Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Ильина, Л. А. Сараев, Математическая модель изотермического фазового превращения в матрице двухкомпонентного композиционного материала, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 81–83

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:20:46

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ В МАТРИЦЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Предложена математическая модель фазового перехода в двухкомпонентном случайно-неоднородном композиционном материале. Согласно этой модели новая фаза с новыми механическими свойствами образуется и вырастает из составляющих компонентов композита под воздействием внешних нагрузок. При этом в новой фазе возникают и развиваются ограниченные остаточные структурные деформации. Статистическое осреднение стохастической системы уравнений равновесия позволяет установить макроскопические определяющие уравнения нестационарной среды и вычислить ее эффективные характеристики.

Пусть двухкомпонентный композиционный материал занимает объем V , ограниченный поверхностью S . Первый компонент V_1 образует связующую матрицу, второй компонент V_2 представляет собой отдельные включения сферической формы. Фазовый переход первого рода происходит в объеме матрицы V_1 . Объем зарождающейся и развивающейся новой фазы внутри включений обозначим V_p , объем старой фазы – V_q ($V_p + V_q = V_1$). При фазовом превращении ($V_p \rightarrow V_1$) в материале новой фазы под воздействием внешних нагрузок возникают и развиваются необратимые структурные деформации $a_{ij}(\mathbf{r})$, вызванные перестройкой кристаллической и доменной структуры материала. Эти деформации являются ограниченными предельными сдвигами двойниковых доменов $0 \leq \sqrt{a_{ij} a_{ij}} \leq a_{\max}$, где $a_{\max}$ – известный максимальный уровень структурных деформаций. Закон Гука такой среды имеет вид

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2m_1 e_{ij} + d_{ij} l_1 e_{pp}, & \mathbf{r} \in V_q; \\ s_{ij} &= 2m_2 e_{ij} + d_{ij} l_2 e_{pp}, & \mathbf{r} \in V_2; \\ s_{ij} &= 2m_p (e_{ij} - a_{ij}) + d_{ij} l_p e_{pp}, & \mathbf{r} \in V_p. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь s_{ij}, e_{ij} – тензоры напряжений и полных деформаций; m_s, l_s ($s=1, 2, p$) – параметры Ламе компонентов.

В качестве условий фазовых переходов второго компонента в первый и обратно принимаются поверхности нагружения

$$\begin{aligned} (s_{ij} - 2n_+)(s_{ij} - 2n_+) &= k_+^2 \quad (V_p \rightarrow V_1); \\ (s_{ij} - 2n_-)(s_{ij} - 2n_-) &= k_-^2 \quad (V_q \rightarrow V_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $k_{+,-}$ – пределы прямого и обратного фазовых переходов, соответственно; $n_{+,-}$ – коэффициенты линейного упрочнения, характеризующие скорость перемещения поверхностей (2) в шестимерном пространстве напряжений. Экспериментальные наблюдения показывают, что эти пределы зависят от температуры и их значения определяют тип поведения нестационарной среды (сверхупругость, эффект «памяти формы» или обычное пластическое течение).

Геометрические особенности такой фазовой структуры описываются набором случайных изотропных индикаторных функций координат:

$$k_2(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_1 \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_1 \end{cases}, k_p(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_p \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_p \end{cases}, k_q(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_q \\ 0, & \mathbf{r} \notin V_q \end{cases}.$$

С помощью этой функции локальный закон Гука для среды записывается в виде

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{r}) &= 2(m_1 + (m_2 - m_1)k_2(\mathbf{r}) + (m_p - m_1)k_p(\mathbf{r}))e_{ij}(\mathbf{r}) - 2m_p k_p(\mathbf{r})a_{ij}(\mathbf{r}); \\ s_{pp}(\mathbf{r}) &= 3(K_1 + (K_2 - K_1)k_2(\mathbf{r}) + (K_p - K_1)k_p(\mathbf{r}))e_{pp}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $s_{ij} = s_{pp} - \frac{1}{3}d_{ij} \cdot s_{ij}$; $e_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}s_{ij}e_{pp}$; $K_s = \frac{2}{3}m_s + l_s$; фигурными скобками обозначены разрывы величин при переходе фазовой границы. Структурные деформации удовлетворяют условию несжимаемости $a_{pp}(\mathbf{r}) = 0$.

Индикаторные функции, напряжения, полные и структурные деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими полями, поэтому их математические ожидания совпадают со средними значениями по полному объему V и объемам фаз V_s [1]:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \langle f \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (s=1, 2, p, q).$$

Угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Для установления макроскопических определяющих уравнений материала и вычисления его эффективных характеристик необходимо усреднить по полному объему V локальный закон Гука (3):

$$\begin{aligned} \langle s_{ij} \rangle &= 2 m_1 \langle e_{ij} \rangle + 2(m_2 - m_1) c_2 \langle e_{ij} \rangle_2 + 2(m_p - m_1) c_p \langle e_{ij} \rangle_p - 2 m_p c_p \langle a_{ij} \rangle_p; \\ \langle s_{kk} \rangle &= 3 K_1 \langle e_{kk} \rangle + 3(K_2 - K_1) c_2 \langle e_{kk} \rangle_2 + 3(K_p - K_1) c_p \langle e_{kk} \rangle_p. \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим величины $\langle e_{ij} \rangle_s$ через $\langle e_{ij} \rangle$. Для этого усредним систему интегральных уравнений равновесия, ядрами которой являются вторые производные тензора Грина [2]:

$$e'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{G}_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) t'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \quad (5)$$

Здесь штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V .

Умножая уравнения (5) на $\mathbf{k}'_s(\mathbf{r})$, усредняя их затем по объему V , принимая во внимание изотропность структуры композита и используя известное соотношение $\langle f \rangle_s = \langle f \rangle + c_s^{-1} \langle \mathbf{k}'_s f' \rangle$, находим [2]:

$$\begin{aligned} \langle e_{ij} \rangle_{p,2} &= \frac{a_{p,2}}{\Delta} \left(b_{p,2} \langle e_{ij} \rangle + d_{p,2} \langle a_{ij} \rangle_p \right), \\ \langle e_{kk} \rangle_{p,2} &= \frac{w_{p,2} h_{p,2}}{\Lambda} \langle e_{kk} \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_p &= (1 + a_1 (m_p - 1)(1 - c_p))^{-1}, \quad a_2 = (1 + a_1 (m_2 - 1)(1 - c_2))^{-1}; \\ w_p &= (1 + g_1 (q_p - 1)(1 - c_p))^{-1}, \quad w_2 = (1 + g_1 (q_2 - 1)(1 - c_2))^{-1}; \\ b_p &= 1 + a_1 c_2 (m_2 - 1) a_2, \quad b_2 = 1 + a_1 c_p (m_p - 1) a_p; \\ h_p &= 1 + g_1 c_2 (q_2 - 1) w_2, \quad h_2 = 1 + g_1 c_p (q_p - 1) w_p; \\ d_p &= a_1 m_p (1 - c_p) - a_1^2 c_p c_2 m_p (m_2 - 1) a_2; \\ d_2 &= -a_1 m_p c_p + a_1^2 c_p (1 - c_p) m_p (m_p - 1) a_p; \\ a_1 &= \frac{2}{15} \cdot \frac{4 - 5n_1}{1 - n_1}, \quad g_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + n_1}{1 - n_1}, \quad n_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3K_1 - 2m_1}{3K_1 + 2m_1}; \\ m_s &= \frac{m_s}{m_1}, \quad q_s = \frac{K_s}{K_1}, \quad c_s = \frac{V_s}{V}. \end{aligned}$$

Подстановка формул (6) в соотношения (4) дает макроскопический закон Гука рассматриваемой микронеоднородной среды:

$$\langle s_{ij} \rangle = 2 m^* \langle e_{ij} \rangle - 2 m^a \langle a_{ij} \rangle_p, \quad \langle s_{kk} \rangle = 3 K^* \langle e_{kk} \rangle. \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} m^* &= m_1 \left(1 + \frac{(m_2 - 1) c_2 a_2 b_2 + (m_p - 1) c_p a_p b_p}{\Delta} \right), \quad K^* = K_1 \left(1 + \frac{(q_2 - 1) c_2 w_2 h_2 + (m_p - 1) c_p w_p h_p}{\Delta} \right); \\ m^a &= m_1 \left(c_p m_p - \frac{(m_2 - 1) c_2 a_2 d_2 + (m_p - 1) c_p a_p d_p}{\Delta} \right). \end{aligned}$$

Звездочкой обозначены эффективные модули упругости микронеоднородной среды [2].

Для определения макроскопических условий прямого и обратного фазовых превращений в рассматриваемой среде и закона ее деформирования необходимо усреднить соотношения (2) по объему новой фазы V_2 :

$$\langle s_{ij} - 2n_{+,-} a_{ij} \rangle_p \langle s_{ij} - 2n_{+,-} a_{ij} \rangle_p = k_{+,-}^2. \quad (8)$$

Постановка в условие (8) локального закона Гука (3) и применение правила механического смешивания дают макроскопические поверхности нагружения

$$\left(\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p \right) \left(\langle s_{ij} \rangle - 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p \right) = k_{+,-}^{*2} \quad (9)$$

и ассоциированный с ней закон деформирования

$$\langle s_{ij} \rangle = k_{+,-}^* n_{ij} + 2n_{+,-}^* \langle a_{ij} \rangle_p, \quad n_{ij} = \frac{\langle \dot{a}_{ij} \rangle}{\sqrt{\langle \dot{a}_{kl} \rangle \langle \dot{a}_{kl} \rangle}}. \quad (10)$$

Здесь $k_{+,-}^* = k_{+,-} \frac{m^* \Delta}{m_p a_p b_p}$ – эффективный начальный предел фазового перехода,

$n_{+,-}^* = \frac{k_{+,-}}{k_{+,-}^*} \left(n_{+,-} + m_p \left(1 - a_p \frac{b_p m^a + d_p m^*}{m^* \Delta} \right) \right)$ – эффективный коэффициент упрочнения, характе-

ризующий скорость перемещения поверхности (9) в шестимерном пространстве макронапряжений. Уравнения (10) описывают нелинейное деформирование среды при фазовом превращении. Структурные средние деформации $\langle a_{ij} \rangle_p$ необходимо выразить через объемное содержание новой фазы c_p и величину $a_{\max}$.

В одномерном случае уровень структурной деформации определяется разностью векторов Бюргерса старой и новой фазы – $(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)$ и числом ячеек кристаллической решетки N , подвергнутых деформированию и фазовому превращению – $\mathbf{a} = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)N$. В свою очередь N пропорционально объему новой фазы или ее объемному содержанию. В трехмерном случае для средних величин получаем $\langle a_{ij} \rangle_p = c_p a_{\max} n_{ij}$. Тогда соотношение (10) принимает вид

$$\langle s_{ij} \rangle = (k_{+,-}^* + 2n_{+,-}^* c_p a_{\max}) n_{ij}. \quad (11)$$

Таким образом, в настоящей работе получены определяющие уравнения нестабильной среды и приведены ее эффективные характеристики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
2. Сараев Л.А., Фартушинова Е.А. Уравнения изотермических фазовых превращений в твердых телах с микроструктурой // Фазовые превращения в твердых растворах и сплавах: Тр. Второго междунар. симп. (ОМА–II). Сочи, 2001. С. 289-292.