{T_{0,n}^\lambda}(q) dq \\ = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\{T_{0,1}^\lambda > t\} \cap \{T_{a,0}^\lambda < t\}\right) e^{-st} \int_0^\infty dt \rho_{T_{0,n}^\lambda}(q) \exp(-sq) dq. \end{aligned}$$

Из этого следует, что:

$$\mathcal{L}(\mathbf{P}\{\overline{\mathbb{D}}_t^\lambda > a\}) = \mathcal{L}\left(\mathbf{P}\left(\{T_{0,1}^\lambda > t\} \cap \{T_{a,0}^\lambda < t\}\right)\right) \sum_{n=0}^\infty \mathcal{L}\left(\rho_{T_{0,n}^\lambda}(t)\right)^n,$$

где $\mathcal{L}$ обозначает преобразование Лапласа по t (аргументом образа является s). Теперь достаточно вычислить каждое преобразование Лапласа, фигурирующее в правой части последнего равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\{T_{0,1}^\lambda > t\} \cap \{T_{a,0}^\lambda < t\}\right) e^{-st} dt \\ = \int_0^\infty \int_0^t \mathbf{P}\{T_{0,1}^\lambda - T_{a,0}^\lambda > t-q \mid T_{a,0}^\lambda = q\} \rho_{T_{a,0}^\lambda}(q) e^{-st} dq dt. \end{aligned}$$

Это выражение является сверткой функций распределения, для каждой из которых преобразование Лапласа уже было получено. Используя лемму 2, легко показать, что:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \mathbf{P}\{T_{0,1}^\lambda - T_{a,0}^\lambda > t' \mid T_{a,0}^\lambda = q\} e^{-st'} dt' \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{\tau > t'\} e^{-st'} dt' = \int_0^\infty [1 - \mathbf{P}\{\tau \leq t'\}] e^{-st'} dt' \\ &= \frac{1}{s} [1 - \exp(a\lambda - a\sqrt{\lambda^2 + 2s})]. \end{aligned}$$

Таким образом, первый член может быть выражен следующим образом:

$$\mathcal{L}(\mathbf{P}(\{T_{0,1}^\lambda > t\} \cap \{T_{a,0}^\lambda < t\})) = \frac{e^{-a\lambda} - \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + 2s})}{s[\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda^2 + 2s}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \operatorname{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + 2s})]}.$$

Применяя тот же подход ко второму члену, получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho_{T_{0,n}^\lambda}(t)) &= [\mathcal{L}(\rho_{T_{0,1}^\lambda - T_{a,0}^\lambda}(x)) \mathcal{L}(\rho_{T_{a,0}^\lambda}(x))]^n \\ &= \left[\frac{\exp(-a\sqrt{\lambda^2 + 2s})}{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda^2 + 2s}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda^2 + 2s})} \right]^n. \end{aligned}$$

Наконец, суммируя ряд, легко показать, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \mathbf{P}\{\mathbb{D}_t^\lambda > a\} e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-a\lambda} - \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + 2s})}{s[\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda^2 + 2s}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \operatorname{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + 2s}) - \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + 2s})]}. \end{aligned}$$

5. Приложение. Чтобы проиллюстрировать удобство использования преобразования Лапласа в аналитических выкладках, опишем асимптотическое поведение среднего для максимального падения при $\lambda \rightarrow \pm 0$. Для этого сначала получим преобразование Лапласа математического ожидания максимального падения по длине интервала:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{E}(\mathbb{D}_t^\lambda) e^{-st} dt &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \mathbf{P}\{\mathbb{D}_t^\lambda > a\} da \right\} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \mathbf{P}\{\mathbb{D}_t^\lambda > a\} e^{-st} dt \right\} da \\ &= \int_0^\infty \frac{\exp(-\lambda a)}{s[\operatorname{ch}(a\sqrt{\lambda^2 + 2s}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \operatorname{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + 2s})]} da \\ &= \int_0^\infty 2 \exp(-\lambda a) \left\{ s \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 2s}} \right) \exp(a\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 2s}} \right) \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \right] \right\}^{-1} da. \end{aligned}$$

Вынося за скобку член $(1 - \lambda/\sqrt{\lambda^2 + 2s}) \exp(a\sqrt{\lambda^2 + 2s})$, а затем переобозначая

$$u = \exp(-2a\sqrt{\lambda^2 + 2s}),$$

легко получить, что

$$\int_0^\infty \mathbf{E}(\mathbb{D}_t^\lambda) e^{-st} dt = \frac{1}{s(\sqrt{\lambda^2 + 2s} - \lambda)} \int_0^1 \frac{u^{\mu-1}}{1 + \beta u} du = \frac{{}_2F_1(1, \mu, 1 + \mu, -\beta)}{\mu s(\sqrt{\lambda^2 + 2s} - \lambda)}, \quad (3)$$

${}_2F_1(1, \mu, 1 + \mu, -\beta)$ — гипергеометрическая функция,

$$\mu = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2s}}{2\sqrt{\lambda^2 + 2s}}, \quad \text{а} \quad \beta = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2s} + \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 2s} - \lambda}.$$

Последнее равенство в (3) было получено с помощью формулы 3.194.5 из справочника [2]. При $\lambda \rightarrow \pm 0$ легко заметить, что $\beta \rightarrow 1$, $\mu \rightarrow \frac{1}{2}$, ${}_2F_1(1, \mu, 1 + \mu, -\beta) \rightarrow {}_2F_1(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1)$, $\sqrt{\lambda^2 + 2s} + \lambda \rightarrow \sqrt{2s}$. Известно (см. [2, с. 1053]), что

$${}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+2k} = \frac{\pi}{4},$$

где в последнем переходе использовалась формула 0.232.2 из того же справочника. В итоге получаем:

$$\int_0^{\infty} \mathbf{E}(\mathbb{D}_t^\lambda) e^{-st} dt \rightarrow \frac{\pi}{(2s)^{3/2}}.$$

Согласно [1], прообразом $s^{-3/2}$ является $\sqrt{t}/\Gamma(\frac{3}{2})$. Таким образом, учитывая, что $\Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}/2$, получаем, что $\mathbf{E}\mathbb{D}_t^\lambda$ асимптотически при $\lambda \rightarrow \pm 0$ ведет себя как $\sqrt{\pi t}/2$. Это полностью согласуется с результатами работ [7] и [5].

Рассмотрим поведение математического ожидания максимального падения при $\lambda \rightarrow -\infty$. При этом $\beta \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$ и ${}_2F_1(1, \mu, 1 + \mu, -\beta) \rightarrow 1$. Таким образом, требуется рассмотреть асимптотику выражения

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{\lambda^2 + 2s}}{s(\sqrt{\lambda^2 + 2s} - \lambda)(\sqrt{\lambda^2 + 2s} + \lambda)} &= \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2s}}{s^2} = -\frac{\lambda}{s^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2s}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)\right) \\ &= -\frac{\lambda}{s^2} - \frac{1}{\lambda s} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right). \end{aligned}$$

Согласно [1], прообразами s^{-2} и $1/s$ являются соответственно t и 1 . Следовательно, $\mathbf{E}\mathbb{D}_t^\lambda$ асимптотически при $\lambda \rightarrow -\infty$ ведет себя как $-\lambda t - 1/\lambda + O(1/\lambda^3)$, что полностью согласуется с работой [7].

Теперь рассмотрим поведение математического ожидания максимального падения при $\lambda \rightarrow +\infty$. При этом $\beta \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 1$ и ${}_2F_1(1, \mu, 1 + \mu, -\beta) = \beta^{-1} \ln(1 + \beta)$ согласно [2]. Таким образом, требуется рассмотреть только асимптотику

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 + 2s}}{s^2} \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2s} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 2s} + \lambda} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2s} + \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 2s} - \lambda}\right) = \frac{\ln \lambda}{s\lambda} - \frac{\ln s}{2s\lambda} + \frac{\ln 2}{2s\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

В последнем переходе опущены достаточно длинные и не имеющие отношения к сути разложения в ряд Тейлора. Согласно [1], прообразом $-(\ln s)/s$ является $\ln t + C$, где

$$C = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln m \right) = 0.5772156649 \dots$$

Соответственно, получается, что $\mathbf{E}\mathbb{D}_t^\lambda$ асимптотически при $\lambda \rightarrow +\infty$ ведет себя как $(\ln \lambda)/\lambda + (\ln t)/(2\lambda) + (\ln 2 + C)/(2\lambda) + O(1/\lambda^3)$, что полностью согласуется с работой [7].

6. Заключение. Итак, было показано, что максимальное падение имеет то же распределение, что и максимум модуля «bang-bang»-процесса на интервале:

$$\mathcal{L}aw(\mathbb{D}_t^\lambda) = \mathcal{L}aw \left(\sup_{0 < s' < t} |X_{s'}^\lambda| \right).$$

Также было показано, что падение с максимума имеет такое же распределение, как и максимум модуля «bang-bang»-процесса после его последнего нуля на интервале:

$$\mathcal{L}aw(\overline{\mathbb{D}}_t^\lambda) = \mathcal{L}aw \left(\sup_{g_t < s' < t} |X_{s'}^\lambda| \right), \quad \text{где } g = \sup(0 < s \leq t: |X_s^\lambda| = 0).$$

В п. 4 получены преобразования Лапласа для функций распределения этих случайных величин по длине интервала:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mathbb{D}_{S_\theta}^\lambda > a\} &= \frac{\exp(-\lambda a)}{\text{ch}(a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) - (\lambda/\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) \text{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2})}, \\ \mathbf{P}\{\overline{\mathbb{D}}_{S_\theta}^\lambda > a\} &= e^{-a\lambda} - \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) \\ &\quad \times \left[\text{ch}(\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}} \text{sh}(a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) - \exp(-a\sqrt{\lambda^2 + \theta^2}) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Эти формулы легко могут быть использованы для вычисления функции распределения с помощью численного обращения преобразования Лапласа, которое эквивалентно одномерному численному интегрированию.

В заключение хотелось бы перечислить основные направления, в которых данные результаты могут быть обобщены. Большой интерес представляет получение распределения падений в случае, когда параметры сноса и диффузии зависят от времени. Также следует отметить, что распределения исследовавшихся случайных величин описывают абсолютное изменение броуновского движения со сносом. Таким образом, они описывают только процентное изменение логнормально распределенного процесса по отношению к точке, где падение начинается. Соответственно, одним из возможных направлений обобщения результатов данной работы может быть получение распределений абсолютных падений для логнормального процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. I, II. М: Наука, 1969, 344 с.; 328 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963, 1097 с.
3. Carmona P., Petit F., Yor M. An identity in law involving reflecting Brownian motion, derived from generalized arc-sine laws for perturbed Brownian motions. — Stochastic Process. Appl., 1999, v. 79, № 2, p. 323–333.
4. Domine M. First passage time distribution of a Wiener process with drift concerning two elastic barriers. — J. Appl. Probab., 1996, v. 33, № 1, p. 164–175.
5. Дуади Р., Йор М., Ширяев А. Н. О вероятностных характеристиках величин «падения» в стандартном броуновском движении. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 3–13.
6. Graversen S. E., Shiryaev A. N. An extension of Lévy distributional properties to the case of a Brownian motion with drift. — Bernoulli, 2000, v. 6, № 4, p. 615–620.
7. Magdon-Ismail M., Atiya A. F., Pratap A., Abu-Mostafa Y. S. On the maximum draw-down of a Brownian motion. — J. Appl. Probab., 2004, v. 41, № 1, p. 147–161.
8. Pitman J. W., Yor M. Quelques identités en loi pour les processus de Bessel. — Astérisque, 1996, v. 236, p. 249–276.
9. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 560 p.

Поступила в редакцию
16.II.2005

© 2005 г.

РАГИМОВ Ф. Г.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА МОМЕНТОВ ПЕРВОГО ВЫХОДА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДАНИИ

В настоящей работе изучаются интегральные предельные теоремы для момента первого выхода случайного блуждания, описываемого нелинейной функцией от сумм независимых случайных векторов. Изучается также асимптотическое поведение среднего значения и дисперсии рассматриваемого момента первого выхода.

* Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, 3701048 Баку, ул. З. Халилова, 23, Азербайджанская Республика; e-mail: ragimovf@rambler.ru