Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Заикина, Применение обобщённого интегрального преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 4(), 165–168

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1005>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:41:57

УДК 517.956.4

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. М. Заикина

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: svetzai@inbox.ru

Рассмотрены некоторые краевые задачи для уравнений параболического типа. Приведены применения обобщённых интегральных преобразований для решения поставленных задач.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, обобщённое интегральное преобразование Лапласа.

Изучение таких физических явлений, как теплопроводность, диффузия и других, приводит к уравнениям параболического типа [1]. Будем считать, что изучаемые физические процессы характеризуются функцией двух независимых переменных $u(x, t)$ — температурой линейного проводника тепла, зависящей от времени t и координаты x .

1. Рассмотрим однородное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a^2}{t^{m-1}} \frac{\partial u}{\partial t} + bu, \quad (1)$$

где $a, b, m \geq 1$ — вещественные константы.

ЗАДАЧА 1. Найти решение уравнения (1) в области $D : 0 < t < \infty, 0 < x < l$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x; +0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0, \quad 0 < x < l \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u(+0; t) &= \lim_{x \rightarrow +0} u(x, t) = a_0(t), \quad 0 < t < \infty, \\ u(l - 0; t) &= \lim_{x \rightarrow l-0} u(x, t) = a_1(t), \quad 0 < t < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Применим к обеим частям уравнения (1) обобщённое интегральное преобразование Лапласа

$$L_m \{u(x, t); s\} \equiv \int_0^\infty t^{m-1} \exp(-s^m t^m) u(x, t) dt,$$

которое при $m = 1$ совпадает с классическим преобразованием Лапласа [2]. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U''_{xx} - (a^2 m s^m + b)U = 0, \quad (4)$$

которое уже содержит в себе заданные начальные условия, поэтому они учитываются в дальнейшем автоматически. Здесь $U(x, s) = L_m \{u(x, t); x, s\}$.

Граничные условия (3) примут вид

$$U(+0; s) = A_0(s), \quad U(l - 0; s) = A_1(s), \quad (5)$$

Светлана Михайловна Заикина, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

где $A_0(s) = L_m \{a_0(t); s\}$, $A_1(s) = L_m \{a_1(t); s\}$.

Решая уравнение (4), получим общее решение в виде

$$U(x, s) = c_1 \exp(\sqrt{a^2 m s^m + b} x) + c_2 \exp(-\sqrt{a^2 m s^m + b} x), \quad (6)$$

если $a^2 m s^m + b > 0$.

Представим

$$U(x, s) = A_0(s)U_0(x, s) + A_1(s)U_1(x, s), \quad (7)$$

где $U_0(x, s)$ — частное решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $U_0(+0; s) = 1$, $U_0(l-0; s) = 0$, а $U_1(x, s)$ — частное решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $U_1(+0; s) = 0$, $U_1(l-0; s) = 1$. Тогда

$$U_0(x, s) = \frac{\operatorname{sh}(l-x)\sqrt{a^2 m s^m + b}}{\operatorname{sh} l \sqrt{a^2 m s^m + b}}, \quad U_1(x, s) = \frac{\operatorname{sh} x \sqrt{a^2 m s^m + b}}{\operatorname{sh} l \sqrt{a^2 m s^m + b}}.$$

Искомое решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям (5), будет иметь вид (7). Определим оригинал, соответствующий изображению $U(x, s)$.

Сначала рассмотрим предельный случай $l = \infty$. Тогда $U_1(x, s) = 0$, $U_0(x, s) = \exp(-x\sqrt{a^2 m s^m + b})$, т. е. $U(x, s) = A_0(s) \exp(-x\sqrt{a^2 m s^m + b})$.

Применяя формулу обращения для преобразования L_m [3], найдём оригинал

$$u(x, t) = \frac{m}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[A_0(s^{1/m}) \exp(-x\sqrt{a^2 m s^m + b}) \right] \exp(st^m) ds.$$

Если l — конечно, то применяя формулу обращения к (7), получим

$$u(x, t) = \frac{m}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[A_0(s^{1/m})U_0(x, s^{1/m}) + A_1(s^{1/m})U_1(x, s^{1/m}) \right] \exp(st^m) ds.$$

Единственность решения задачи доказывается методом от противного. Допустим, что существуют два решения уравнения (1): $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, которые удовлетворяют начальному условию (2) и граничным условиям (3). Тогда функция $z(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяет нулевому начальному условию и нулевым граничным условиям. Образ функции $z(x, t)$ будет удовлетворять уравнению (4) и нулевым условиям (5). Учитывая (6) и нулевые условия (5), получим $Z = 0$.

ЗАДАЧА 2. Найти решение уравнения (1) в области $D : 0 < t < \infty$, $0 < x < l$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x; +0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x), \quad 0 < x < l$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u(+0; t) &= \lim_{x \rightarrow +0} u(x, t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \\ u(l-0; t) &= \lim_{x \rightarrow l-0} u(x, t) = 0, \quad 0 < t < \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

После применения к уравнению (1) преобразования L_m получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение.

$$U''_{xx} - (a^2 m s^m + b) U(x, s) = -a^2 u_0(x). \quad (9)$$

Рассмотрим частный случай, когда $u_0(x) = \sin wx$. Тогда, решая уравнение (9), будем иметь

$$U(x, s) = c_1 \exp(x\sqrt{a^2 m s^m + b}) + c_2 (-x\sqrt{a^2 m s^m + b}) + \frac{a^2}{w^2 + a^2 m s^m + b} \sin wx.$$

Граничные условия (8) примут вид

$$U(+0; s) = 0, \quad U(l - 0; t) = 0, \quad (10)$$

и частным решением уравнения (9), удовлетворяющим условиям (10), будет

$$U(x, s) = -\frac{a^2 \sin wl}{2(w^2 + a^2 ms^m + b) \operatorname{sh} l \sqrt{a^2 ms^m + b}} \exp(x \sqrt{a^2 ms^m + b}) + \\ + \frac{a^2 \sin wl}{2(w^2 + a^2 ms^m + b) \operatorname{sh} l \sqrt{a^2 ms^m + b}} \exp(-x \sqrt{a^2 ms^m + b}) + \frac{a^2 \sin wl}{w^2 + a^2 ms^m + b}.$$

Тогда оригинал

$$u(x, t) = \frac{m}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[-\frac{a^2 \sin wl}{2(w^2 + a^2 ms + b) \operatorname{sh} l \sqrt{a^2 ms + b}} \exp(x \sqrt{a^2 ms + b}) + \right. \\ \left. + \frac{a^2 \sin wl}{2(w^2 + a^2 ms + b) \operatorname{sh} l \sqrt{a^2 ms + b}} \exp(-x \sqrt{a^2 ms + b}) + \frac{a^2 \sin wl}{w^2 + a^2 ms + b} \right] \exp(st^m) ds.$$

Можно показать, что $\lim_{t \rightarrow 0} u(x; t) = \lim_{s \rightarrow \infty} ms^m U(x; s) = u_0(x) = \sin wx$. Действительно [3], $\lim_{t \rightarrow 0} u(x; t) = \lim_{s \rightarrow \infty} ms^m U(x; s)$, если $0 < x < l$. Вычислим

$$\lim_{s \rightarrow \infty} ms^m U(x; s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin wl \exp(x \sqrt{a^2 ms^m + b})}{\exp(l \sqrt{a^2 ms^m + b}) - \exp(-l \sqrt{a^2 ms^m + b})} + \sin wx \right] = \\ = \sin wl \lim_{s \rightarrow \infty} \exp\left(s^{m/2} \sqrt{a^m + b/s^m} (x - l)\right) + \sin wx = \sin wx.$$

Аналогично можно рассмотреть и другие частные случаи: когда $u_0(x) = cx + d$ и $u_0(x) = \exp \alpha x$. Здесь c, d, a — вещественные константы.

2. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение параболического типа

$$t^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} + bt^{m-1} u + f(x, t), \quad (11)$$

где a, b — вещественные константы.

ЗАДАЧА 3. Найти решение уравнения (11) в области $D_1 : x > 0, t > 0$, удовлетворяющее начальному условию $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0$ и граничному условию

$$u(+0; t) = \lim_{x \rightarrow +0} u(x, t) = A_0, \quad A_0 = \text{const}, \quad t > 0. \quad (12)$$

Рассмотрим случай, когда $f(x, t) = cxt^\alpha$ (c, α — вещественные константы). Применяя к (11) преобразование L_m , получим

$$U''_{xx} - (a^2 ms^m + b)U = c \frac{\Gamma(\alpha/m + 1)x}{ms^{m+\alpha}}. \quad (13)$$

Решая обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение (13), получим

$$U(x, s) = c_1 \exp(\sqrt{a^2 ms^m + bx}) + c_2 \exp(-\sqrt{a^2 ms^m + bx}) - \frac{c \Gamma(\alpha/m + 1)x}{ms^{m+\alpha} (a^2 ms^m + b)}.$$

Граничное условие (12) для изображения примет вид

$$U(0, s) = A_0 / (ms^m). \quad (14)$$

Учитывая (14) и равенство $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{s \rightarrow \infty} ms^m U(x, s) = 0$, получим

$$U(x, s) = \frac{A_0}{ms^m} \exp(-\sqrt{a^2 ms^m + bx}) - \frac{c\Gamma(\alpha/m + 1)x}{ms^{m+\alpha}(a^2 ms^m + b)} x.$$

Применяя формулу обращения для L_m , находим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[\frac{A_0}{s} \exp(-\sqrt{a^2 ms + bx}) - \frac{c\Gamma(\alpha/m + 1)}{s^{(m+\alpha)/m}(a^2 ms + b)} x \right] \exp(st^m) ds.$$

Единственность решения задачи доказывается методом от противного.

Аналогично можно рассмотреть задачи и с другими граничными условиями: $u(+0; t) = A_0 \exp(-\beta t^m)$, $u(+0; t) = A_0 \sin wt^m$, $u(+0; t) = A_0 \cos wt^m$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-97021-р-поволжье-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с. [Tihonov A. N.; Samarskiy A. A. The equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1972. 735 pp.]
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.; англ. пер.: Ditkin V. A., Prudnikov A. P. Integral Transforms and Operational Calculus. Oxford: Pergamon Press, 1965. 529 pp.
3. Репин О. А., Заикина С. М. Некоторые новые обобщенные интегральные преобразования и их применение в теории дифференциальных уравнений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2011. № 2(23). С. 8–16. [Repin O. A., Zaikina S. M. Some new generalized integral transformations and their application in differential equations theory // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2011. no. 2(23). Pp. 8–16].

Поступила в редакцию 13/X/2011;
в окончательном варианте — 26/XI/2011.

MSC: 35A22; 44A10, 35K55

APPLICATION OF THE GENERALIZED INTEGRAL LAPLACE TRANSFORM TO SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS

S. M. Zaikina

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.
E-mail: svetzai@inbox.ru

We consider some boundary value problems for parabolic equations. The solutions were obtained with the generalized Laplace integral transform.

Key words: differential equations, generalized Laplace integral transform.

Original article submitted 13/X/2011;
revision submitted 26/XI/2011.

Svetlana M. Zaikina, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.