Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Беляева, К. П. Кузнецов, Анализ нелинейной динамической модели течения Куэтта структурированной жидкости в плоском зазоре, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 2(), 85–92

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1018>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:25:10

Математическое моделирование

УДК 519.635.4:532.135

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА СТРУКТУРИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ЗАЗОРЕ

Н. А. Беляева, К. П. Кузнецов

Сыктывкарский государственный университет,
Россия, 167000, Сыктывкар, Октябрьский пр., 55.

E-mails: belyayevana@mail.ru, kuznetsovkp@sptrace.ru

Представлено исследование по параметру стационарного течения Куэтта структурированной жидкости в плоском зазоре. Определены условия бифуркации устойчивых неоднородных состояний из неустойчивых однородных в области немонотонности реологической кривой течения. Построены соответствующие бифуркационные диаграммы. Отмечается качественное соответствие установившегося решения задачи с решением нестационарной задачи.

Ключевые слова: *структурированная жидкость, течение Куэтта, область немонотонности реологической кривой, исследование по параметру, бифуркация.*

Экспериментально факт существования области немонотонности реологической кривой течения неньютоновских жидкостей установлен достаточно давно [1] и подтвержден работами [2, 3]. Однако теоретических исследований указанной области проведено недостаточно.

В работах [4–6] исследовано течение Куэтта структурированной жидкости в плоском зазоре: построены реологические кривые течения в зависимости от характерного параметра жидкости, однородные стационарные течения в области немонотонности реологической кривой — области «сверханомалии вязкости», ответственной за процессы самоорганизации при течении структурированных жидкостей. Аналитически доказано, что вследствие потери устойчивости однородного стационарного состояния псевдопластической жидкости в указанной области должна формироваться диссипативная структура — устойчивое неоднородное состояние. В работах [7–9] продолжены эти исследования: численно построена диссипативная структура — монотонно возрастающее или монотонно убывающее устойчивое неоднородное состояние. Методом бифуркационного анализа аналогичная структура подтверждена работами [10–12]. Здесь же методом параметрического анализа предложено решение обратной задачи — определение значений параметров жидкости, отвечающих за возникновение области сверханомалии. В настоящей работе продолжены указанные исследования.

Надежда Александровна Беляева (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математического моделирования и кибернетики. Константин Петрович Кузнецов, аспирант, каф. математического моделирования и кибернетики.

Пусть структурированная вязкая несжимаемая жидкость заполняет полосу между плоскостями $\xi = 0$ и $\xi = h$, а её течение происходит в направлении оси η и вызывается движением плоскости $\xi = h$. Обозначим через $\vec{u}$ — вектор скорости жидкости в произвольной точке полосы в момент времени t , тогда $\vec{u} = (0, u_\eta, 0)$, причём $u_\eta = u(\xi, t)$. Будем предполагать, что жидкость является смесью двух компонент A_1 и A_2 , которые под действием приложенного механического поля, характеризуемого напряжением σ и скоростью деформации $\gamma = \partial u / \partial \xi$, могут взаимно превращаться друг в друга. Суммарная скорость превращения определяется соотношением:

$$\Phi(a, \gamma) = k_2(1 - a) - ak_0 \exp(p_0\sigma + q_0\gamma^2), \quad (1)$$

где a — степень структурных превращений (доля A_1 в смеси A_1 и A_2); k_0, k_2, p, q — параметры жидкости. Будем предполагать, что жидкость подчиняется реологическому уравнению состояния вида

$$\sigma = \mu\gamma, \quad (2)$$

где вязкость $\mu = \mu(a)$ задаётся соотношением

$$\mu^{-1}(a) = \mu_1^{-1}a + \mu_2^{-1}(1 - a).$$

Здесь μ_1, μ_2 — вязкости компонент A_1 и A_2 соответственно.

Замкнутая система уравнений, описывающая течение и превращение рассматриваемой жидкости, имеет вид [6, 9]:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu(a) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial a}{\partial t} = D \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \Phi(a, \gamma). \end{cases} \quad (3)$$

Первое уравнение системы (3) — уравнение движения, второе — диффузионно-кинетическое уравнение относительно степени структурных превращений a ; ρ — плотность, D — коэффициент диффузии. Начальные и граничные условия рассматриваемой задачи:

$$t = 0 : \quad a|_{0 \leq \xi \leq h} = a^0, \quad u|_{0 \leq \xi \leq h} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial a}{\partial \xi} \Big|_{\xi=h} = 0, \quad u_{\xi=0} = 0, \quad u|_{\xi=h} = u_0, \quad u_0 > 0. \quad (5)$$

Рассмотрим стационарные решения модели (3)–(5). Выразим из первого уравнения системы (3) стационарную скорость деформации:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{c}{\mu(a)}, \quad c = \text{const},$$

и подставим во второе уравнение с учётом выражений (1), (2). Получим одно дифференциальное уравнение второго порядка:

$$D \frac{d^2 a}{d\xi^2} + k_2 \left(1 - a - a \frac{k_0}{k_2} \exp(p_0 c + q_0 c^2 \mu(a)^{-2}) \right) = 0. \quad (6)$$

Введём безразмерные переменные и параметры:

$$r = \frac{\xi}{h}, \quad L = \frac{k_2 h^2}{D}, \quad \chi = \frac{k_0}{k_2}, \quad y = p_0 c, \quad \delta = \frac{q_0}{\mu_2^2 p_0^2}, \quad \lambda = \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1.$$

Тогда из соотношения (6) с учётом граничных условий (5) получим безразмерную краевую задачу относительно степени структурных превращений:

$$\frac{d^2 a}{dr^2} = -L \left[1 - a - a\chi \exp \left(y + \delta y^2 (1 + \lambda a)^2 \right) \right], \quad (7)$$

$$\left. \frac{da}{dr} \right|_{r=0} = \left. \frac{da}{dr} \right|_{r=1} = 0. \quad (8)$$

Введём функцию

$$F(a, y, \delta, \chi) = 1 - a - a\chi \exp \left(y + \delta y^2 (1 + \lambda a)^2 \right),$$

зависящую от параметров y, δ, χ . Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{d^2 a}{dr^2} = -LF(a, y, \delta, \chi). \quad (9)$$

В работе [12] исследовано поведение однородных стационарных решений задачи в зависимости от параметра y : определены значения параметров, при которых существует две точки поворота, разделяющие области с одним и тремя однородными решениями задачи (7), (8). При этом множество значений параметра y , задающих три решения, соответствует области «сверханомалии вязкости» на реологической кривой. Отметим, что возникающие бифуркации по параметру y не нарушают пространственной однородности. Кроме того, они не зависят от параметра L . Таким образом, задача (7), (8) обладает несколькими тривиальными решениями (т. е. однородными решениями, не зависящими от параметра L). Исследуем поведение решений уравнения (9) в указанной области немонотонности реологической кривой в зависимости от значений параметра L .

В данной работе рассмотрены бифуркации тривиальных решений, нарушающие пространственную однородность, — первичные бифуркации. Вещественная бифуркация находится из условия обращения в ноль собственного значения оператора задачи (9), линеаризованного на постоянном решении a_0 при граничных условиях (8):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(a_0, L)z &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + Lf(a_0)z, \\ f(a_0) &= \left. \frac{\partial F}{\partial a} \right|_{a=a_0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение

$$\mathfrak{L}(a_0, L)z = 0$$

имеет невырожденные решения только в случае, если $f(a_0) > 0$. Последнее условие выполняется, когда однородное решение a_0 является средним (из

трёх) решением в области «сверханомалии»; оно лежит на убывающем участке кривой течения [6]. Получаем бифуркационную длину $L_*^{(n)} = \pi^2 n^2 / f(a_0)$. Величину $L_*^{(1)}$ называют элементарной бифуркационной длиной; остальные бифуркационные длины оказываются кратными элементарным бифуркационным длинам.

Рассмотрим устойчивость тривиального решения a_0 в зависимости от величины параметра L . Если все собственные числа линейного оператора (10) лежат в левой (комплексной) полуплоскости, то тривиальное решение устойчиво, что достигается в случае $L < \pi^2 / f(a_0)$. Таким образом, при переходе через $L_* = \pi^2 / f(a_0)$ положение равновесия a_0 теряет устойчивость, и вследствие бифуркации возникают неоднородные решения. В [12] показано, что бифуркация в точке L_* суперкритическая: неоднородное решение вблизи точки бифуркации существует для значений $L > L_*$.

Для построения фазовой диаграммы — зависимости решений от параметра L , воспользуемся методом отображения параметра [13]. Построим зависимость решения задачи (7), (8) от параметра $l : l^2 = L$. Введём новую независимую переменную $z = rl$. Тогда дифференциальное уравнение (7) запишется так:

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = -1 + a + a\chi \exp(y + \delta y^2(1 + \lambda a)^2) \quad (11)$$

и оно не будет содержать параметр L . Граничные условия (8) приобретут вид

$$\left. \frac{da}{dz} \right|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{da}{dz} \right|_{z=l} = 0.$$

Выберем недостающее начальное условие следующим образом:

$$a(0) = \eta, \quad 0 < \eta < 1, \quad (12)$$

и проинтегрируем полученную задачу Коши (11), (12), используя метод Рунге—Кутты четвёртого порядка [14], от $z = 0$ до точки $z = z_1$, в которой

$$\left. \frac{da}{dz} \right|_{z=z_1} = 0.$$

Значение z_1 определяет значение параметра l , соответствующее выбранному начальному условию (12) (и найденному решению $a(z)$):

$$z_1 = l. \quad (13)$$

Для выполнения равенства (13) воспользуемся итерационным методом последовательных приближений: если в процессе интегрирования знак производной $a'(z_i)$ меняется на противоположный, возвращаемся на один шаг назад и продолжаем интегрирование с шагом, уменьшенным вдвое. По достижении заданной точности решения, т. е. $|a'(z_i)| \leq 0,0001$, процесс прекращается. Полученные таким образом значения l для последовательности значений η приведены в таблице. Из этих данных видно, что при значении $y = 7$ для определённого интервала значений l (например, для $l = 0,4$) существует два решения (неоднородных) исходной краевой задачи (7), (8).

η	0,1	0,15	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9
$y = 6,5$	4,62	4	4,36	*	*	*	*	*	*	*
$y = 7$	*	*	*	4,79	3,34	4	5,19	6,15	7,51	13,25
$y = 7,5$	*	*	*	*	*	*	14,13	12,96	15,28	*

Примечание: (*) отмечены случаи расхождения итерационного процесса

Если продолжить полученные координаты точек поворота L_* в зависимости от параметра y , то получим соответствующую бифуркационную диаграмму (рис. 1). Заметим, что кривая $L(y)$ ограничена асимптотами, соответствующими точкам поворота по параметру y .

Варьируя параметр y и учитывая возникающие бифуркации, можно описать следующую бифуркационную картину для рассматриваемой задачи. При пересечении параметром y критических значений, соответствующих точкам поворота, происходит жесткая бифуркация — скачкообразный переход с одной ветви решения на другую — тривиального решения с появлением (или исчезновением) пары нетривиальных однородных решений, причём все решения устойчивы. Для случая существования трех решений, если значение параметра L превышает элементарную бифуркационную длину L_* , наблюдается мягкая бифуркация — суперкритическая «вилка» [15]: одно из положений равновесия (среднее решение $a = a_2$) теряет устойчивость и из него рождается одно неустойчивое и пара расходящихся устойчивых нетривиальных пространственно-неоднородных решений (рис. 2), переход к которым от однородного решения осуществляется плавно и непрерывно.

Для нахождения данных решений воспользуемся методом стрельбы [13], который заключается в сведении исходной краевой задачи к задаче Коши. Для этого необходимо в некоторой точке задать два начальных условия. Воспользуемся тем, что в точке $r = 0$ уже имеется одно условие, а именно —

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма. Сплошной линией отмечена кривая кратности; штриховой — асимптоты: $y_1 = 6,468$, $y_2 = 7,794$ ($\lambda = -0,7$, $\chi = 10^{-5}$)

Рис. 2. Диаграмма стационарных решений. Сплошной линией отмечены устойчивые решения, штриховой — неустойчивые; кружком отмечена точка бифуркации $l = \sqrt{L_*}$ ($y = 7$, $\lambda = -0,7$, $\chi = 10^{-5}$)

условие (8), и выберем дополнительное условие вида

$$a(0) = \eta. \quad (14)$$

Полученную задачу Коши на промежутке от $r = 0$ до $r = 1$ будем решать с помощью метода Рунге—Кутты четвертого порядка, предварительно преобразовав (7) в систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} w' = -LF(a), \\ a' = w. \end{cases}$$

Начальные условия (8) и (14) преобразуются к виду $a(0) = \eta$, $w(0) = 0$. По окончании интегрирования, т. е. в точке $r = 1$, получаем значения решения, зависящие от выбора условия (14): $a(1, \eta)$, $w(1, \eta)$. Для того чтобы найденное решение задачи Коши было одновременно и решением исходной краевой задачи, необходимо удовлетворить условиям (8):

$$F_1(\eta) = a'(1, \eta) = 0. \quad (15)$$

Рис. 3. Пары неоднородных стационарных решений при различных значениях параметра L . Сплошная линия соответствует $L = 9$; штриховая — $L = 4$; пунктирная — неустойчивое однородное тривиальное решение $a_2 = 0,422$ ($\lambda = -0,7$, $\chi = 10^{-5}$)

Соотношение (15) представляет собой нелинейное уравнение относительно неизвестной η , которое будем решать, используя метод Ньютона. Для вычисления производной $dF_1/d\eta$ воспользуемся уравнением в вариациях относительно переменной

$$p_a = \frac{\partial a}{\partial \eta},$$

которое получается посредством дифференцирования исходного уравнения (9) по η и перестановки дифференцирования по r и η :

$$p_a'' + L \frac{\partial F}{\partial a} p_a = 0. \quad (16)$$

Начальные условия для варьируемой переменной получаются в результате дифференцирования исходных начальных условий (8), (14) по η :

$$p_a(0) = 1, \quad p_a'(0) = 0. \quad (17)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (16) вместе с уравнением (8) и начальными условиями (8), (14), (17), в точке $r = 1$ получим

$$\frac{\partial F_1}{\partial \eta} = p_a'(1).$$

Как видно из рис. 3, пространственные профили полученных решений (при фиксированных значениях параметров) являются взаимно симметричными, т. е. при произвольном $r \in [0, 1]$ выполняется $a^1(r) = a^2(1 - r)$, где

верхний индекс определяет ветвь решений. Проведенное в [9, 12] численное моделирование исходной задачи (3)–(5) и последующий анализ пространственно-временного распределения показали установление пространственно-неоднородного течения жидкости — диссипативной структуры вне зависимости от начального условия. Установившиеся решения качественно не отличаются от решений стационарной задачи: они представляют собой монотонно убывающую или возрастающую зависимость $a = a(\xi)$. Кроме того, они также являются симметричными друг относительно друга.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (гос. контракт № 02.740.11.0618).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bulgin D., Wratten R.* Measurements of steady flow characteristics of rubber at high rates of shear / In: *Proceedings of the Second international Congress of Rheology*; ed. V. Q. W. Harrison. London, 1954.
2. *Белкин И. М., Виноградов Г. В., Леонов А. И.* Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико-механических характеристик материалов. М.: Машиностроение, 1968. 272 с. [*Belkin I. M., Vinogradov G. V., Leonov A. I.* Rotary Instruments. Measurement of Viscosity and Physicomechanical Characteristics of Materials. Moscow: Mashinostroyeniye, 1968. 272 pp.]
3. *Лифшиц А. Е., Рыбников Г. Л.* Диссипативные структуры и течение Куэтта неньютоновской жидкости // *ДАН СССР*, 1985. Т. 281, № 5. С. 1088–1093. [*Lifshits A. E., Rybnikov G. L.* Dissipative structures and Couette flow of a non-Newtonian fluid // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1985. Vol. 281, no. 5. Pp. 1088–1093].
4. *Бучацкий Л. М., Манелис Г. Б., Столин А. М., Худяев С. И.* К теории процессов структурных превращений в текучих системах // *Инж.-физ. ж.*, 1981. Т. 41, № 6. С. 1032–1039; англ. пер.: *Buchatskii L. M., Manelis G. B., Stolin A. M., Khudyaev S. I.* Theory of structural transformations in flowing systems // *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 1981. Vol. 41, no. 6. Pp. 1321–1327.
5. *Столин А. М., Худяев С. И.* Образование пространственно-неоднородных состояний структурированной жидкости в области сверханомалии вязкости // *ДАН СССР*, 1981. Т. 260, № 5. С. 1180–1184. [*Stolin A. M., Khudyaev S. I.* Formation of spatially inhomogeneous states of a structured fluid accompanying a superanomaly in the viscosity // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1981. Vol. 260, no. 5. Pp. 1180–1184].
6. *Худяев С. И., Ушаковский О. В.* Пространственная неоднородность и автоколебания при течении структурированной жидкости // *Матем. моделирование*, 2002. Т. 14, № 7. С. 53–73. [*Khudyaev S. I., Ushakovskiy O. V.* Space nonuniformity and auto-oscillations in the structured liquid flow // *Matem. Mod.*, 2002. Vol. 14, no. 7. Pp. 53–73].
7. *Беляева Н. А.* Пространственно-неоднородные течения структурированной жидкости в плоском зазоре / В сб.: *Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела*: Тр. научн. школы акад. В. В. Новожилова. Вып. 8. СПб.: СПбГУ, 2005. С. 151–156. [*Belyaeva N. A.* Spatially inhomogeneous flow of structured liquid in a flat gap / In: *Nonlinear Problems in Mechanics and Physics of Deformable Solid Body*. Issue 8. St. Petersburg: SPbGU, 2005. Pp. 151–156].
8. *Беляева Н. А., Худяев С. И., Горст Д. Л.* Неоднородное течение Куэтта структурированной жидкости // *Вестн. Сыктывк. ун-та. Сер. 1*, 2003. № 5. С. 43–48. [*Belyaeva N. A., Khudyaev S. I., Gorst D. L.* The inhomogeneous Couette flow of structured liquid // *Vestn. Syktyvk. Un-ta. Ser. 1*, 2003. no. 5. Pp. 43–48].
9. *Belyaeva N. A.* Deformation of viscoelastic structured systems (Russian). Germany: Lambert Academic Publishing, 2011. 200 pp.
10. *Беляева Н. А., Кузнецов К. П.* Бифуркационный анализ куэттовского течения структурированной жидкости в области сверханомалии / В сб.: *Вторая Второй междуна-*

- родная конференция «Математическая физика и ее приложения»: Материалы Межд. конф.; ред. И. В. Волович, Ю. Н. Радаев. Самара: Книга, 2010. С. 51–52. [Belyaeva N. A., Kuznetsov K. P. Bifurcation analysis of Couette flow of structured liquid accompanying a superanomaly / In: *The 2nd International Conference “Mathematical Physics and its Applications”*: Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich and Yu. N. Radayev. Samara: Kniga, 2010. Pp. 51–52].
11. Кузнецов К. П. Бифуркация стационарных неоднородных структур в области сверханомалии куэттовского течения структурированной жидкости в плоском зазоре: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2011/1175/7525_0b4f.pdf. [Kuznetsov K. P. Bifurcation of stationary inhomogeneous structures in a superanomaly domain of Couette flow of structured liquid in a flat gap].
 12. Кузнецов К. П., Беляева Н. А. Диссипативная структура и область сверханомалии куэттовского течения структурированной жидкости в плоском зазоре // *Вестн. Сыктывк. ун-та. Сер. 1*, 2011. № 13. С. 61–74. [Kuznetsov K. P., Belyaeva N. A. The dissipative structure and superanomaly domain of of Couette flow of structured liquid in a flat gap // *Vestn. Syktyvk. Un-ta. Ser. 1*, 2011. no. 13. Pp. 61–74].
 13. Holodniok M., Klíč A., Kubíček M., Marek M. *Methods of Analysis of Nonlinear Dynamical Models* (Czech). Prague: Academia, 1986; русск. пер.: Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. *Методы анализа нелинейных динамических моделей*. М.: Мир, 1991. 386 с.
 14. Moler C., Kahaner D., Nash S. *Numerical Methods and Software*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988. 384 pp.; русск. пер.: Кahaner Д., Моулер К., Нэш С. *Численные методы и программное обеспечение*. М.: Мир, 1998. 575 с.
 15. Iooss G., Joseph D. D. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, second ed. New York: Springer-Verlag. 356 pp.; русск. пер.: Йосс Ж., Дьозеф Д. *Элементарная теория устойчивости и бифуркаций*. М.: Мир, 1983. 301 с.

MSC: 76A05; 76T99, 76M25

ANALYSIS OF A NONLINEAR DYNAMIC MODEL OF THE COUETTE FLOW FOR STRUCTURED LIQUID IN A FLAT GAP

N. A. Belyayeva, K. P. Kuznetsov

Syktyvkar State University,
55, Oktyabr'skiy prospekt, Syktyvkar, 167000, Russia.

E-mails: belyayevana@mail.ru, kuznetsovkp@sptrace.ru

Parametric investigation of structured liquid Couette flow in a plain gap is presented. Bifurcation conditions of steady non-uniform solutions are defined from unsteady uniform ones in the nonmonotonic region of rheological curve. Relevant bifurcation diagrams are plotted. The coincidence between the steady-state solution and the solution of unstable problem is noted.

Key words: Couette flow, structured liquid, bifurcation, nonmonotonic region of rheological curve, parametric investigation.

Original article submitted 16/XI/2011;
revision submitted 17/IV/2012.

Nadezhda A. Belyayeva (Dr.Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Math Modeling & Cybernetics. Konstantin P. Kuznetsov, Postgraduate Student, Dept. of Math Modeling & Cybernetics.