Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Сергеев, Предельные теоремы для одного класса поллинговых моделей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2005, том 50, выпуск 3, 585–593

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp99>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:06:21

7. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
8. Richter W. Übertragung von Grenzaussagen für Folgen von Zufälligen Größen auf Folgen mit Zufälligen Indizes. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 1, р. 82–94.

Поступила в редакцию
23.IV.2001

© 2005 г.

СЕРГЕЕВ А. А.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛЛИНГОВЫХ МОДЕЛЕЙ¹⁾

Для открытой сети с N узлами и M приборами, перемещающимися между ними, в предположении, что $N \rightarrow \infty$ и $M/N \rightarrow r$ ($0 < r < \infty$), доказана асимптотическая независимость любого конечного набора случайных процессов, описывающих состояния узлов. Установлено, что предельный поток приборов в фиксированный узел является нестационарным пуассоновским процессом, и описано поведение системы в термодинамическом пределе. В качестве примера рассмотрена система с пуассоновским входящим потоком требований и специальным видом распределения времени движения приборов. Для нее доказана сходимость к предельной динамической системе. Найдена неподвижная точка, доказана зависимость ее вида от распределения времени движения только через математическое ожидание.

Ключевые слова и фразы: поллинговая модель, случайный процесс, асимптотическая независимость, термодинамический предел.

1. Введение. Поллинговые системы на протяжении ряда последних лет были источниками многих исследований, что связано как с практической значимостью моделей подобного рода, например, при организации транспортных сетей, так и с математическими проблемами, возникающими при их анализе. Круг данных моделей весьма широк и среди них можно выделить системы с конечным числом станций обслуживания (узлов), на которые поступают требования. Основное отличие таких поллинговых моделей от сетей Джексона в том, что по сети перемещаются не требования, а приборы, каждый из которых после завершения обслуживания в узле случайным образом направляется в другой узел в соответствии с некоторой стохастической матрицей маршрутизации. Одна из первых задач при анализе поллинговых моделей — определение условий существования стационарного распределения. В этом направлении имеется ряд интересных результатов (см., например, [1]–[3]). Другая задача — отыскание этого стационарного распределения или построение приемлемых оценок для него. Здесь возникают существенные трудности, поскольку даже в простейших предположениях (все характеристики имеют показательное распределение) случайный процесс, описывающий функционирование системы, оказывается достаточно сложным. В связи с этим внимание исследователей сосредоточено на получении предельных теорем типа закона больших чисел для симметричных моделей, когда число узлов N велико (см. [3]–[6]). Если все случайные величины, определяющие функционирование системы, имеют показательное распределение, изучаемый случайный

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: goal@hamovniki.net

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00256-а).

процесс оказывается марковским с дискретным фазовым пространством и сходимость к некоторой динамической системе вытекает из известной теоремы для марковских процессов [7]. Подобный подход был использован рядом авторов при анализе коммуникационных сетей (см. [4], [5]). Сети с произвольно распределенным временем обслуживания рассматривались в работах [8], [9], где вводился марковский процесс с достаточно сложным фазовым пространством и существенно использовалась специфика сети. Изучаемая в данной работе поллиновая модель содержит самые общие ограничения на структуру входных потоков требований, а времена перемещения приборов имеют, вообще говоря, произвольное распределение. Зависимость функционирования системы от прошлого оказалась очень сложной и кажущийся весьма перспективным метод, разработанный в [9], применить не удалось. Предлагается несколько другой подход. Сначала устанавливается сходимость потока приборов, прибывающих в фиксированный узел, к нестационарному пуассоновскому процессу, когда число узлов $N \rightarrow \infty$ и число приборов $M \rightarrow \infty$, так что $M/N \rightarrow r$ ($0 < r < \infty$) (теорема 2). Поскольку допредельный процесс является суммой редких, но зависимых потоков, доказательство, опирающееся на теорему Б. А. Севастьянова [10], требует асимптотической независимости любого конечного набора этих потоков, что установлено в теореме 1. Далее получена предельная теорема типа закона больших чисел для доли узлов, находящихся в некотором состоянии (теорема 3). Представляется весьма правдоподобной гипотеза о независимости стационарного распределения (когда оно существует) состояний узла для больших поллиновых моделей от вида распределения времени движения приборов при фиксированном среднем значении, что находит некоторое подтверждение результатами п. 5, где изучается поллиновая модель с распределением времени обслуживания специального вида.

2. Описание модели. Рассматривается открытая сеть S , состоящая из N узлов и M приборов, перемещающихся между ними. В каждом узле имеется k мест для ожидания требований и m мест для ожидания приборов ($k \leq \infty$, $m \leq \infty$). Если в момент прихода требования в узле есть приборы, то один из них забирает это требование и равновероятно выбирает узел назначения, в который и направляется. По прибытии в этот узел требование покидает сеть, а прибор либо становится в очередь, если нет требований и есть места для ожидания приборов, либо забирает требование, если очередь из них не пуста, либо покидает его и с равной вероятностью направляется в любой узел, если все места для ожидания приборов заняты. Требование, заставшее в узле все места для ожидания занятыми, теряется. Таким образом, в каждом узле находятся либо требования, либо приборы, либо узел свободен. Заметим также, что при $m = \infty$ можно считать, что прибор некоторое случайное время обслуживает требования в узле, а затем перемещается в узел назначения. Прибавив время обслуживания к времени перемещения, мы приходим к описанной модели, которая по существу становится обычной поллиновой системой. Мы предполагаем, что потоки требований в разные узлы взаимно независимы и одинаково распределены, а времена перемещений приборов независимы друг от друга и от входящих потоков и имеют общую функцию распределения $B(x)$. Будут доказаны предельные теоремы в предположении, что число узлов N и число приборов M стремятся к бесконечности, так что $M/N \rightarrow r$ ($0 < r < \infty$). При этом на функцию распределения времени перемещения $B(x)$ накладывается следующее условие

$$1 - B(x) \geq e^{-\mu x} \quad (1)$$

для некоторого $\mu > 0$ и всех $x \geq 0$.

3. Асимптотическая независимость узлов. Рассмотрим случайный процесс $q_i^N(t)$, описывающий состояние i -го узла в момент t в сети с N узлами. При этом $q_i^N(t) = j$, если в узле в момент t имеется j требований, $q_i^N(t) = -j$, если там находится j приборов, и $q_i^N(t) = 0$, если узел свободен.

Теорема 1 (об асимптотической независимости узлов). Если выполняется (1), то при любом фиксированном $l \in \mathbf{N}$ и $t > 0$ случайные процессы $\{q_1^N(s), s \leq t\}, \dots, \{q_l^N(s), s \leq t\}$ асимптотически независимы, т.е. для любых моментов времени $s_{11}, \dots, s_{1m_1}, \dots, s_{l1}, \dots, s_{lm_l}$, предшествующих моменту t , и целых чисел

$$k_{11}, \dots, k_{1m_1}, \dots, k_{l1}, \dots, k_{lm_l}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{q_i^N(s_{ij}) = k_{ij}, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m_i\} \\ & - \prod_{i=1}^l \mathbf{P}\{q_i^N(s_{ij}) = k_{ij}, j = 1, \dots, m_i\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Предполагается, что случайные величины $(q_j^N(0), j = 1, \dots, l)$ независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для упрощения обозначений рассмотрим лишь случай $l = 2$, поскольку на другие случаи приводимое ниже доказательство распространяется очевидным образом, но оказывается слишком громоздким. Определим для фиксированного узла i и момента времени t множество общения узла $D_i(t)$, предположив, что $D_i(t) = \{i\}$, если до момента времени t на узел не прибывало никаких приборов. В противном случае пусть $t_1 < t$ — последний момент времени, когда прибыл прибор, например, из узла j . Тогда положим

$$D_i(t) = D_i(t_1 - 0) \cup D_j(t_1 - 0).$$

Пусть $|D_i(t)|$ обозначает число узлов в множестве $D_i(t)$. Введем сеть $\tilde{S}$, в которой узлы не имеют мест для ожидания приборов, а времена их перемещений распределены по показательному закону с параметром μ . Входные потоки требований и количество мест для ожидания в S и $\tilde{S}$ одинаковы. В силу условия (1) сеть $\tilde{S}$ мажорирует сеть S в том смысле, что если $\tilde{D}_i(t)$ — множество общения i -го узла в $\tilde{S}$ к моменту t , то для любого $\Lambda > 0$

$$\mathbf{P}\{|D_i(t)| \geq \Lambda\} \leq \mathbf{P}\{|\tilde{D}_i(t)| \geq \Lambda\}.$$

В предположении, что начальные условия в $\tilde{S}$ и S одинаковы,

$$\mathbf{E}|D_i(t)| \leq \mathbf{E}|\tilde{D}_i(t)| = m(t).$$

Поскольку вспомогательная сеть также симметрична, то, выбрав в ней симметричные начальные условия, мы сможем утверждать, что $m(t)$ не зависит от номера узла.

Лемма 1. Для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $m(t) \leq e^{\mu t}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$|\tilde{D}_1(t + \Delta t)| \leq |\tilde{D}_1(t)| + I(A) |\tilde{D}_\xi(t + \Delta t)| + o(\Delta t),$$

где A — событие, состоящее в том, что за интервал времени $(t, t + \Delta t)$ в узел прибыл прибор, ξ — номер узла, откуда он прибыл. В силу симметрии

$$\mathbf{E}|\tilde{D}_\xi(t)| = \mathbf{E}\mathbf{E}(|\tilde{D}_\xi(t)| | \xi) = \mathbf{E}m(t) = m(t),$$

откуда следует $m'(t) \leq \mu r \cdot m(t)$, что равносильно утверждению леммы (с учетом того, что $m(0) = 1$).

Лемма 2. Случайные процессы $\{q_1^N(s), s \leq t\}$ и $\{q_2^N(s), s \leq t\}$ условно независимы при условии $D_1(t) \cap D_2(t) = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В начальный момент времени эти случайные процессы независимы, а так как

$$q_i^N(s) = \Phi\left(X_i(u), u \leq s, \eta_1^i, \dots, \eta_{Y_i^N(s)}^i\right),$$

где $X_i(u)$ — количество пришедших в узел за время u требований, $Y_i^N(s)$ — количество прибытий приборов в узел за это же время, η_j^i — моменты их прибытий, Φ — некоторый функционал, то зависимыми случайные величины q_1^N и q_2^N в промежутке $[0, t]$ могут стать лишь в момент, когда в один из этих узлов прибыл очередной прибор. Пусть $q_1^N(u)$ и $q_2^N(u)$ независимы при $u < s$, $q_1^N(s)$ и $q_2^N(s)$ зависимы ($s \leq t$). Это означает, что в какой-то из этих узлов в момент s прибыл прибор. Будем считать, что он появился в первом узле. Так как момент прибытия прибора в узел есть функционал от состояний предыдущих посещенных узлов в моменты ухода из них, то этот прибор успел побывать в некотором узле i_1 , который уже на тот момент был зависим от второго узла. Если $i_1 = 2$, то наше построение закончено. В противном

случае заметим, что эта зависимость тоже могла возникнуть только в какой-то момент $t_1 < s$, когда или в узел i_1 , или в узел 2 прибыл прибор. Пусть теперь это произошло с узлом 2. Тогда прибор, прибывший в него в этот момент, успел до этого побывать в узле i_2 , зависимость уже тогда от узла i_1 . Пусть t_2 — момент времени, когда эта зависимость возникла. Если $i_2 = i_1$, то построение опять закончено. Если же нет, то в момент t_2 в один из этих узлов прибыл прибор, который и сделал их зависимыми. Таким образом, мы найдем следующий узел i_3 в этой цепочке и вообще сможем ее продолжать подобным образом до тех пор, пока не обнаружим, что очередная пара узлов стала зависимой из-за того, что прибор, пришедший в один из них, успел до этого побывать на другом. Мы дойдем до такого этапа в нашем построении, так как цепочка времен t_k строго убывает в силу ненулевого времени движения приборов между узлами, а множество возможных значений элементов этой цепочки есть множество времен прибытий приборов в узлы за время от 0 до s , следовательно, это множество конечно. Из построения следует, что если $q_1^N(s)$ и $q_2^N(s)$ зависимы, то найдется узел i_l , одновременно принадлежащий $D_1(t)$ и $D_2(t)$, что противоречит тому, что множества общения в момент t не пересекаются.

Применив аналогичное рассуждение для значений процессов q_1^N и q_2^N в различные моменты времени (s_1 и s_2 соответственно), мы установим, что q_1^N и q_2^N условно независимы и как процессы на отрезке $[0, t]$ при заданном в лемме условии.

Лемма 3. $\mathbf{P}\{D_1(t) \cap D_2(t) \neq \emptyset\} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{D_1(t) \cap D_2(t) \neq \emptyset\} \leq \mathbf{P}\{D_1(t) \cap D_2(t) \neq \emptyset \mid |D_1(t)| \leq \Lambda, |D_2(t)| \leq \Lambda\} + 2\mathbf{P}\{|D_1(t)| > \Lambda\} \stackrel{\text{def}}{=} F + G.$$

Оценка для F достаточно тривиальна:

$$F \leq 1 - \left(1 - \frac{\Lambda}{N}\right) \left(1 - \frac{\Lambda}{N-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\Lambda}{N-\Lambda}\right) \leq 1 - \left(1 - \frac{\Lambda}{N-\Lambda}\right)^\Lambda.$$

Если $\Lambda/N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), то $F \leq C\Lambda^2/N$.

Для оценки G используем неравенство Чебышёва:

$$\mathbf{P}\{|D_1(t)| > \Lambda\} \leq \frac{\mathbf{E}|D_1(t)|}{\Lambda} \leq \frac{m(t)}{\Lambda} \leq \frac{e^{\mu r t}}{\Lambda}.$$

Выберем $\Lambda = N^{1/3}$, тогда

$$\mathbf{P}\{D_1(t) \cap D_2(t) \neq \emptyset\} \leq C_0 N^{-1/3} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь мы можем написать:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{q_1^N(s_{1j}) = k_{1j}, j = 1, \dots, m_1, q_2^N(s_{2j'}) = k_{2j'}, j' = 1, \dots, m_2\} \\ = \mathbf{P}\{q_1^N(s_{1j}) = k_{1j}, q_2^N(s_{2j'}) = k_{2j'} \mid A\} \mathbf{P}\{A\} \\ + \mathbf{P}\{q_1^N(s_{1j}) = k_{1j}, q_2^N(s_{2j'}) = k_{2j'} \mid B\} \mathbf{P}\{B\}, \end{aligned}$$

где $A = \{D_1(t) \cap D_2(t) \neq \emptyset\}$, $B = \bar{A}$. Обозначим первое слагаемое $p_A^N(t)$, второе — $p_B^N(t)$. В силу леммы 3, $p_A^N(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ и

$$p_B^N(t) - \mathbf{P}\{q_1^N(s_{1j}) = k_{1j}, j = 1, \dots, m_1\} \mathbf{P}\{q_2^N(s_{2j'}) = k_{2j'}, j' = 1, \dots, m_2\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

что и доказывает теорему.

Следствие 1. Пусть $\nu_i^N(t)$ — количество окончаний движения i -го прибора за время $[0, t]$ ($i = 1, 2, \dots, M$). Тогда при любом фиксированном l случайные величины $\nu_1^N(t), \dots, \nu_l^N(t)$ асимптотически независимы.

Доказательство. Введем $S_i(t)$ — множество узлов, которые i -й прибор посетил к моменту t , и обозначим $D(S_i, t)$ объединение множеств общения к моменту t узлов, входящих в маршрут $S_i(t)$. Вновь рассмотрим только случай $l = 2$. Так как количество окончаний движения каждого прибора есть функционал от состояний посещенных им узлов в моменты ухода из них и от времен движения, то зависимость количеств окончаний движения приборов может возникнуть только благодаря зависимости состояний посещенных ими узлов. Поэтому если $D(S_1, t) \cap D(S_2, t) = \emptyset$, то (аналогично соответствующему этапу в доказательстве теоремы 1) случайные величины $\nu_1^N(t)$ и $\nu_2^N(t)$ независимы. А так как среднее количество окончаний движения приборов за время t конечно и ограничено сверху величиной, не зависящей от N , то

$$\mathbf{P}\{D(S_1, t) \cap D(S_2, t) \neq \emptyset\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

откуда и следует справедливость утверждения.

4. Теорема о сходимости потока приборов, приходящих в узел, к пуассоновскому процессу. Зафиксируем некоторый конкретный узел i сети и будем с этого момента рассматривать только его. Обозначим $Y_{ij}^N(t)$ количество посещений узла j -м прибором за время t , тогда $Y_i^N(t) = \sum_{j=1}^M Y_{ij}^N(t)$. В силу симметрии системы распределения $Y_i^N(t)$ и $Y_{ij}^N(t)$ не зависят от номера узла i , так что далее мы будем опускать этот индекс.

Лемма 4. Если существует $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} \nu_1^N(t) = v(t)$, то при каждом t последовательность случайных величин $\{Y^N(t)\}_{N=1}^\infty$ слабо сходится к случайной величине, распределенной по пуассоновскому закону с параметром $rv(t)$.

Доказательство. Докажем вначале соответствующее утверждение для суммы индикаторов. Пусть

$$I_j^N(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й прибор попадал в узел за время } t, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим $U^N(t) = \sum_{j=1}^M I_j^N(t)$. Имеем при $N \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{P}\{I_j^N(t) = 1 \mid \nu_j^N(t)\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\nu_j^N(t)} = \frac{\nu_j^N(t)}{N} N(1 + o(1)),$$

следовательно,

$$\mathbf{P}\{I_1^N(t) = \dots = I_k^N(t) = 1 \mid \nu_1^N(t), \dots, \nu_k^N(t)\} = \frac{\nu_1^N(t) \cdots \nu_k^N(t)}{N^k} (1 + o(1))$$

для любого фиксированного k . Поэтому

$$b_{1 \dots k}^N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{I_1^N(t) = \dots = I_k^N(t) = 1\} = \frac{1}{N^k} \mathbf{E}[\nu_1^N(t) \cdots \nu_k^N(t)] (1 + o(1)).$$

Далее

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} b_1^N(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E} \nu_1^N(t)}{N} = 0, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} U^N(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} M p_1^N(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} \mathbf{E} \nu_1^N(t) = rv(t), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_{1 \dots k}^N(t)}{(b_1^N(t))^k} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[\nu_1^N(t) \cdots \nu_k^N(t)]}{[\mathbf{E} \nu_1^N(t)]^k} = 1. \end{aligned}$$

Последнее равенство верно в силу асимптотической независимости $\nu_1^N(t), \dots, \nu_k^N(t)$. Таким образом, по теореме 1 из [10]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{U^N(t) = l\} = \frac{[rv(t)]^l e^{-rv(t)}}{l!}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Чтобы перейти к процессу $Y^N(t)$, введем событие $A_N(t)$ ($\tilde{A}_N(t)$), состоящее в том, что в сети S ($\tilde{S}$) хотя бы один прибор посетил за время t данный узел более чем

один раз. Из условия (1) вытекает, что $\mathbf{P}\{Y^N(t) \neq U^N\} = \mathbf{P}(A_N(t)) \leq \mathbf{P}(\tilde{A}_N(t))$. Поскольку в $\tilde{S}$ моменты прибытия любого прибора в узел образуют пуассоновский поток с параметром μN , несложные оценки показывают, что $\mathbf{P}(\tilde{A}_N(t)) \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), откуда следует утверждение леммы.

Лемма 5. Пусть $t_1 < t_2 < t_3$. Тогда случайные величины $Y^N(t_2) - Y^N(t_1)$ и $Y^N(t_3) - Y^N(t_2)$ асимптотически независимы.

Доказательство. Пусть $\Gamma(t_k, t_l)$ — множество приборов, посетивших узел в промежуток времени $[t_k, t_l]$. Тогда при фиксированном $\Gamma(t_k, t_l)$ приращение процесса $Y^N(t)$ на интервале $[t_k, t_l]$ зависит только от числа окончаний движения приборов, входящих в это множество за данный промежуток времени, и от выбора ими узла назначения. Если $\Gamma(t_1, t_2) \cap \Gamma(t_2, t_3) = \emptyset$, то по лемме 1 приращения процесса $Y^N(t)$ на разных интервалах асимптотически независимы. Нам осталось только заметить, что, так же, как и раньше,

$$\mathbf{P}\{\Gamma(t_1, t_2) \cap \Gamma(t_2, t_3) \neq \emptyset\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

поскольку

$$\mathbf{E}|\Gamma(t_k, t_l)| \leq \mathbf{E}|\Gamma(0, t_l)| \leq \mathbf{E}Y^N(t_l) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} v(t_l)$$

при любых фиксированных $t_k < t_l$.

Из последних двух лемм следует, что случайный процесс $Y^N(t)$ слабо сходится к процессу с независимыми приращениями, одномерные распределения которого являются пуассоновскими случайными величинами, т.е. к пуассоновскому процессу. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если выполняется условие (1), то при $N \rightarrow \infty$ случайный процесс $Y^N(t)$ слабо сходится к пуассоновскому процессу $Y(t)$ с ведущей функцией $rv(t)$.

Рассмотрим систему массового обслуживания, поток требований $X(t)$ в которую в стохастическом смысле такой же, как в узел сети S . Приборы приходят в систему в соответствии с нестационарным пуассоновским потоком $Y(t)$ с ведущей функцией $rv(t)$. Имеется k мест для ожидания требований и m мест для ожидания приборов. Принцип взаимодействия требований и приборов тот же, что и в узле сети S . Пусть $q(t)$ равно разности количества требований и количества приборов в системе в момент t и $p_j(t) = \mathbf{P}\{q(t) = j\}$, $j \in \mathbf{Z}$. Для узла симметричной сети введем $p_j^N(t) = \mathbf{P}\{q^N(t) = j\}$.

Теорема 3. Если выполнено (1) и существует $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}v_1^N(t) = v(t)$, то существует $\lim_{N \rightarrow \infty} p_j^N(t) = p_j(t)$.

Доказательство вытекает из теоремы 2, поскольку $q(t) = \max[\min(X(t) - Y(t), k), -m]$, а $q^N(t)$ удовлетворяет такому же соотношению с $Y^N(t)$ вместо $Y(t)$.

5. Сеть с распределением времени движения специального вида. В качестве примера рассмотрим частный случай описанной модели с ограниченным количеством мест ожидания для требований и приборов, когда входящий поток требований $X(t)$ является пуассоновским с параметром λ , а время движения приборов между узлами τ распределено по следующему закону:

$$\mathbf{P}\left\{\tau = \sum_{j=1}^l \tau_j\right\} = q_l, \quad l = 1, \dots, n, \quad \sum_{l=1}^n q_l = 1,$$

где $\{\tau_j\}$ — независимые случайные величины, $\mathbf{P}\{\tau_j \leq x\} = 1 - e^{-\mu_j x}$.

Будем говорить, что в момент времени t прибор имеет тип (i, j) , $1 \leq i \leq j \leq n$, если его время перемещения состоит из j временных отрезков $(\tau_1, \dots, \tau_j)$ и в данный момент попадает в i -й из них. Пусть $q_{ij}^N(t)$ — количество приборов типа (i, j) в момент времени t . Рассмотрим однородную во времени цепь Маркова:

$$Q^N(t) = (q_i^N(t), i = 1, \dots, N; q_{ij}^N(t), 1 \leq i \leq j \leq n)$$

с пространством состояний $\{-m, \dots, k\}^N \times \{0, 1, \dots\}^{(n^2+n)/2}$.

Обозначим $d_j^N(t)$, $j = -m, \dots, k$, долю узлов в сети, находящихся в состоянии j . Пусть $u_j^N(t) = \sum_{i=j}^k d_i^N(t)$. Очевидно, что $1 = u_{-m}^N(t) \geq u_{-m+1}^N(t) \geq \dots \geq u_k^N(t) \geq 0$. Аналогичным образом введем обозначение γ_{ij}^{lN} для доли узлов, в которые направляются не менее l приборов типа (i, j) .

Заметим, что рассматриваемая цепь Маркова обладает большой группой симметрии. А именно, пусть $\mathcal{P}_N$ — группа перестановок степени N и $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_N$. Положим

$$\mathcal{P}q = \left(q_{\mathcal{P}(i)}^N(t), i = 1, \dots, N; q_{ij}^N(t), 1 \leq i \leq j \leq n \right), \quad q \in S_N.$$

Тогда если $P_N(t, q', q'')$ — вероятность перехода из q' в q'' за время t , то $P_N(t, \mathcal{P}q', \mathcal{P}q'') = P_N(t, q', q'')$.

В дальнейшем верхний индекс N с целью упрощения обозначений мы будем опускать. Обозначим через U_N множество всех наборов

$$u = (\{u_i\}_{i=-m}^k, \{\gamma_{ij}^l\}_{1 \leq i \leq j \leq n, l \geq 0}),$$

удовлетворяющих соотношениям

$$1 = u_{-m} \geq u_{-m+1} \geq \dots \geq u_k \geq 0, \quad 1 = \gamma_{ij}^0 \geq \gamma_{ij}^1 \geq \dots \geq 0,$$

где u_i и γ_{ij}^l имеют вид s/N , s — целое неотрицательное число.

Рассмотрим функцию $u(q) = u$, где $u \in U_N$. Значения $u(q)$ постоянны на орбитах действия группы $\mathcal{P}_N$ на пространстве S_N . Трактую $u(q)$ как функцию от первоначальной цепи Маркова, мы получаем новую цепь Маркова — $W_N(t)$ с пространством состояний U_N и переходными вероятностями из $u^1 \in U_N$ в $u^2 \in U_N$ за время t

$$P_N(t, u^1, u^2) = \sum_{q'': u(q'')=u^2} P_N(t, q', q''), \quad \text{где } u(q') = u^1.$$

Производящий оператор нашей цепи Маркова $A_N f(u)$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} N \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda(u_i - u_{i+1}) \left[f\left(u + \frac{e_{i+1}}{N}\right) - f(u) \right] \right. \\ + \sum_{i=-m}^{-1} \sum_{s=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \lambda(u_i - u_{i+1}) q_s(\gamma_{1s}^l - \gamma_{1s}^{l+1}) \left[f\left(u + \frac{e_{i+1}}{N} + \frac{g_{1s}^{l+1}}{N}\right) - f(u) \right] \\ + \sum_{s,v=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} (1 - u_{-m+1}) \mu_s j(\gamma_{ss}^j - \gamma_{ss}^{j+1}) q_v(\gamma_{1v}^l - \gamma_{1v}^{l+1}) \\ \times \left[f\left(u - \frac{g_{ss}^j}{N} + \frac{g_{1v}^{l+1}}{N}\right) - f(u) \right] \\ + \sum_{i=-m+1}^0 \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \mu_s j(\gamma_{ss}^j - \gamma_{ss}^{j+1})(u_i - u_{i+1}) \left[f\left(u - \frac{g_{ss}^j}{N} - \frac{e_i}{N}\right) - f(u) \right] \\ + \sum_{i=1}^k \sum_{s,v=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_s j(\gamma_{ss}^j - \gamma_{ss}^{j+1})(u_i - u_{i+1}) q_v(\gamma_{1v}^l - \gamma_{1v}^{l+1}) \\ \times \left[f\left(u - \frac{g_{ss}^j}{N} - \frac{e_i}{N} + \frac{g_{1v}^{l+1}}{N}\right) - f(u) \right] \\ + \sum_{1 \leq s < v \leq n} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_s j(\gamma_{sv}^j - \gamma_{sv}^{j+1})(\gamma_{s+1,v}^l - \gamma_{s+1,v}^{l+1}) \\ \times \left[f\left(u - \frac{g_{sv}^j}{N} + \frac{g_{s+1,v}^{l+1}}{N}\right) - f(u) \right] \Bigg), \end{aligned}$$

где e_i и g_{ij}^l — единичные векторы с единицей на месте, соответствующем индексу.

Используя традиционную технику (см., например, [5]), можно показать, что данная цепь Маркова сходится при $N \rightarrow \infty$ к динамической системе (в смысле сходимости соответствующих полугрупп), эволюция которой описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u}_l = \lambda(u_{l-1} - u_l) - \left(\sum_{s=1}^n \mu_s M_{ss} \right) (u_l - u_{l+1}), & -m+1 \leq l \leq k, \\ u_{-m}(t) \equiv 1, \\ \dot{\gamma}_{1j}^l = \left[\lambda(1 - u_0) + \left(\sum_{s=1}^n \mu_s M_{ss} \right) (1 - u_{-m+1} + u_1) \right] \\ \quad \times q_j(\gamma_{1j}^{l-1} - \gamma_{1j}^l) - \mu_1 l(\gamma_{1j}^l - \gamma_{1j}^{l+1}), & 1 \leq j \leq n, \quad l \geq 1, \\ \dot{\gamma}_{ij}^l = \mu_{i-1} M_{i-1,j}(\gamma_{ij}^{l-1} - \gamma_{ij}^l) - \mu_i l(\gamma_{ij}^l - \gamma_{ij}^{l+1}), & 1 < i \leq j \leq n, \quad l \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$M_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{ij}^l = \sum_{l=1}^{\infty} l(\gamma_{ij}^l - \gamma_{ij}^{l+1})$$

— предел среднего количества движущихся приборов типа (i, j) в расчете на один узел. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть f — произвольная непрерывная функция $f: U \rightarrow \mathbf{R}$. Тогда для всех $t \geq 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{g \in U_N} |T_N(t)f(g) - f(u(t, g))| = 0,$$

где $u(t, g)$ — решение системы (2) с начальным условием g .

Отметим, что данная модель является примером, когда упоминавшийся ранее предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} \nu_1^N(t)$ существует, ибо

$$(M \mathbf{E} \nu_1^N(t))' = \sum_{s=1}^n \mu_s N M_{ss}^N(t),$$

следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} \nu_1^N(t) = \frac{1}{r} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \left(\sum_{s=1}^n \mu_s M_{ss}^N(u) \right) du = \frac{1}{r} \int_0^t \left(\sum_{s=1}^n \mu_s M_{ss}(u) \right) du.$$

Просуммировав последние два уравнения системы (2) по l , получим:

$$\begin{cases} \dot{u}_l = \lambda(u_{l-1} - u_l) - \left(\sum_{s=1}^n \mu_s M_{ss} \right) (u_l - u_{l+1}), & l = -m+1, \dots, k, \\ u_{-m}(t) \equiv 1, \\ \dot{M}_{1j} = \lambda(1 - u_0) q_j + \left(\sum_{s=1}^n \mu_s M_{ss} \right) (1 - u_{-m+1} + u_1) q_j - \mu_1 M_{1j}, & j = 1, \dots, n, \\ \dot{M}_{ij}^l = \mu_{i-1} M_{i-1,j} - \mu_i M_{ij}, & 1 < i \leq j \leq n. \end{cases}$$

Приравняв левые части уравнений полученной системы к нулю, находим ее стационарное решение. Обозначим $\rho = \lambda / (\sum_{s=1}^n \mu_s M_{ss})$. Тогда из первой серии уравнений легко получить, что

$$u_l = \frac{\rho^{l+m} - \rho^{m+1+k}}{1 - \rho^{m+1+k}}. \quad (3)$$

Оставшиеся две серии уравнений дают

$$M_{ij} = \frac{\lambda(1 - u_0) q_j + (\sum_{s=1}^n \mu_s M_{ss})(1 - u_{-m+1} + u_1) q_j}{\mu_i}.$$

Обозначим

$$a = \mathbf{E}\tau = \sum_{j=1}^n q_j \left(\frac{1}{\mu_1} + \dots + \frac{1}{\mu_j} \right).$$

После несложных преобразований получаем, что $M_{ij} = \lambda q_j / (\rho \mu_i)$, откуда $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} M_{ij} = \lambda a / \rho$ — среднее число движущихся приборов в расчете на один узел при $N \rightarrow \infty$. Пусть $L = \sum_{i=1}^m i(u_{-i} - u_{-i+1})$ — среднее число приборов в узле. Воспользовавшись равенствами (3), получим

$$L = \frac{\rho^{m-1} + 2\rho^{m-2} + \dots + (m-1)\rho + m}{\rho^{k+m} + \rho^{k+m-1} + \dots + \rho + 1}.$$

Складывая средние количества движущихся и стоящих приборов, получим уравнение для нахождения ρ :

$$L(\rho) + \frac{\lambda a}{\rho} = \tau.$$

Функция слева убывает на положительной полуоси (так как $L(\rho)$ убывает), в нуле равна $+\infty$, в бесконечности — нулю, поэтому решение этого уравнения существует и единственно, откуда следует существование и единственность стационарной точки системы.

Также заметим, что, в силу того, что коэффициенты уравнения для нахождения ρ зависят только от параметров системы и от величины a — среднего времени перемещения приборов, то и стационарное распределение зависит лишь от среднего времени перемещения приборов, а не от конкретного вида его распределения.

Автор хотел бы выразить благодарность Афанасьевой Л. Г. за ценные обсуждения и замечания в процессе работы над статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borovkov A. A., Schassberger R. Ergodicity of a polling network. — *Stochastic Processes Appl.*, 1994, v. 50, № 2, p. 253–262.
2. Fricker Ch., Jaibi M. R. Stability of a polling model with a Markovian scheme. — *Rapport de recherche RR-2278, INRIA, France*, 1994, 16 p.
3. Afanassieva L. G., Delcoigne F., Fayolle G. On polling systems where servers wait for customers. — *Markov Process. Relat. Fields*, 1997, v. 3, № 4, p. 527–545.
4. Karpelevich F. I., Pechersky E. A., Suhov Yu. M. Dobrushin's approach to queueing network theory. — *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 1996, v. 9, № 4, p. 373–397.
5. Введенская Н. Д., Добрушин Р. Л., Карпелевич Ф. И. Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей — асимптотический подход. — *Проблемы передачи информации*, 1996, т. 32, в. 1, с. 20–34.
6. Afanassieva L. G., Fayolle G., Popov S. Yu. Models for transportation networks. — *Rapport de recherche, RR-2834, INRIA, France*, 1996, 25 p.
7. Ethier S. N., Kurtz T. G. *Markov Processes. Characterization and Convergence*. New York: John Wiley, 1986, 534 p.
8. Vvedenskaya N. D., Suhov Yu. M. Dobrushin's mean-field approximation for a queue with dynamic routing. — *Markov Process. Relat. Fields*, 1997, v. 3, № 4, p. 493–526.
9. Карпелевич Ф. И., Рыбко А. Н. Асимптотическое поведение симметричной замкнутой сети массового обслуживания в термодинамическом пределе. — *Проблемы передачи информации*, 2000, т. 36, в. 2, с. 69–95.
10. Севастьянов Б. А. Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1972, т. 17, в. 4, с. 733–737.

Поступила в редакцию
1.III.2005