Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гиль, А. И. Задорожный, В. А. Ногин, Обращение и описание некоторых потенциалов с L^p -плотностями в неэллиптическом случае, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 4(), 43–49

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:29:14

Функциональный анализ

УДК 517.983

ОБРАЩЕНИЕ И ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ С L^p -ПЛОТНОСТЯМИ В НЕЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А. В. Гиль, А. И. Задорожний, В. А. Ногин

Южный федеральный университет,
Факультет механики, математики и компьютерных наук,
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а.

E-mails: gil-alexey@yandex.ru, simon@rsu.ru, vnogin@math.rsu.ru

Строится обращение обобщенных потенциалов Стрихарца с особенностями ядер на конечном объединении сфер в $\mathbb{R}^n$ с плотностями из пространства L^p , $1 \leq p \leq 2$ и из пространства Харди H^1 в неэллиптическом случае, когда их символы вырождаются на множестве меры нуль в $\mathbb{R}^n$. Дается также описание рассматриваемых потенциалов в терминах обращающих конструкций.

Ключевые слова: свёртка, осциллирующий символ, мультипликатор, обобщённая функция.

Введение. Рассматривается оператор свёртки

$$M_{\theta}^{\bar{\beta}} \varphi = m_{\theta}^{\bar{\beta}} * \varphi \quad (1)$$

с ядром, имеющим степенные особенности на конечном объединении сфер:

$$m_{\theta}^{\bar{\beta}}(y) = \theta_1(|y|)(r_1^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_1-1} \times \dots \times \theta_{s-1}(|y|) \times \\ \times r_{s-1}^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_{s-1}-1} \theta_s(|y|)(1 - |y|^2)_+^{\beta_s-1}, \quad (2)$$

где $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, $\beta_j > 0$, $1 \leq j \leq s$, $s \geq 2$, $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{s-1} < r_s = 1$. Здесь $\theta_j(r)$ — гладкие функции, $\theta_j(r_j) \neq 0$, $1 \leq j \leq s$.

Операторы вида (1) возникают при решении задачи Коши для волнового уравнения (см. [1–3]). $(H^p - H^q)$ -оценки для этих операторов, $0 < p \leq q < \infty$, были получены в [4].

Методом аппроксимативных обратных операторов (АОО) строится обращение потенциалов (2) с плотностями из пространства L^p , $1 \leq p \leq 2$ и из пространства Харди H^1 в неэллиптическом случае, когда их символы вырождаются на множестве меры нуль в $\mathbb{R}^n$. Дается также описание образов $M_{\theta}^{\bar{\beta}}(L^p)$ и $M_{\theta}^{\bar{\beta}}(H^1)$ в терминах обращающих конструкций.

Алексей Викторович Гиль (к.ф.-м.н.), ст. преподаватель, каф. дифференциальных и интегральных уравнений. Анатолий Иванович Задорожний (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. дифференциальных и интегральных уравнений. Владимир Александрович Ногин (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. дифференциальных и интегральных уравнений.

1. Предварительные сведения. Введём следующие обозначения: $(Ff)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\xi x} dx$ — преобразование Фурье функции f ; $(F^{-1}f)(\xi) = \tilde{f}(\xi) = (2\pi)^{-n}(Ff)(-\xi)$ — обратное преобразование Фурье; $R^0(\mathbb{R}^n) = \{f : f(x) = \hat{\varphi}(x), \varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ — винеровское кольцо; $\mathcal{S}$ — класс Шварца быстро убывающих гладких функций; $\mathcal{S}'$ — пространство обобщённых функций медленного роста; $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in C(\mathbb{R}^n), f(\infty) = 0\}$ — пространство непрерывных функций, исчезающих на бесконечности; $W_\varepsilon \varphi = w_\varepsilon * \varphi$ — интеграл Гаусса–Вейерштрасса, где $w_\varepsilon(x) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\varepsilon)}$ ($\hat{w}_\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon|\xi|^2}$); Φ, Ψ — пространства П. И. Лизоркина: $\Psi = \{\psi \in \mathcal{S} : (D^\nu \psi)(0) = 0, |\nu| = 0, 1, \dots\}$, $\Phi = \{\varphi \in \mathcal{S} : \hat{\varphi} \in \Psi\}$.

Через $H^1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех $\mathcal{S}'$ -распределений таких, что

$$f^+(x) = \sup_{0 < \varepsilon < \infty} |(f * \varphi_\varepsilon)(x)| \in L^1,$$

где $\varphi \in \mathcal{S}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \neq 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ и $(f * \varphi_\varepsilon)(x) = \langle f, \varphi_\varepsilon(x - \cdot) \rangle$. Положим $\|f\|_{H^1} = \|f^+\|_{L^1}$ (см. [5, с. 269]).

Пусть V — произвольное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Через Ψ_V обозначим класс всех функций из $\mathcal{S}$, которые исчезают вместе со всеми своими производными на V :

$$\Psi_V = \{\psi(\xi) \in \mathcal{S} : D^k \psi(\xi) = 0, \xi \in V, |k| = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Через Φ_V обозначим класс прообразов Фурье функций из Ψ_V : $\Phi_V = F^{-1}(\Psi_V)$.

Пространства Ψ_V и Φ_V были введены и изучены С. Г. Самко (см. [6, § 3]).

ТЕОРЕМА 1 [6, с. 50]. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Если $\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_m}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при каком-нибудь $1 < p \leq 2$ для всех $m = 1, 2, \dots, n$ и любых $k_1, \dots, k_m$, то $f(x) \in R^0(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 2 [4]. Пусть $\beta_j > 0$, $1 \leq j \leq s$, $\beta_0 = \min\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. Имеют место следующие соотношения:

- 1) оператор $M_\theta^{\bar{\beta}}$ ограничен из L^p в L^q , $1 < p \leq q < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1, \quad \frac{1}{p} - \frac{n}{q} \leq \beta_0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1, \quad \frac{n}{p} - \frac{1}{q} \leq \beta_0 + (n-1);$$

- 2) оператор $M_\theta^{\bar{\beta}}$ ограничен из L^1 в L^q тогда и только тогда, когда

$$1 - \beta_0 < \frac{1}{q} \leq 1;$$

- 3) оператор $M_\theta^{\bar{\beta}}$ ограничен из H^1 в H^1 .

2. Основные результаты. Воспользуемся идеей обращения потенциалов с символами $\widehat{m}^\beta(\xi) = (2\pi)^{n/2} 2^{\beta-1} |\xi|^{1-\beta-n/2} J_{\beta-1+n/2}(|\xi|)$ из [7].

Обращение потенциала $f = M_{\theta}^{\bar{\beta}} \varphi$, $\varphi \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, в неэллиптическом случае, когда $\text{mes} \left\{ \xi : \widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(\xi) = 0 \right\} = 0$, будем строить в виде

$$T_{\theta}^{\bar{\beta}} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\beta} f, \quad (3)$$

где

$$T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} f = F^{-1} \left(\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(\xi) e^{-\varepsilon |\xi|^2} / \left(\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(\xi)^2 + i\delta \right) \right) * f, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(\xi) &= \int_0^1 \rho^{n-1} \theta_1(\rho) (r_1^2 - \rho^2 + i0)^{\beta_1-1} \times \dots \\ &\dots \times \theta_{s-1}(\rho) (r_{s-1}^2 - \rho^2 + i0)^{\beta_{s-1}-1} \theta_s(\rho) (1 - \rho^2)_+^{\beta_s-1} d\rho \int_{S^{n-1}} e^{i(\rho \xi \cdot \sigma)} d\sigma. \end{aligned}$$

Следующая теорема даёт обращение потенциалов $M_{\theta}^{\bar{\beta}} \varphi$, $\varphi \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$. Тогда

$$\left(T_{\theta}^{\bar{\beta}} M_{\theta}^{\bar{\beta}} \varphi \right) (x) = \varphi(x), \quad (5)$$

где $T_{\theta}^{\bar{\beta}}$ — оператор (3).

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что оператор (4) — оператор свёртки с суммируемым ядром. Рассуждения будем основывать на равенстве

$$(T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} M_{\theta}^{\bar{\beta}} \varphi)(x) = (W_{\varepsilon} \varphi)(x) - i\delta (N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi)(x), \quad \varepsilon, \delta > 0, \quad (6)$$

где

$$N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} f = F^{-1} \left(n_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}}(\xi) \right) * f, \quad n_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}}(\xi) = e^{\frac{-\varepsilon |\xi|^2}{2}} / \left(\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(\xi)^2 + i\delta \right).$$

Для функций $\varphi \in \Phi$ равенство (6) проверяется переходом к образам Фурье. Это равенство распространяется по ограниченности на все пространство L^p , $1 < p \leq 2$, с учетом того, что операторы в обеих частях (6) ограничены из L^p в L_{γ}^1 , при некотором $\gamma > 0$, где

$$L_{\gamma}^1 = \left\{ f(x) : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)| dx}{(1 + |x|)^{\gamma}} < \infty \right\}.$$

В случае $p = 1$ равенство (6) выполняется в смысле Φ' :

$$\langle T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} M_{\theta}^{\bar{\beta}} \varphi, \omega \rangle = \langle W_{\varepsilon} \varphi - i\delta N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi, \omega \rangle, \quad \omega \in \Phi. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$\left(T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} M_{\theta}^{\bar{\beta}} \varphi \right) (x) = (W_{\varepsilon} \varphi)(x) - i\delta \left(N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi \right) (x) + P(x), \quad (8)$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен. Так как функции $(T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} M_{\theta}^{\bar{\beta}} \varphi)(x)$, $(W_{\varepsilon} \varphi)(x)$ и $(N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi)(x)$ принадлежат пространству L^1 , $P(x) \equiv 0$ в (8).

С учётом того, что $W_{\varepsilon} \varphi \rightarrow \varphi$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ по L^p -норме или почти всюду, формула (5) будет следовать из равенства

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 \left\| (N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi)(x) \right\|_2^2 = 0. \quad (9)$$

Докажем (9). Применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\delta^2 \left\| (N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi)(x) \right\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta^2 e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}}{\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}(\xi)}^4 + \delta^2} \left| (\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi})(\xi) \right|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad (10)$$

при $\delta \rightarrow 0$, с учётом того, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2 e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}}{\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}(\xi)}^4 + \delta^2} \left| (\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi})(\xi) \right|^2 = 0, \quad \xi \notin \{\xi : \widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}(\xi)} = 0\}.$$

Предельный переход (10) обосновывается применением мажорантной теоремы Лебега с учетом оценки

$$\left(\delta^2 e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} / \left(\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}(\xi)}^4 + \delta^2 \right) \right) \left| (\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi})(\xi) \right|^2 \leq e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} \left| (\widehat{W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi})(\xi) \right|^2 \in L_1.$$

Здесь существенным являлся тот факт, что $W_{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi \in L^2$, если $\varphi \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$. Кроме того, учтено, что функция

$$\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}(\xi) e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}}} / \left(\left| \widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}(\xi)} \right|^2 + i\delta \right)$$

является 2-мультипликатором. $\square$

Описание образа $M_{\theta}^{\bar{\beta}}(L^p)$, $1 \leq p \leq 2$, даёт следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, $\beta_j > 0$, $1 \leq j \leq s$ и $1 \leq p \leq 2$. Тогда

$$M_{\theta}^{\bar{\beta}}(L^p) = \left\{ f \in L^q : T_{\theta}^{\bar{\beta}} f \in L^p \right\},$$

где $T_{\theta}^{\bar{\beta}}$ — оператор (3), q — произвольное число, $1 \leq q \leq 2$, такое, что оператор $M_{\theta}^{\bar{\beta}}$ ограничен из L^p в L^q .

Доказательство. Вложение

$$M_{\theta}^{\bar{\beta}}(L^p) \subset \left\{ f \in L^q : T_{\theta}^{\bar{\beta}} f \in L^p \right\} \quad (11)$$

вытекает из теоремы 2.

Докажем вложение

$$M_{\theta}^{\bar{\beta}}(L^p) \supset \left\{ f \in L^q : T_{\theta}^{\bar{\beta}} f \in L^p \right\},$$

обратное к (11). Пусть функция $\omega \in \mathcal{S}$ такова, что $\widehat{\omega}(\xi) = 0$ в некоторой окрестности множества $V = \{\xi : \widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(|\xi|) = 0\}$ (следовательно, $\omega \in \Phi_V$).

Имеем

$$\langle M_{\theta}^{\bar{\beta}} T_{\theta}^{\bar{\beta}} f, \omega \rangle = \langle T_{\theta}^{\bar{\beta}} f, \overline{M_{\theta}^{\bar{\beta}} \omega} \rangle = \langle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} f, \overline{M_{\theta}^{\bar{\beta}} \omega} \rangle, \quad (12)$$

где $\overline{M_{\theta}^{\bar{\beta}}}$ — оператор свёртки с символом $\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(|\xi|)$. С учётом (12) и того факта, что сходимость по L^p норме предполагает сходимость в Φ'_V , получаем

$$\begin{aligned} \langle M_{\theta}^{\bar{\beta}} T_{\theta}^{\bar{\beta}} f, \omega \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \lim_{\delta \rightarrow 0} T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} f, \overline{M_{\theta}^{\bar{\beta}} \omega} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} f, \overline{M_{\theta}^{\bar{\beta}} \omega} \rangle = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle f, \overline{T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}}} \overline{M_{\theta}^{\bar{\beta}} \omega} \rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\overline{T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}}}$ — мультипликаторный оператор с символом

$$\left(\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|^2} \right) / \left(|\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(\xi)|^2 - i\delta \right).$$

Далее имеем

$$\overline{(T_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} M_{\theta}^{\bar{\beta}} \omega)}(x) = (W_{\varepsilon} \omega)(x) + i\delta \overline{(N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \omega)}(x), \quad \varepsilon, \delta > 0, \quad (14)$$

где $\overline{N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}}}$ — ограниченный в L^2 оператор, порождаемый 2-мультипликатором

$$e^{\frac{-\varepsilon|\xi|^2}{2}} / \left(|\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(\xi)|^2 - i\delta \right).$$

Равенство (14) проверяется переходом к преобразованиям Фурье.

С учётом (13) и (14) получаем

$$\langle M_{\theta}^{\bar{\beta}} T_{\theta}^{\bar{\beta}} f, \omega \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, W_{\varepsilon} \omega \rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle f, i\delta \overline{N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \omega \rangle. \quad (15)$$

Докажем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \langle f, i\delta \overline{N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \omega \rangle = 0. \quad (16)$$

Так как $\overline{(N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \omega)}(x) \in \Phi_V$,

$$\langle f, i\delta \overline{N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \omega \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{f}, i\delta F(\overline{N_{\theta, \varepsilon, \delta}^{\bar{\beta}}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \omega) \rangle,$$

где преобразование Фурье $\widehat{f}$, понимаемое в смысле Φ' , совпадает с преобразованием Фурье в пространстве $L^{q'}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ (в соответствии с теоремой Хаусдорфа—Юнга).

Применяя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$|\langle \widehat{f}, i\delta F(\overline{N_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} W_{\frac{\varepsilon}{2}} \omega}) \rangle| \leq \delta \|\widehat{f}\|_{q'} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\varepsilon q |\xi|^2} |\widehat{\omega}(\xi)|^q}{|\widehat{m_{\theta}^{\overline{\beta}}}(\xi)|^{2q}} d\xi \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Заметим, что интеграл в правой части (17) конечен, так как $\widehat{\omega}(\xi) = 0$ в некоторой окрестности множества V .

Переходя в (17) к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получаем (16).

Из (15) и (16) следует, что

$$\langle M_{\theta}^{\overline{\beta}} T_{\theta}^{\overline{\beta}} f, \omega \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, W_{\varepsilon} \omega \rangle = \langle f, \omega \rangle. \quad (18)$$

Переходя к завершающему этапу доказательства, для заданной функции $\omega \in \mathcal{S}$ выберем последовательность $\{\omega_N\}$, $\omega_N \in \Phi_V$, такую, что $\widehat{\omega_N}(\xi)$ обращается в нуль в некоторой окрестности множества V и

$$\lim_{N \rightarrow \infty}^{(L^{q'})} \omega_N = \omega, \quad 1 < q \leq 2 \quad \text{и} \quad \lim_{N \rightarrow \infty}^{(C_0)} \omega_N = \omega$$

(возможность выбора такой последовательности доказана в [6, §3]).

Из (18) вытекает, что $\langle M_{\theta}^{\overline{\beta}} T_{\theta}^{\overline{\beta}} f, \omega_N \rangle = \langle f, \omega_N \rangle$. Переходя в этом равенстве к пределу при $N \rightarrow \infty$ на основании мажорантной теоремы Лебега, получаем $\langle f, \omega \rangle = \langle M_{\theta}^{\overline{\beta}} T_{\theta}^{\overline{\beta}} f, \omega \rangle$, $\omega \in \mathcal{S}$, откуда следует, что $f(x) = (M_{\theta}^{\overline{\beta}} T_{\theta}^{\overline{\beta}} f)(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

3. Обращение и описание потенциалов $M_{\theta}^{\overline{\beta}} \varphi$ с H^1 -плотностями. Обращение потенциала $f = M_{\theta}^{\overline{\beta}} \varphi$, $\varphi \in H^1$ в неэллиптическом случае будем строить в виде

$$T_{\theta}^{\overline{\beta}} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0}^{(H^1)(L^2)} T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}} f, \quad (19)$$

где $T_{\theta,\varepsilon,\delta}^{\overline{\beta}}$ определяется равенством (4).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\varphi \in H^1$. Тогда

$$M_{\theta}^{\overline{\beta}}(H^1) = \left\{ f \in H^1 : T_{\theta}^{\overline{\beta}} f \in H^1 \right\},$$

где $T_{\theta}^{\overline{\beta}}$ — оператор (19).

Доказательство теоремы 5 проводится по той же схеме, что и доказательство теорем 3 и 4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Strichartz R. S. Convolutions with kernels having singularities on a sphere // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970. Vol. 146. Pp. 461–471.

2. Гиль А. В., Ногин В. А. Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // *Владикавказ. матем. журн.*, 2010. Т. 12, № 3. С. 21–29. [Gil A. V., Nogin V. A. Estimates for some potential-type operators with oscillating symbols // *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2010. Vol. 12, no. 3. Pp. 21–29].
3. Гиль А. В., Ногин В. А. $H^p - H^q$ оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // *Изв. вузов. Сев.-Кав. регион*, 2010. № 5. С. 8–13. [Gil A. V., Nogin V. A. $H^p - H^q$ estimates for some potential-type operators with oscillating symbols // *Izv. vuzov. Sev.-Kav. Region*, 2010. no. 5. Pp. 8–13].
4. Гиль А. В., Задорожный А. И., Ногин В. А. Оценки для некоторых операторов свёртки с особенностями ядер на сферах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 17–23. [Gil A. V., Zadorozhnyi A. I., Nogin V. A. Estimates for some convolution operators with singularities of their kernels on spheres // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 2(23). Pp. 17–23].
5. Miyachi A. On some singular Fourier multipliers // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sect. 1 A, Math.*, 1981. Vol. 28, no. 2. Pp. 267–315.
6. Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1984. 208 с. [Samko S. G. Hypersingular integrals and their applications. Rostov-na-Donu: Izd-vo Rostov. Un-ta, 1984. 208 pp.]
7. Nogin V. A., Luzhetskaya P. A. Inversion and description of the ranges of multiplier operators of Strichartz–Peral–Miyachi-type // *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2000. Vol. 3, no. 1. Pp. 87–96.
8. Stein E. M. Harmonic Analysis: Real-variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton, NJ.: Princeton Univ. Press, 1993. 695 pp.

Поступила в редакцию 03/VIII/2011;
в окончательном варианте — 22/XI/2011.

MSC: 45E10; 35L05

INVERSION AND CHARACTERIZATION OF SOME POTENTIALS WITH THE DENSITIES IN L^p IN THE NON-ELLIPTIC CASE

A. V. Gil, A. I. Zadorozhnyi, V. A. Nogin

Southern Federal University,
Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Science,
8a, Mil'chakova str., Rostov-on-Don, 344090, Russia.

E-mails: gil-alexey@yandex.ru, simon@rsu.ru, vnogin@math.rsu.ru

We construct the inversion of generalized Strichartz potentials with singularities of the kernels on a finite union of spheres in $\mathbb{R}^n$ with densities from space L^p , $1 \leq p \leq 2$ and Hardy space H^1 in the non-elliptic case, when its symbols degenerate on a set of zero measure in $\mathbb{R}^n$. We also give the description of these potentials in terms of the inverting constructions.

Key words: convolution, oscillating symbol, multiplier, distribution.

Original article submitted 03/VIII/2011;
revision submitted 22/XI/2011.

Alexey V. Gil (Ph.D. (Phys. & Math.)), Senior Lecturer, Dept. of Differential and Integral Equations. Anatoliy I. Zadorozhnyi (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Differential and Integral Equations. Vladimir A. Nogin (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Differential and Integral Equations.