Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Генералов, К решению неоднородного волнового уравнения в движущейся слоистой среде, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 78–85

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu10>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:24:03

Теоретическая физика

УДК 534.23

А.В. Генералов

К РЕШЕНИЮ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Решена задача построения решения для звукового поля от объемно распределенных источников в слоистой движущейся среде вблизи упругих границ, образующих цилиндрические или плоские поверхности. Решение получено в виде интегрального представления. Выполнен детальный анализ решения.

При решении некоторых практически важных задач атмосферной акустики, авиационной акустики, гидроакустики необходимо учитывать объемное распределение источников, излучающих звук в слоистой движущейся среде вблизи упругих границ. В работах [1–4] были рассмотрены такого рода задачи для однородного газового потока, где на основе полученного интегрального соотношения в [5] было найдено акустическое поле в виде объемного интеграла от функции распределения источника, умноженного на сопряженную функцию Грина. Однако реальные движущиеся вблизи границ среды имеют градиенты скорости, плотности, энтропии, что может существенно повлиять на излучаемый звук. Поэтому задачу рассмотрим в следующей постановке. Пусть имеется объемный источник акустического излучения $Q(\bar{\eta}, \omega)$ в области $V(\bar{\eta})$, расположенный в пространстве D , занятом слоистым потоком, движущимся вдоль образующих цилиндрических или плоских поверхностей (импедансных границ, поверхностей раздела сред, пластин, оболочек и т.п.). Поверхность границы обозначим через S_j , а контур закрепления (в случае пластин, оболочек и т.п.) через Γ_j . Предполагая, что статистические процессы стационарны и расположение поверхностей не нарушает слоистости потока, амплитудная спектральная плотность звукового давления P удовлетворяет уравнению [4, 6]

$$D \left[\frac{1}{c^2} D^2 P - \rho \nabla \left(\frac{\nabla P}{\rho} \right) \right] + 2 \left(q^2 \frac{d\bar{u}}{d\eta} \nabla \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \eta} \right) = Q(\bar{\eta}, \omega), \quad (1)$$

где $D = (-i\omega + \bar{u} \nabla)$; $Q(\eta, \omega) = \rho D \left[\bar{D} m - \nabla \left(\frac{\bar{f}}{\rho} \right) \right] + 2q \left(\frac{d\bar{u}}{d\tau} \nabla \right) f_\eta$; $q = [\nabla \eta(y_2, y_3)]$; ω – круговая частота; $\bar{u}(\eta)$ – средняя скорость потока в направлении оси OY_1 и параллельная образующим цилиндрическим поверхностям $\eta(y_2, y_3) = \text{const}$; $c(\eta)$, $\rho(\eta)$ – скорость звука и плотность в движущейся среде; $m = v(\bar{\eta}, \omega)$ – амплитудная спектральная плотность объемного источника масс; $\bar{f}(\bar{\eta}, \omega)$ – амплитудная спектральная плотность приложенной объемной силы; $f_\eta = \bar{f} \frac{\nabla \eta}{|\nabla \eta|}$ – проекция силы в направлении, перпендикулярном координатной поверхности $\eta(y_2, y_3) = \text{const}$; $\eta(y_2, y_3)$ является функцией координат y_2, y_3 , перпендикулярных направлению потока OY_1 ; ∇ – оператор Гамильтона. При обтекании плоских поверхностей направление средней скорости параллельно плоскости $Y_1 O Y_2$ и $\bar{u} = \bar{u}(y_3)$, $c(y_3)$, $\rho(y_3)$ изменяются только в направлении, перпендикулярном этим плоскостям, и в уравнении (1) необходимо положить $q = 1$, а η заменить на y_3 . Кроме того, потребуем, чтобы P удовлетворяло условию

излучения в бесконечно удаленных точках пространства D , а также граничным условиям на поверхности S_j . Для пластин и оболочек можем записать [5]

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \bar{n}} \Big|_{S_j} = D^2(V_j); \quad L_j(V_j) = -P|_{S_j}; \quad (2)$$

$$T_{ji}(V_j)|_{\Gamma'_j} = 0; \quad R_{ji}(V_j)|_{\Gamma''_j} = 0; \quad \Gamma'_j + \Gamma''_j = \Gamma_j, \quad (3)$$

где V_j – амплитудная спектральная плотность нормальных перемещений поверхности оболочки S_j ; $\bar{n}$ – внешняя к S_j нормаль; $L_j(V_j)$, $T_{ji}(V_j)$, $R_{ji}(V_j)$ – некоторые дифференциальные операторы, причем оператор D коммутирует с оператором L_j .

Граничные условия на импедансной границе имеют вид

$$D^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{S_j} = \frac{1}{z_j} P, \quad (4)$$

где D^{-1} – оператор, обратный к оператору D , $z_j = z_j(\omega)$ импеданс границы S_j .

На поверхности раздела сред выполняются условия

$$D^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{S_j} = -\frac{1}{i\omega \rho_i} \frac{\partial P}{\partial \bar{n}}; \quad P|_{S_j} = P_j. \quad (5)$$

А звуковое давление P_j в контактирующей среде с плотностью ρ_j и скоростью звука c_j в общем случае должна удовлетворять уравнению

$$\rho_j \nabla \left(\frac{\nabla P_j}{\rho_j} \right) + k_j^2 P_j = 0, \quad (6)$$

где $k_j = \frac{\omega}{c_j}$; ρ_j , c_j – могут зависеть от η , как в уравнении (1).

Для нахождения решения уравнения (1) с граничными условиями (2) – (6) рассмотрим сопряженную задачу, которая удовлетворяет уравнению

$$D^* \left[\frac{1}{c^2} D^{*2} P^* - \rho \nabla \left(\frac{\nabla P^*}{\rho} \right) \right] - 2 \left(q^2 \frac{d\bar{u}}{d\eta} \nabla \right) \left(\frac{\partial P^*}{\partial \eta} \right) = Q(\eta, \omega), \quad (7)$$

где $D^* = (-i\omega - \bar{u} \nabla)$ – сопряженный дифференциальный оператор к оператору D .

Кроме того потребуем, чтобы P^* удовлетворяло условию излучения, а также граничным условиям для пластин и оболочек

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial \bar{n}} \Big|_{S_j} = D^{*2}(V_j^*); \quad L_j(V_j^*) = P^*|_{S_j}, \quad (8)$$

$$T_{ji}(V_j^*)|_{\Gamma'_j} = 0; \quad R_{ji}(V_j^*)|_{\Gamma''_j} = 0; \quad \Gamma'_j + \Gamma''_j = \Gamma_j, \quad (9)$$

где V_j^* – амплитудная спектральная плотность нормальных перемещений поверхности оболочки S , под воздействием давления P^* . Дополнительно примем, что L_i – самосопряженный дифференциальный оператор, для которого справедлива формула Грина

$$\int_{S_j} [V_j L(V_j^*) - V_j^* L(V_j)] ds = \int_{\Gamma_j} \sum_{i=1}^N [R_{ji}(V_j^*) T_{ji}(V_j^*) R_{ji}(V_j)] dl, \quad (10)$$

где N – зависит от порядка дифференциального оператора L_i .

Аналогично можно записать граничные условия на импедансной поверхности и поверхности раздела сред. Для этого в (4)–(6) необходимо заменить операторы D^{-1} на оператор D^{*-1} , обратный к оператору D^* , а P, P_j соответственно на P^* и P_j^* . Принимая во внимание, что коэффициенты уравнений (1), (7) зависят только от (y_2, y_3) в случае цилиндрических поверхностей и от y_3 для плоских границ, удобно решения (1), (7) представить в виде интеграла Фурье по горизонтальным составляющим $\bar{\xi}$ волнового вектора

$$P(\bar{\eta}_-, \bar{\eta}_1, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) e^{i \bar{\xi} \bar{\eta}_-} d\bar{\xi}, \quad (11)$$

$$P(\bar{\eta}_-, \bar{\eta}_1, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) e^{-i \bar{\xi} \bar{\eta}_-} d\bar{\xi}, \quad (12)$$

где $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_-, \bar{\eta}_1)$; $\bar{\eta}_-$, $\bar{\eta}_1$ – горизонтальная и поперечная составляющие вектора $\bar{\eta}$, причем для цилиндрических поверхностей $\bar{\eta}_1$ расположена в плоскости, параллельной плоскости $(Y_2 O Y_3)$, а $\bar{\eta}_-$ параллельна оси $O Y_1$. Для плоских поверхностей $\bar{\eta}_1$ параллельна оси $O Y_3$, $\bar{\eta}_-$ расположена в плоскости параллельной $(Y_1 O Y_2)$. Переходя в (1), (7) к горизонтальным спектральным компонентам акустического поля, после несложных, но громоздких преобразований находим

$$\nabla \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nabla \eta}{\rho M^2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \right) + \frac{k^2 M^2 - \xi^2}{\rho M^2} \tilde{P} = \frac{\tilde{Q}(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{i \omega \rho M^3}; \quad (13)$$

$$\nabla \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nabla \eta}{\rho M^2} \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial \eta} \right) + \frac{k^2 M^2 - \xi^2}{\rho M^2} \tilde{P}^* = \frac{\tilde{Q}^*(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{i \omega \rho M^3}, \quad (14)$$

где $M = \left(1 - \frac{\bar{\xi} \bar{u}}{\omega}\right)$, $\tilde{Q}(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)$, $\tilde{Q}^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)$ – горизонтальные спектральные компоненты распределенных источников $Q(\bar{\eta}, \omega)$, $Q^*(\bar{\eta}, \omega)$.

Умножим уравнение (13) на P^* , а (14) на $\tilde{P}$; после сложения правых и левых частей полученных соотношений, определяем

$$\tilde{P} \nabla \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nabla \eta}{\rho M^2} \frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial \eta} \right) - \tilde{P}^* \nabla \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nabla \eta}{\rho M^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} \right) = -\tilde{P}^* \frac{\tilde{Q}(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{i \omega \rho M^3} + \tilde{P} \frac{\tilde{Q}^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{i \omega \rho M^3}. \quad (15)$$

Проинтегрируем левую и правую части (15) по поперечным координатам $\bar{\eta}_1$ пространства D , занятого слоистым потоком. В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} \left[\tilde{P} \nabla_1 \left(\frac{1}{\rho M^2} \nabla \tilde{P}^* \right) - \tilde{P}^* \nabla_1 \left(\frac{1}{\rho M^2} \nabla \tilde{P} \right) \right] d\bar{\eta}_1 = \\ & = \int_{D_1} \left[\tilde{P} \frac{\tilde{Q}^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{i \omega \rho M^3} - \tilde{P}^* \frac{\tilde{Q}(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{i \omega \rho M^3} \right] d\bar{\eta}_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\nabla_1 = \nabla \eta \frac{\partial}{\partial \eta}$ – поперечный оператор Гамильтона.

Используя формулу Грина и граничные условия (2)–(6), (8), (9), записанные для горизонтальных спектральных компонент $\tilde{P}$, $\tilde{P}^*$, а также условия излучения, легко показать, что интеграл в левой части (16) равен нулю. Поэтому

$$\int_{D_1} \tilde{P} \frac{\tilde{Q}^*(-\bar{\xi}, \eta_1, \omega)}{i \omega \rho M^3} d\bar{\eta}_1 = \int_{D_1} \tilde{P}^* \frac{\tilde{Q}(\bar{\xi}, \eta_1, \omega)}{i \omega \rho M^3} d\bar{\eta}_1. \quad (17)$$

Рассматривая дозвуковые слоистые помехи и предполагая $M \neq 0$, проинтегрируем (17) по горизонтальным составляющим волнового вектора и, используя формулу Парсеваля, находим

$$\int_D P \frac{D^{*-3} [Q^*(\eta, \omega)]}{\rho} d\bar{\eta} = \int_D P^* \frac{D^{-3} [Q(\eta, \omega)]}{\rho} d\bar{\eta}. \quad (18)$$

Формула (18) устанавливает связь между решениями двух сопряженных краевых задач дифракции на импедансных границах, поверхностях раздела сред, на упругих телах в движущейся слоистой среде. Важно заметить, что (18) справедливо для пластин, оболочек, мембран, стержней и т.п., если операторы D , D^* коммутируют с оператором L_j .

Полагая в (18) $Q^*(\bar{\eta}, \omega) = \rho D^{*3} [j^*(\bar{\eta}, \omega)]$, $Q(\bar{\eta}, \omega) = \rho D^3 [j(\bar{\eta}, \omega)]$, находим

$$\int_D P(\bar{\eta}, \omega) j^*(\bar{\eta}, \omega) dV = \int_D P^*(\bar{\eta}, \omega) j(\bar{\eta}, \omega) dV, \quad (19)$$

Откуда следует, что для источников, имеющих порядок оператора D , равный порядку старшего члена уравнений (1), (7), выполняется теорема обращения потоков [5, 6] и в координатном представлении. Из (18) для источников массового типа определяем

$$\int_D P(\bar{\eta}, \omega) D^{*-1} [m^*(\bar{\eta}, \omega)] dV = \int_D P^*(\bar{\eta}, \omega) D^{-1} [m(\bar{\eta}, \omega)] dV. \quad (20)$$

Аналогично находим и для силовых источников

$$\begin{aligned} \int_D P(\bar{\eta}, \omega) \left\{ D^{*-2} \left[\nabla \left(\frac{\bar{f}^*}{\rho} \right) \right] + 2 \frac{q}{\rho} D^{*-3} \left[\left(\frac{d\bar{u}}{d\eta} \nabla \right) f_\eta^* \right] \right\} dV = \\ = \int_D P^*(\bar{\eta}, \omega) \left\{ D^{-2} \left[\nabla \left(\frac{\bar{f}}{\rho} \right) \right] + 2 \frac{q}{\rho} D^{-3} \left[\left(\frac{d\bar{u}}{d\eta} \nabla \right) f_\eta \right] \right\} dV. \end{aligned} \quad (21)$$

Из формул (19), (20), (21) следует, что в координатном представлении формулировка теоремы обращения потока в слоистой движущейся среде существенно зависит от типа источника, излучающего звук [7].

Другими важными соотношениями, характеризующими симметрию акустического поля, являются соотношения, связывающие решения сопряженных задач от точечных источников. Поэтому рассмотрим два сопряженных уравнения

$$D \left[\frac{1}{c^2} D^2 G_m - \rho \nabla \left(\frac{\nabla G_m}{\rho} \right) \right] + 2 \left(q^2 \frac{d\bar{u}}{d\eta} \nabla \right) \left(\frac{\partial G_m}{\partial \eta} \right) = D^m \delta(\bar{y} - \bar{\eta}); \quad (22)$$

$$D^* \left[\frac{1}{c^2} D^{*2} G_n^* - \rho \nabla \left(\frac{\nabla G_n^*}{\rho} \right) \right] - 2 \left(q^2 \frac{d\bar{u}}{d\eta} \nabla \right) \left(\frac{\partial G_n^*}{\partial \eta} \right) = D^{*n} \delta(\bar{y} - \bar{x}). \quad (23)$$

Переходя в (22), (23) к горизонтальным спектральным компонентам $\tilde{G}_m$, G_n^*

$$G_m(\bar{y}/\bar{\eta}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_m(\bar{\xi}, \bar{y}_1/\bar{\eta}, \omega) e^{i\bar{\xi} \bar{y}_-} d\bar{\xi}; \quad (24)$$

$$G_n^*(\bar{y}/\bar{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_n^*(-\bar{\xi}, \bar{y}_1/\bar{x}, \omega) e^{-i\bar{\xi} \bar{y}_-} d\bar{\xi}, \quad (25)$$

находим

$$\nabla \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nabla \eta}{\rho M^2} \frac{\partial \tilde{G}_m}{\partial \eta} \right) + \frac{k^2 M^2 - \xi^2}{\rho M^2} \tilde{G}_m = \frac{1}{\rho} (-i\omega)^{m-1} M^{m-3} \delta(\bar{y}_1 - \bar{\eta}_1) e^{-i\bar{\xi} \bar{\eta}_-}; \quad (26)$$

$$\nabla \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nabla \eta}{\rho M^2} \frac{\partial \tilde{G}_n^*}{\partial \eta} \right) + \frac{k^2 M^2 - \xi^2}{\rho M^2} \tilde{G}_n^* = \frac{1}{\rho} (-i\omega)^{n-1} M^{n-3} \delta(\bar{y}_1 - \bar{x}_1) e^{i\bar{\xi} \bar{x}_-}. \quad (27)$$

Умножая (26) на $-\tilde{G}_n^*$, а (27) на $\tilde{G}_m$, после сложения и интегрирования, как это сделано в случае вывода (16) – (17), определяем

$$\frac{1}{\rho(\eta_1)} D^{m-3} [G_n^*(\bar{\eta}/\bar{x}, \omega)] = \frac{1}{\rho(\bar{x}_1)} D^{*n-3} [G_m(\bar{x}/\bar{\eta}, \omega)]. \quad (28)$$

Формула (28) связывает решения двух сопряженных задач с точечными источниками, имеющих разный порядок операторов D, D^* . Так, например, при $m = n = 3$ получаем

$$\frac{1}{\rho(\bar{\eta}_1)} G_3^*(\bar{\eta}/\bar{x}, \omega) = \frac{1}{\rho(\bar{x}_1)} G_3(\bar{x}/\bar{\eta}, \omega).$$

Отсюда следует, что акустические поля, создаваемые точечными источниками с порядком операторов D, D^* , равным трем, имеют симметрию при перестановке $\bar{x}$ на $\bar{\eta}$ и наоборот, если учесть плотность в этих точках.

Используя формулы (17), (18), найдем решение уравнения (1) с граничными условиями (2)–(6). Для этого перепишем (7) в виде

$$D^* \left[\frac{1}{c^2} D^{*2} G_1^* - \rho \nabla \left(\frac{\nabla G_1^*}{\rho} \right) \right] - 2 \left(q^2 \frac{d\bar{u}}{d\eta} \nabla \right) \left(\frac{\partial G_1^*}{\partial \eta} \right) = D^* \delta(\bar{\eta} - \bar{x}). \quad (29)$$

Поэтому, переходя в (29) к горизонтальным спектральным компонентам акустического поля, находим

$$\nabla \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nabla \eta}{\rho M^2} \frac{\partial \tilde{G}_1^*}{\partial \eta} \right) + \frac{k^2 M}{\rho M^2} \tilde{G}_1^* = \frac{-\delta(\bar{\eta}_1 - x_1)}{\rho M^2} e^{i\bar{\xi} \bar{x}_-}; \quad (30)$$

$$G_1^*(\bar{\eta}_-, \bar{\eta}_1/\bar{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1/\bar{x}, \omega) e^{-i\bar{\xi} \bar{\eta}_-} d\bar{\xi}. \quad (31)$$

Полагая в (31) $Q^*(\bar{\eta}, \omega) = \rho D^{*3} [j^*(\bar{\eta}, \omega)]$, $Q(\bar{\eta}, \omega) = \rho D^3 [j(\bar{\eta}, \omega)]$, находим

$$\int_D p(\bar{\eta}, \omega) j^*(\bar{\eta}, \omega) dv = \int_D p^*(\bar{\eta}, \omega) j(\bar{\eta}, \omega) dv,$$

откуда следует, что для гипотетических источников, имеющих порядок оператора D , равный порядку старшего члена уравнения (29), выполняется теорема обращения потока и в координатном представлении. Для источников массового типа получаем

$$\int_D p(\bar{\eta}, \omega) D^{*-1} [m^*(\bar{\eta}, \omega)] dv = \int_D p^*(\bar{\eta}, \omega) D^{-1} [m(\bar{\eta}, \omega)] dv.$$

Аналогично находим для силовых источников

$$\begin{aligned} & \int_D p(\bar{\eta}, \omega) \left\{ + D^{*-2} \left[\nabla \left(\frac{\bar{f}^*(\bar{\eta}, \omega)}{\rho} \right) \right] + 2 \frac{q}{\rho} D^{*-3} \left[\left(\frac{d\bar{u}}{dr} \nabla \right) f_\eta^* \right] \right\} dv = \\ & = \int_D p^*(\bar{\eta}, \omega) \left\{ + D^{-2} \left[\nabla \left(\frac{\bar{f}(\bar{\eta}, \omega)}{\rho} \right) \right] - 2 \frac{q}{\rho} D^{-3} \left[\left(\frac{d\bar{u}}{dr} \nabla \right) f_\eta \right] \right\} dv. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (13), (30), из (17) определяем

$$\tilde{p}(\bar{\xi}, \bar{x}_1, \omega) e^{i\bar{\xi} \bar{x}_-} = -\frac{\rho(\bar{x}_-)}{M^{-2}(x_1)} \int_{D_1} \tilde{G}_1^* \frac{Q(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{i\omega \rho(\bar{\eta}_1) M^3(\eta_1)} d\bar{\eta}_1. \quad (32)$$

Проинтегрируем (32) по горизонтальной составляющей волнового вектора, откуда получаем

$$p(\bar{x}, \omega) = -\frac{\rho(\bar{x}_1)}{i\omega} \int_{D_1} \frac{d\bar{\eta}_1}{\rho(\bar{\eta}_1)} \int_{-\infty}^{\infty} G_1^* \left(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1 / \bar{x}_1, \omega \right) \frac{\tilde{Q}(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{\left[1 - \frac{\bar{\xi} u(\bar{x}_1)}{\omega} \right]^{-2} \left[1 - \frac{\bar{\xi} u(\bar{\eta}_1)}{\omega} \right]^3} d\bar{\xi}. \quad (33)$$

Используя формулу Парсеваля в (33) и принимая во внимание соотношение

$$Q(\bar{\eta}, \omega) = \begin{cases} Q(\bar{\eta}, \omega), & \bar{\eta} \in V, \\ 0, & \bar{\eta} \notin V, \end{cases}$$

перепишем (33) в виде

$$p(\bar{x}, \omega) = \rho(\bar{x}_1) \int_{V(\bar{\eta})} \frac{1}{\rho(\bar{\eta}_1)} D^{*2} [G_1^* (\bar{\eta} / \bar{x}, \omega)] D^{-3} [Q(\bar{\eta}, \omega)] d\bar{\eta}. \quad (34)$$

Соотношение (34) является точным решением уравнения (1) с граничными условиями (2)–(6) и позволяет по решению сопряженной задачи (29) проводить расчет акустических полей распределенных источников в слоистых потоках вблизи упругих границ. В акустике очень часто звук создается источниками масс или приложенными к среде объемными силами. Поэтому, полагая в (34) $\bar{f}(\bar{\eta}, \omega) = 0$, для распределенного источника масс получаем

$$p(\bar{x}, \omega) = \rho(\bar{x}_1) \int_{V(\eta)} D^{*2} [G_1^* (\bar{\eta} / \bar{x}, \omega)] D^{-1} [m(\bar{\eta}, \omega)] d\bar{\eta}. \quad (35)$$

Аналогично, полагая в (34) $m(\bar{\eta}, \omega) = 0$, для распределенного источника силы находим

$$\begin{aligned} p(\bar{x}, \omega) = & -\rho(\bar{x}_1) \int_{V(\bar{\eta})} D^{*2} [G_1^* (\bar{\eta} / \bar{x}, \omega)] D^{-2} \left[V \left(\frac{\bar{f}(\bar{\eta}, \omega)}{\rho(\eta_1)} \right) \right] d\bar{\eta} + \\ & + 2\rho(\bar{x}_1) \int_{V(\bar{\eta})} \frac{q(\eta_1)}{\rho(\eta_1)} D^{*2} [G_1^* (\bar{\eta} / \bar{x}, \omega)] D^{-3} \left[\left(\frac{d\bar{u}}{d\eta} V \right) f_{\eta}(\bar{\eta}, \omega) \right] d\bar{\eta}. \end{aligned} \quad (36)$$

Нетрудно видеть, что из найденных выше соотношений (33)–(36) легко получаются выражения для расчета акустических полей распределенных источников, помещенных в неподвижную слоистую среду или в однородный газовый поток [1, 2, 3]. Перейдем к рассмотрению вопроса о нахождении решения уравнения (29) с соответствующими граничными условиями. Для этого воспользуемся соотношением (30), откуда находим

$$q^2 \frac{\partial^2 \tilde{G}_1^*}{\partial \eta^2} + \rho M^2 q^2 \frac{\partial \tilde{G}_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho M^2} \right) + (k^2 M^2 - q^2) \tilde{G}_1^* = -\delta(\bar{\eta}_1 - \bar{x}_1) e^{i\bar{\xi} \bar{x}_-}. \quad (37)$$

Предполагая, что цилиндрические поверхности обладают аксиальной симметрией, формулу (37) перепишем в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}_1^*}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \tilde{G}_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\ln \rho M^2) + (k^2 M^2 - \xi^2) \tilde{G}_1^* = -\delta(\bar{\eta}_1 - \bar{x}_1) e^{i\bar{\xi} \bar{x}_-}. \quad (38)$$

В случае плоских поверхностей в (38) необходимо заменить η на y_3 . Из (38) следует, что $\tilde{G}^*$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}_1^*}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \tilde{G}_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\ln \rho M^2) + (k^2 M^2 - \xi^2) \tilde{G}_1^* = 0 \quad (39)$$

при всех η_1 , кроме $\bar{\eta}_1 = \bar{x}_1$. Чтобы установить характер особенности $\tilde{G}_1^*$ при $\tilde{\eta}_1 = \bar{x}_1$, проинтегрируем по $\bar{\eta}_1$ (38) в окрестности $\bar{x}_1$. Отсюда получаем

$$\left[\frac{\partial \tilde{G}_1^*}{\partial \eta} \right]_{\bar{\eta}_1 = \bar{x}_1} = -e^{i\bar{\xi} \bar{x}_-}, \quad [G_1^*]_{\bar{\eta}_1 = \bar{x}_1} = 0, \quad (40)$$

где скобки означают функции при $\bar{\eta}_1 = \bar{x}_1$.

Кроме того, решения уравнения (38) должны удовлетворять граничным условиям, записанным для горизонтальных спектральных компонент акустического поля, и условиям излучения при $\eta \rightarrow \pm\infty$, если пространство безгранично. Обозначим $\tilde{p}_{1,2}^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)$ два линейно независимых решения однородного уравнения (39), удовлетворяющих граничным условиям при $|\bar{\eta}_1| < |\bar{x}_1|$ и $|\bar{\eta}_1| > |\bar{x}_1|$ или соответственно условиям излучения при $\eta \rightarrow -\infty$ и $\eta \rightarrow +\infty$, если пространство безгранично. Тогда получаем $\tilde{G}_1^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}, \omega) = A_1 P_1^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}, \omega)$ при $|\bar{\eta}_1| < |\bar{x}_1|$ и $\tilde{G}_1^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}, \omega) = A_2 P_2^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}, \omega)$ при $|\bar{\eta}_1| > |\bar{x}_1|$. Постоянные A_1, A_2 определяем из условия (40), откуда получаем [6]

$$\tilde{G}_1^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) = e^{i\bar{\xi} \bar{x}_-} \frac{\tilde{p}_1^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) \tilde{p}_2^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{W(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}, \quad (41)$$

где $W(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)$ – вронскиан, который записывается в виде

$$W(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) = \tilde{p}_1^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) \frac{\partial \tilde{p}_2^*}{\partial \eta}(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) - \tilde{p}_2^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) \frac{\partial \tilde{p}_1^*}{\partial \eta}(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega).$$

Предположим, что $W(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) \neq 0$ при вещественных значениях $\bar{\xi}$. Это предположение необходимо для того, чтобы переход от координатного представления поля $G_1^*(\bar{\eta}, \omega)$ к спектральному $\tilde{G}_1^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)$ при помощи преобразования Фурье был обоснованным. Дифференцируя $W(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)$ по r и используя (39), легко показать, что $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{W}{\rho M^2} \right) = 0$, т.е. вронскиан зависит только от горизонтальной компоненты волнового вектора $\bar{\xi}$. Подставляя (41) в (31), получаем

$$G_1^*(\bar{\eta}/\bar{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}_1^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega) \tilde{p}_2^*(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)}{W(-\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \omega)} e^{-i\bar{\xi}(\bar{\eta} - \bar{x}_0)} d\bar{\xi}. \quad (42)$$

Во всех тех случаях, когда для произвольных значений $\bar{\xi}$ удастся найти точное решение одномерного волнового уравнения (39) с соответствующими граничными условиями, интегральное представление (42) дает точное решение уравнения (29). Поэтому, подставляя (42) в (34)–(36), можем получить интегральное представление акустического поля распределенного источника в движущейся слоистой среде вблизи упругих границ. В заключение следует отметить, что формулы (34)–(36) можно переписать и в другом виде, если воспользоваться соотношением (28).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Море Ф.М., Феибах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1, 2. М.: ИЛ. 1958.
2. *Лямиев Л.М.* К вопросу о принципе взаимности в акустике // ДАН СССР. 1959. Т. 125, № 6. С. 1231–1234.
3. *Лямиев Л.М.* Излучение звука упругими оболочками, возбуждаемыми турбулентным аэродинамическим потоком // Акустический журнал, 1961. Вып. 1. С. 59–66.
4. *Голдштейн М.Е.* Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981. 294 с.
5. *Лямиев Л.М.* О некоторых интегральных соотношениях в акустике движущейся среды // ДАН СССР, 1961. Т. 138, № 3. С. 575–578.
6. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 216 с.
7. *Генералов А.В.* О некоторых интегральных соотношениях для акустических волн в неоднородной движущейся среде // ДАН СССР. 1991. Т. 316, № 5. С. 1072–1076.