Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Репин, М. Е. Лернер, О задаче Дирихле для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца в первом квадранте, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 5–8

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:35:23

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.3

О.А. Репин, М.Е. Лернер

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ДВУОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПЕРВОМ КВАДРАНТЕ

Рассматривается уравнение эллиптического типа в четверти плоскости с отрицательным коэффициентом при искомой функции. Доказывается однозначная разрешимость задачи Дирихле.

В отличие от [1,2] в данной работе рассматривается уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\mu}{x}u_x + \frac{2p}{y}u_y - \lambda^2 u = 0 \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$, $0 < 2\mu, 2p < 1, -\infty < \lambda < +\infty$.

Задача Дирихле (задача Д).

Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами

- 1) $Lu \equiv 0$ в Ω ;
- 2) $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$;
- 3) $u(x, 0) = \tau_1(x)$, $0 \leq x < +\infty$;
- 4) $u(0, y) = \tau_2(y)$, $0 \leq y < +\infty$;
- 5) $\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$,

где $\tau_1(x)$ и $\tau_2(y)$ такие заданные функции, что

$$\tau_1(x) = \tau_0(x)(1+x)^{-2-\varepsilon}, \quad \tau_0(x) \in C^0\{x; x \geq 0\}; \quad (2)$$

$$\tau_2(y) = \tau_0(y)(1+y)^{-2-\varepsilon}, \quad \tau_0(y) \in C^0\{y; y \geq 0\}; \quad (3)$$

$$\tau_1(0) = \tau_2(0), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tau_1(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \tau_2(y) = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Т е о р е м а 1. *Решение задачи Д единственно.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи Д, но $u(x, y) \not\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Следовательно $u(x, y) \neq 0$ в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$. Без ограничения общности можно считать $u(x_0, y_0) > 0$.

Пусть Ω_R – конечная область, отсекаемая от области Ω окружностью $x^2 + y^2 = R^2$, $R \geq \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. $A_R B_R$ – расположенная в первом квадранте дуга этой окружности, $A_R(0; R)$, $B_R(R, 0)$. Тогда в силу хорошо известного принципа максимума для эллиптических уравнений и однородных условий 3 и 4 для функции $u(x, y)$, максимум $u(x, y)$ в $\overline{\Omega}_R$ должен достигаться только на $A_R B_R$, причем $\max_{\overline{D}_R} u \geq u(x_0, y_0) > 0$. Отсюда $\lim_{R \rightarrow +\infty} u(x, y) \neq 0$, что противоречит условию 5. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Перейдем к доказательству существования решения задачи Д для уравнения (1). Будем искать это решение в виде суммы $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, где $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие соответственно краевым условиям

$$u_1(x, 0) = \tau_1(x), \quad u_1(0, y) = 0, \quad (4)$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(0, y) = \tau_{21}(y). \quad (5)$$

Имеют место следующие утверждения.

Л е м м а 1. Если $\tau_1(x)$ представима формулой (2), то функция

$$u_1(x, y) = \frac{x^{-\mu} y^{1-2p}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - p\right)} \left[\int_0^\infty \frac{\tau_1(t) t^\mu}{[(t-x)^2 + y^2]^{1-p}} \Xi_2\left(\mu, 1-\mu; p; -\frac{\rho}{4xt}; \frac{\lambda^2}{4} \rho\right) dt - \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{\tau_1(t) t^\mu}{[(t+x)^2 + y^2]^{1-p}} \Xi_2\left(\mu, 1-\mu; p; -\frac{\tilde{\rho}}{4xt}; \frac{\lambda^2}{4} \tilde{\rho}\right) dt \right] \quad (6)$$

является регулярным решением уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющим краевым условиям (4), где $\rho = (t-x)^2 + y^2$, $\tilde{\rho} = (x+t)^2 + y^2$, $\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y) = \sum_{k,l=0}^\infty \frac{(\alpha)_k (\beta)_l}{(\gamma)_{k+l}} \frac{x^k y^l}{k!l!}$ ($|x| < 1$) – вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта [3].

Доказательство леммы 1. Непосредственной проверкой легко убедиться, что (6) является регулярным решением уравнения (1). Покажем, что $\lim_{y \rightarrow 0} u_1(x, y) = \tau_1(x)$, а $\lim_{x \rightarrow 0} u_1(x, y) = 0$.

Очевидно, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^{-\mu} y^{1-2p}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - p\right)} \int_0^\infty \frac{\tau_1(t) t^\mu}{[(x+t)^2 + y^2]^{1-p}} \Xi_2\left(\mu, 1-\mu; p; -\frac{\tilde{\rho}}{4xt}; \frac{\lambda^2 \tilde{\rho}}{4}\right) dt = 0.$$

Рассмотрим разность

$$u_1(x, y) - \tau_1(x) = \frac{x^{-\mu} y^{1-2p}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - p\right)} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{[\tau_1(t) - \tau(x)] t^\mu}{[(t-x)^2 + y^2]^{1-p}} \cdot \Xi_2\left(\mu, 1-\mu; p; -\frac{\rho}{4xt}; \frac{\lambda^2}{4} \rho\right) dt + \\ + \frac{x^{-\mu} y^{1-2p}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - p\right)} \int_L \frac{[\tau_1(t) - \tau(x)] t^\mu}{[(t-x)^2 + y^2]^{1-p}} \cdot \Xi_2\left(\mu, 1-\mu; p; -\frac{\rho}{4xt}; \frac{\lambda^2}{4} \rho\right) dt,$$

где $L = (0, x-\varepsilon) \cup (x+\varepsilon, +\infty)$. Проводя далее рассуждения аналогично, например [4], получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} u_1(x, y) = \tau_1(x).$$

В монографии [3] получена формула

$$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y) \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-a)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-a)} {}_0F_1(\gamma-a; y)(-x)^\alpha + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_0F_1(\gamma-\beta; y)(-x)^{-\beta}, \quad (7)$$

$$\alpha \neq \beta, \quad x \rightarrow \infty, \quad |\arg(-x)| < \pi.$$

Применив (7) к (6), установим, что при $\mu < \frac{1}{2}$ существует $\lim_{x \rightarrow 0} u_1(x, y) = 0$.

Докажем теперь, что $\lim_{R \rightarrow \infty} u_1(x, y) = 0$. Обозначим первое слагаемое в (6) через $u_{11}(x, y)$, а второе – через $u_{12}(x, y)$ и воспользуемся формулой, описывающей поведение функции $\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y)$ на бесконечности [3]

$$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y) = O\left(y^{\frac{1+\alpha-\gamma}{4} x^{-\alpha}}\right) + O\left(y^{\frac{1+\beta-\gamma}{4} x^{-\beta}}\right), \quad \alpha \neq \beta; \quad x, y \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
|u_{11}(x, y)| &\leq \mathfrak{E}_{11} y^{1-2p} \int_0^\infty t^{2\mu-2-\varepsilon} \left[(t-x)^2 + y^2 \right]^{\frac{3}{4} - \frac{\mu-p}{2}} dt + \mathfrak{E}_{21} x^{1-2\mu} y^{1-2p} \int_0^\infty t^{-1+\varepsilon} \left[(t-x)^2 + y^2 \right]^{\frac{5}{4} + \frac{p+\mu}{2}} dt = \\
&= \mathfrak{E}_{11} y^{1-2p} \int_{-x}^\infty (z+x)^{2\mu-2-\varepsilon} (z^2 + y^2)^{-\frac{3}{4} - \frac{\mu-p}{2}} dz + \mathfrak{E}_{21} x^{1-2\mu} y^{1-2p} \int_{-x}^\infty (z+x)^{-1+\varepsilon} (z^2 + y^2)^{-\frac{5}{4} - \frac{p+\mu}{2}} dz \leq \\
&\leq \mathfrak{E}_{11} y^{1-2p} \int_0^\infty (z+x)^{2\mu-2-\varepsilon} (z^2 + y^2)^{-\frac{3}{4} - \frac{\mu-p}{2}} dz + \mathfrak{E}_{21} x^{1-2\mu} y^{1-2p} \int_0^\infty (z+x)^{-1+\varepsilon} (z^2 + y^2)^{-\frac{5}{4} - \frac{p+\mu}{2}} dz.
\end{aligned}$$

Совершив замену $z = y \operatorname{tg} V$, $z+x = \frac{R}{\cos V} \sin(V+\varphi)$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, получим

$$|u_{11}(x, y)| \leq c_{11} R^{\mu - \frac{1}{2} - p - \varepsilon} + c_{21} R^{-2\mu - \varepsilon} y^{\mu - p - \frac{1}{2}} = 0 \left(\frac{1}{R^{\frac{1}{2} - \mu + p + \varepsilon}} \right).$$

Здесь $\mathfrak{E}_{11}, \mathfrak{E}_{21}, c_{11}$ и c_{21} – константы.

Из полученного соотношения следует, что $\lim_{R \rightarrow \infty} u_{11}(x, y) = 0$.

Переходим к оценке $u_{12}(x, y)$:

$$\begin{aligned}
|u_{12}(x, y)| &\leq \mathfrak{E}_{21} y^{1-2p} \int_0^\infty \frac{t^{2\mu} dt}{(1+t)^{2+\varepsilon} (\tilde{\rho})^{\frac{3}{4} + \frac{\mu-p}{2}}} + \mathfrak{E}_{22} x^{1-2\mu} y^{1-2p} \int_0^\infty \frac{t dt}{(1+t)^{2+\varepsilon} (\tilde{\rho})^{\frac{5}{4} + \frac{\mu+p}{2}}} \leq \\
&\leq \mathfrak{E}_{21} \frac{y^{1-2p}}{R^{\frac{3}{2} + \mu - p}} \int_0^\infty t^{2\mu} (1+t)^{-2-\varepsilon} dt + \widehat{c}_{22} \frac{x^{1-2\mu} y^{1-2p}}{R^{\frac{5}{2} - (p+\mu)}} \int_0^\infty t (1+t)^{-2-\varepsilon} dt \leq \mathfrak{E}_0 \frac{1}{R^{\frac{1}{2} + \mu + p}} \int_0^\infty (1+t)^{-2-\varepsilon} (t^{2\mu} + t) dt.
\end{aligned}$$

Учитывая формулу [5]

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} (1+\beta x)^{-\nu} dx = \beta^{-\mu} B(\mu, 1-\mu), \quad |\arg \beta| < \pi, \quad \operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > 0,$$

получаем

$$|u_{11}(x, y)| \leq \frac{C_0}{R^{\frac{1}{2} + \mu + p}},$$

а поэтому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u_{12}(x, y) = 0.$$

Здесь $\mathfrak{E}_{21}, \mathfrak{E}_{22}, \mathfrak{E}_0, c_0$ – константы.

Итак, доказано, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u_1(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} (u_{11}(x, y) + u_{12}(x, y)) = 0.$$

Л е м м а 2 Если $\tau_2(y)$ представима формулой (3), то функция

$$\begin{aligned}
u_2(x, y) &= \frac{y^{-p} x^{1-2\mu}}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \mu\right)} \left\{ \int_0^\infty \frac{\tau_2(t) t^p}{[(t-y)^2 + x^2]^{1-\mu}} \cdot \Xi_2 \left(p, 1-p; \mu; \frac{(t-y)^2 + x^2}{-4yt}; \frac{\lambda^2}{4} [(t-y)^2 + x^2] \right) dt - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty \frac{\tau_2(t) t^p}{[(t+y)^2 + x^2]^{1-\mu}} \cdot \Xi_2 \left(p, 1-p; \mu; \frac{(t+y)^2 + x^2}{-4yt}; \frac{\lambda^2}{4} [(t+y)^2 + x^2] \right) dt \right\}
\end{aligned}$$

является регулярным решением уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющим краевым условиям (5).

Доказательство леммы 2 проводится аналогично доказательству леммы 1.

Из вышеприведенных лемм следует теорема 2.

Т е о р е м а 2. Функция $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющим краевым условиям 4 и 5.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Маричев О.И.* Сингулярные краевые задачи для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1976. Т.280, №3. С.523–526.
2. *Маричев О.И.* Интегральное представление решений обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца и формулы его обращения // Дифференц.уравнения, 1978. Т.14, № 10. С.1824–1831.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688с.
4. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.