Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Рагимов, Об асимптотическом поведении одного класса моментов первого выхода в многомерном случайном блуждании, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 579–585

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:27:40

Эти формулы легко могут быть использованы для вычисления функции распределения с помощью численного обращения преобразования Лапласа, которое эквивалентно одномерному численному интегрированию.

В заключение хотелось бы перечислить основные направления, в которых данные результаты могут быть обобщены. Большой интерес представляет получение распределения падений в случае, когда параметры сноса и диффузии зависят от времени. Также следует отметить, что распределения исследовавшихся случайных величин описывают абсолютное изменение броуновского движения со сносом. Таким образом, они описывают только процентное изменение логнормально распределенного процесса по отношению к точке, где падение начинается. Соответственно, одним из возможных направлений обобщения результатов данной работы может быть получение распределений абсолютных падений для логнормального процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. I, II. М: Наука, 1969, 344 с.; 328 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963, 1097 с.
3. Carmona P., Petit F., Yor M. An identity in law involving reflecting Brownian motion, derived from generalized arc-sine laws for perturbed Brownian motions. — Stochastic Process. Appl., 1999, v. 79, № 2, p. 323–333.
4. Domine M. First passage time distribution of a Wiener process with drift concerning two elastic barriers. — J. Appl. Probab., 1996, v. 33, № 1, p. 164–175.
5. Дуади Р., Йор М., Ширяев А. Н. О вероятностных характеристиках величин «падения» в стандартном броуновском движении. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 3–13.
6. Graversen S. E., Shiryaev A. N. An extension of Lévy distributional properties to the case of a Brownian motion with drift. — Bernoulli, 2000, v. 6, № 4, p. 615–620.
7. Magdon-Ismail M., Atiya A. F., Pratap A., Abu-Mostafa Y. S. On the maximum draw-down of a Brownian motion. — J. Appl. Probab., 2004, v. 41, № 1, p. 147–161.
8. Pitman J. W., Yor M. Quelques identités en loi pour les processus de Bessel. — Astérisque, 1996, v. 236, p. 249–276.
9. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 560 p.

Поступила в редакцию
16.II.2005

© 2005 г.

РАГИМОВ Ф. Г.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА МОМЕНТОВ ПЕРВОГО ВЫХОДА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДАНИИ

В настоящей работе изучаются интегральные предельные теоремы для момента первого выхода случайного блуждания, описываемого нелинейной функцией от сумм независимых случайных векторов. Изучается также асимптотическое поведение среднего значения и дисперсии рассматриваемого момента первого выхода.

* Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, 3701048 Баку, ул. З. Халилова, 23, Азербайджанская Республика; e-mail: ragimovf@rambler.ru

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, момент первого выхода, интегральная предельная теорема.

1. Введение. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbf{R}^k$, $k \geq 1$, и пусть задана числовая борелевская функция $\Delta(x)$, $x \in \mathbf{R}^k$.

Положим при $n \geq 1$ и $c \geq 0$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad T_n = n \Delta\left(\frac{S_n}{n}\right), \quad \tau = \tau_c = \inf\{n \geq 1: T_n > c\}, \quad \chi_c = T_\tau - c.$$

Изучению асимптотических свойств марковского момента τ_c при $k = 1$ посвящено большое количество работ (см., например, [1], [2]).

В работе [2] для одномерного случая ($k = 1$) изучены интегральные предельные теоремы для τ_c при $c \rightarrow \infty$, под которыми понимается любое утверждение о том, что при некоторых условиях существуют константы $A(c)$, $B(c) > 0$ и случайная величина η такие, что

$$\frac{\tau_c - A(c)}{B(c)} \Rightarrow \eta, \quad c \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где символ $\Rightarrow$ обозначает сходимость по распределению. Многомерный случай (т.е. случай $k > 1$) изучен существенно меньше. Ряд частных случаев в этом направлении имеется в работе [3], где изучаются некоторые задачи последовательного анализа, в которых возникают моменты остановки вида τ_c с $\Delta(x) = \|x\|^2$ ($\|\cdot\|$ — обычная евклидова норма в $\mathbf{R}^k$). В работе [4] исследуется асимптотическое поведение числовых характеристик некоторых граничных функционалов от многомерного случайного блуждания со значениями в конечномерном пространстве.

В настоящей работе изучается интегральная предельная теорема для τ_c (п. 3), а также асимптотическое поведение $\mathbf{E}\tau_c$ и $\mathbf{D}\tau_c$ при $c \rightarrow \infty$ (п. 5). Метод, используемый здесь, является развитием методов изучения сходимости (1) в одномерном случае [1], [2].

2. Условия и обозначения. Будем предполагать, что случайный вектор ξ_1 имеет конечное математическое ожидание $\nu = \mathbf{E}\xi_1$. Обозначим через H класс функций $\Delta(x)$, $x \in \mathbf{R}^k$, для которых выполняются следующие условия: $\Delta(x)$ имеет непрерывные частные производные $\Delta'_{x_i}(x)$, $i = 1, \dots, k$, в некоторой окрестности точки $x = \nu$, причем $\Delta(\nu) > 0$ и $\Delta'_{x_i}(\nu) \neq 0$ хотя бы для одного $i = 1, \dots, k$.

Ниже (x, y) означает обычное скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbf{R}^k$.

Сначала отметим, что при сделанных предположениях относительно функции $F(x)$ имеем

$$T_n = Z_n + \varepsilon_n, \quad (2)$$

где

$$Z_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad X_i = \Delta(\nu) + (\lambda, \xi_i - \nu), \quad \varepsilon_n = n \left(\frac{1}{n} S_n - \nu, \lambda_n - \lambda \right),$$

$$\lambda = (\Delta'_{x_1}(\nu), \dots, \Delta'_{x_k}(\nu)), \quad \lambda_n = (\Delta'_{x_1}(\nu_n), \dots, \Delta'_{x_k}(\nu_n))$$

и ν_n , $n \geq 1$, — некоторая последовательность случайных точек из окрестности ν , причем $\nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu$ при $n \rightarrow \infty$.

Как видно, Z_n , $n \geq 1$, — одномерное случайное блуждание с $\mathbf{E}Z_1 = \Delta(\nu) > 0$.

З а м е ч а н и е 1. Для дважды непрерывно-дифференцируемой функции $\Delta(x)$

$$\varepsilon_n = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i \partial x_j}(\nu_n) \left(\frac{S_n^i}{n} - \nu_i \right) \left(\frac{S_n^j}{n} - \nu_j \right),$$

где S_n^i и ν_i , $i = 1, \dots, k$, суть координаты векторов S_n и ν соответственно.

3. Формулировка основных результатов.

Теорема 1. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbf{R}^k$, $k \geq 1$, со средним значением $\nu = \mathbf{E}\xi_1$ и матрицей ковариаций B , и пусть $\Delta(x) \in H$. Тогда

$$\frac{\tau_c - c/\Delta(\nu)}{\sqrt{c}} \Rightarrow -(\Delta(\nu))^{-3/2}(\eta, \lambda),$$

где $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ — k -мерный нормальный случайный вектор с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций B .

Отметим, что из хорошо известных свойств гауссовских случайных величин следует, что случайная величина (η, λ) имеет нормальное распределение с параметрами $(0, \sum_{i,j=1}^k \text{cov}(\eta_i, \eta_j) \Delta'_{x_i}(\nu) \Delta'_{x_j}(\nu))$.

Теорема 1 допускает следующее обобщение для случайных векторов, принадлежащих области притяжения многомерного устойчивого распределения в смысле Леви-Фельдхейма с характеристическим показателем $\alpha \in [1, 2]$ (см. [6], [7]).

Теорема 2. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbf{R}^k$, $k \geq 1$, с конечным вектором математических ожиданий $\nu = \mathbf{E}\xi_1$ и $\Delta(x) \in H$.

Предположим, что существуют последовательность $A(n)$ и k -мерный случайный вектор J такие, что

$$\frac{S_n - n\nu}{A(n)} \Rightarrow J.$$

Тогда

$$\frac{\tau_c - c/\Delta(\nu)}{A([c/\Delta(\nu)])} \Rightarrow -\frac{(J, \lambda)}{\Delta(\nu)},$$

где $[\cdot]$ — знак целой части.

Отметим, что здесь случайный вектор J имеет k -мерное устойчивое распределение в $\mathbf{R}^k$ с характеристическим показателем $\alpha \in [1, 2]$ и в качестве $A(n)$ можно взять $A(n) = n^{1/\alpha} L(n)$, где $L(x)$, $x > 0$, — медленно меняющаяся функция [7].

4. Доказательство основных результатов. Доказательство сформулированных теорем опирается на следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть случайный вектор ξ_1 имеет конечное математическое ожидание $\nu = \mathbf{E}\xi_1$ и $\Delta(x) \in H$. Тогда:

- 1) для каждого $c \geq 0$ $\mathbf{P}\{\tau_c < \infty\} = 1$;
- 2) $\tau_c \xrightarrow{\text{п.в.}} \infty$ при $c \rightarrow \infty$;
- 3) $\tau_c/c \xrightarrow{\text{п.в.}} 1/\Delta(\nu)$ при $c \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из разложения (2) имеем:

$$\frac{T_n}{n} = \frac{Z_n}{n} + \left(\frac{S_n}{n} - \nu, \lambda_n - \lambda \right).$$

Согласно усиленному закону больших чисел,

$$\left(\frac{S_n}{n} - \nu, \lambda_n - \lambda \right) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{п.в.}} \Delta(\nu) > 0.$$

Отсюда получаем, что $\sup_n T_n = \infty$, следовательно, $\mathbf{P}\{\tau_c < \infty\} = 1$ для каждого $c \geq 0$. Для доказательства утверждения 2) заметим, что величина τ_c как функция от c не убывает с вероятностью единица и вследствие этого

$$\mathbf{P}\left\{\tau_\infty = \lim_{c \rightarrow \infty} \tau_c \leq \infty\right\} = 1.$$

Учитывая это, для каждого m получаем:

$$\mathbf{P}\{\tau_\infty \leq m\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tau_c \leq m\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\max_{k \leq m} T_k > c\right\} = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\mathbf{P}\{\tau_\infty = \infty\} = 1$. Далее, с помощью леммы Рихтера [8] выводим, что при $c \rightarrow \infty$

$$\Delta(\nu) \xleftarrow{\text{п.в.}} \frac{T_{\tau-1}}{\tau} \leq \frac{c}{\tau} \leq \frac{T_\tau}{n} \xrightarrow{\text{п.в.}} \Delta(\nu).$$

Из этих соотношений следует утверждение 3) леммы 1.

Лемма 2. Пусть $\xi_n = (\xi_{n1}, \dots, \xi_{nk})$, $n \geq 1$, — последовательность k -мерных случайных векторов и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ — k -мерный случайный вектор такие, что $\xi_n \Rightarrow \xi$. Тогда

$$\sum_{i=1}^k \xi_{ni} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \xi_i \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Обозначим $f_n(t)$ и $f(t)$, $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbf{R}^k$, характеристические функции случайных векторов ξ_n и ξ соответственно.

Из условий доказываемой леммы имеем $f_n(t) \rightarrow f(t)$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $t \in \mathbf{R}^k$.

Характеристические функции сумм $\sum_{i=1}^k \xi_{ni}$ и $\sum_{i=1}^k \xi_i$ равны соответственно $\varphi_{nk}(s) = f_n(t) |_{t_1=\dots=t_k=s}$ и $\varphi_k(s) = f(t) |_{t_1=\dots=t_k=s}$.

Следовательно, для каждого $s \in \mathbf{R}$

$$\varphi_{nk}(s) \rightarrow \varphi_k(s) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

что и доказывает утверждение леммы 2.

Теперь перейдем к доказательству теорем.

Доказательство теоремы 1. По определению Z_n имеем

$$\frac{Z_n - n\Delta(\nu)}{\sqrt{n}} = \left(\lambda, \frac{S_n - n\nu}{\sqrt{n}} \right). \quad (3)$$

Согласно многомерной центральной предельной теореме,

$$\frac{S_n - n\nu}{\sqrt{n}} \Rightarrow \eta.$$

Тогда из (3) и леммы 2 находим, что

$$\frac{Z_n - n\Delta(\nu)}{\sqrt{n}} \Rightarrow \eta. \quad (4)$$

Хорошо известно (см. [1]), что последовательность нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин равномерно непрерывна по вероятности (см. [1], а также [2]).

Поэтому из (3) нетрудно вывести, что последовательность

$$\frac{Z_n - n\Delta(\nu)}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1,$$

является равномерно непрерывной по вероятности. Следовательно, в силу (4) и утверждения 2) леммы 1 к ней применима теорема Анскомбе [1], согласно которой

$$\frac{Z_\tau - \tau\Delta(\nu)}{\sqrt{\tau}} \Rightarrow (\lambda, \eta) \quad \text{при } c \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Далее, имеем

$$\frac{c - \tau\Delta(\nu)}{\sqrt{\tau}} = \frac{Z_\tau - \tau\Delta(\nu)}{\sqrt{\tau}} - \frac{\chi_c - \varepsilon_\tau}{\sqrt{\tau}}. \quad (6)$$

Покажем, что

$$\frac{\chi_c - \varepsilon_\tau}{\sqrt{\tau}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad \text{при } c \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что

$$0 \leq \chi_c \leq X_\tau + \varepsilon_\tau - \varepsilon_{\tau-1}, \quad \frac{\varepsilon_n}{n} = \left(\lambda_n - \lambda, \frac{S_n - n\nu}{\sqrt{n}} \right),$$

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} = \frac{\Delta(\nu)}{\sqrt{n}} + \left(\lambda, \frac{\xi_n - \nu}{\sqrt{n}} \right).$$

С помощью рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1.2 из [2] и леммы 1.4 из [1], получаем, что

$$\frac{X_\tau}{\sqrt{\tau}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon_\tau}{\sqrt{\tau}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{при } c \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Из (8) следует (7).

Теперь утверждение доказываемой теоремы следует из (5) и (6).

Доказательство теоремы 2. Эта теорема доказывается по схеме доказательства теоремы 1. При этом достаточно показать, что последовательность

$$S_n^* = \frac{S_n - n\nu}{A(n)}, \quad n \geq 1,$$

является равномерно непрерывной по вероятности. А это следует из того, что нормирующие константы $A(n) = n^{1/\alpha} L(n)$ удовлетворяют условию работы [5] и тем самым мы можем применять теорему Анскомбе. Остальные рассуждения проводятся с очевидными видоизменениями.

З а м е ч а н и е 2. Утверждение теоремы 2 сохраняется в том же виде для случая независимых разнораспределенных случайных векторов с $\mathbf{E}\|\xi_k\| < \infty$ и с нормирующими константами $A(n)$, удовлетворяющими условию из работы [5]. В этом случае точка $\nu \in \mathbf{R}^k$ выбирается из условия

$$\frac{\mathbf{E}S_n - n\nu}{A(n)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Случай независимых разнораспределенных случайных величин был разобран в [2].

5. В этом пункте изучается асимптотическое поведение среднего значения и дисперсии момента остановки τ_c .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1, и пусть для некоторого $\delta \in (0, \Delta(\nu))$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\varepsilon_n \leq -n\delta\} < \infty. \quad (9)$$

Тогда

$$\frac{\mathbf{E}\tau_c}{N_c} \rightarrow 1 \quad \text{при } c \rightarrow \infty,$$

где $N_c = [c/\Delta(\nu)]$.

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы 3, и пусть $\mathbf{E}(\chi_c - \varepsilon_{\tau_c})^2 = o(N_c)$ при $c \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{E}(\tau_c - N_c)^2 \sim \frac{M}{(\Delta(\nu))^2} N_c,$$

где $M = \mathbf{E}((\lambda, \xi_1 - \nu))^2 = \mathbf{D}X_1$. Более того, если $\mathbf{E}\tau_c - N_c = o(\sqrt{N_c})$, то

$$\mathbf{D}\tau_c \sim \frac{M}{(\Delta(\nu))^2} N_c.$$

Доказательство теоремы 3. Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. В условиях теоремы 3 семейство случайных величин τ_c/N_c , $c \geq 0$, является равномерно интегрируемым, т.е.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sup_c \int_{\tau_c/N_c > y} \frac{\tau_c}{N_c} d\mathbf{P} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\delta \in (0, \Delta(\nu))$ и $q > 0$ таковы, что $\delta + q < \Delta(\nu)$. Положим

$$K_c = \left\lfloor \frac{c}{\Delta(\nu) - \delta - q} \right\rfloor + 1.$$

При $n > K_c$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tau_c > n\} &\leq \mathbf{P}\{T_n \leq c\} = \mathbf{P}\{Z_n + \varepsilon_n \leq c\} \leq \mathbf{P}\{Z_n - n\Delta(\nu) + \varepsilon_n \leq -n(q + \delta)\} \\ &\leq \mathbf{P}\{Z_n - n\Delta(\nu) \leq -nq\} + \mathbf{P}\{\varepsilon_n \leq -n\delta\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим $\alpha_n = \mathbf{P}\{Z_n - n\Delta(\nu) \leq -nq\} + \mathbf{P}\{\varepsilon_n \leq -n\delta\}$. Как видно, α_n не зависит от c .

Поскольку $\mathbf{E}(X_1 - (\Delta(\nu) - q)) = q > 0$ и $\mathbf{D}X_1 < \infty$, то из хорошо известного факта о конечности меры восстановления (см., например, [1, с. 23, следствие 2.5]) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{Z_n - n(\Delta(\nu) - q) \leq 0\} < \infty.$$

Поэтому, учитывая (9), получаем, что $\sum_{m=K_c}^{\infty} \alpha_n = o(1)$ при $c \rightarrow \infty$. Из (10) вытекает, что

$$\int_{\tau_c > K_c} \tau_c d\mathbf{P} \leq \sum_{n=K_c}^{\infty} \alpha_n = o(1) \quad \text{при } c \rightarrow \infty,$$

что и доказывает лемму 3.

Теперь утверждение теоремы 3 следует из леммы 3 и из того, что $\tau_c/N_c \xrightarrow{\text{п.в.}} 1$ при $c \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 3. Для одномерного случая утверждение теоремы 3 содержится в работах [1], [3]. По поводу условия (9) см. [1], [3], [4]. Нетрудно проверить, что оно выполняется для функции

$$\Delta(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_k^2,$$

при этом надо предполагать, что $\mathbf{E}\xi_1 = \nu \neq 0$ (см. замечание 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Woodroffe M. Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis. Philadelphia, PA: SIAM, 1982, 110 p.
2. Рагимов Ф. Г. Предельные теоремы для моментов первого выхода процессов с независимыми приращениями. — Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1985, 127 с.
3. Siegmund D. Sequential Analysis. Tests and Confidence Intervals. New York: Springer-Verlag, 1985, 272 p.
4. Aras G., Woodroffe M. Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average. — Ann. Statist., 1993, v. 21, № 1, p. 503–519.
5. Mogyórody J. On limiting distributions for sums of a random number of independent random variables. — Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 1961, v. 6, № 3, p. 365–371.
6. Вачева Е. Л. Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений. — Уч. зап. Львовского ун-та, сер. мех.-матем., 1954, т. 29, № 1, с. 5–44.

7. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
8. Richter W. Übertragung von Grenzaussagen für Folgen von Zufälligen Größen auf Folgen mit Zufälligen Indizes. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 1, р. 82–94.

Поступила в редакцию
23.IV.2001

© 2005 г.

СЕРГЕЕВ А. А.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛЛИНГОВЫХ МОДЕЛЕЙ¹⁾

Для открытой сети с N узлами и M приборами, перемещающимися между ними, в предположении, что $N \rightarrow \infty$ и $M/N \rightarrow r$ ($0 < r < \infty$), доказана асимптотическая независимость любого конечного набора случайных процессов, описывающих состояния узлов. Установлено, что предельный поток приборов в фиксированный узел является нестационарным пуассоновским процессом, и описано поведение системы в термодинамическом пределе. В качестве примера рассмотрена система с пуассоновским входящим потоком требований и специальным видом распределения времени движения приборов. Для нее доказана сходимость к предельной динамической системе. Найдена неподвижная точка, доказана зависимость ее вида от распределения времени движения только через математическое ожидание.

Ключевые слова и фразы: поллинговая модель, случайный процесс, асимптотическая независимость, термодинамический предел.

1. Введение. Поллинговые системы на протяжении ряда последних лет были источниками многих исследований, что связано как с практической значимостью моделей подобного рода, например, при организации транспортных сетей, так и с математическими проблемами, возникающими при их анализе. Круг данных моделей весьма широк и среди них можно выделить системы с конечным числом станций обслуживания (узлов), на которые поступают требования. Основное отличие таких поллинговых моделей от сетей Джексона в том, что по сети перемещаются не требования, а приборы, каждый из которых после завершения обслуживания в узле случайным образом направляется в другой узел в соответствии с некоторой стохастической матрицей маршрутизации. Одна из первых задач при анализе поллинговых моделей — определение условий существования стационарного распределения. В этом направлении имеется ряд интересных результатов (см., например, [1]–[3]). Другая задача — отыскание этого стационарного распределения или построение приемлемых оценок для него. Здесь возникают существенные трудности, поскольку даже в простейших предположениях (все характеристики имеют показательное распределение) случайный процесс, описывающий функционирование системы, оказывается достаточно сложным. В связи с этим внимание исследователей сосредоточено на получении предельных теорем типа закона больших чисел для симметричных моделей, когда число узлов N велико (см. [3]–[6]). Если все случайные величины, определяющие функционирование системы, имеют показательное распределение, изучаемый случайный

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: goal@hamovniki.net

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00256-а).