Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Хохрякова, К расчету эффективных упругопластических свойств многокомпонентных хаотически армированных композитов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:04:41

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ХАОТИЧЕСКИ АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ

Найдены эффективные определяющие соотношения упругопластического деформирования многокомпонентных хаотически армированных композиционных материалов.

Целью настоящей работы является обобщения результатов работ [1,2]. Пусть рассматриваемый композиционный материал образован n различными компонентами, соединенными между собой с идеальной адгезией, первый из которых играет роль матрицы - V_m ; остальные - V_f - роль отдельных хаотически разориентированных включений, причем $V_f = \sum_{s=1}^n V_s$, где V_s - хаотически распределенные в матрице эллипсоидальные включения с главными полуосями $a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, a_3^{(s)}$.

Исходные локальные уравнения упругопластического деформирования запишем в виде

$$s_{ij} = 2m_{m,f}(\sqrt{e_{kl}e_{kl}})e_{ij}, \quad s_{pp} = 3K_{m,f}e_{pp}, \quad (1)$$

где $m_f = \sum_{s=1}^n m_s$, $K_f = \sum_{s=1}^n K_s$. Здесь $m_{m,f}(\sqrt{e_{kl}e_{kl}})$ - нелинейные модули пластичности сдвига;

$K_{m,f}$ - объемные модули; $s_{ij} = s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}$, $e_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}$ - девиаторные части тензоров напряжений и деформаций; s_{ij}, e_{ij} - тензоры напряжений и малых упругопластических деформаций.

Структуру композита будем описывать индикаторными функциями $c_m(\mathbf{r})$, $c_f(\mathbf{r})$, $c_s(\mathbf{r})$ ($s = \overline{1, n}$), равными единице в объемах V_m , V_f , V_s , и нулю - вне этих объемов соответственно. Здесь $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ - радиус-вектор координат.

Положение разориентированных в пространстве эллипсоидальных включений будем описывать характеристическими функциями $c_{s,a}(\mathbf{r})$, $a = \overline{1, s_a}$, равными единице в объемах $V_{s,a}$ эллипсоидальных включений направления a конфигурации s .

Тогда

$$c_f(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n c_s(\mathbf{r}), \quad c_s(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^{s_a} c_{s,a}(\mathbf{r}), \quad V_s = \sum_{a=1}^{s_a} V_{s,a}.$$

Линеаризуем исходные уравнения (1), пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах объемов матрицы и объемов эллипсоидальных включений конфигураций s , положив $\Lambda_{m,f;s} = \sqrt{\langle e_{kl} \rangle_{m,f;s} \langle e_{kl} \rangle_{m,f;s}}$. Здесь угловыми скобками обозначены средние значения по соответствующим объемам.

Тогда

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = 2 \left(m_m + \sum_{s=1}^n [m_s] c_s(\mathbf{r}) \right) e_{ij}(\mathbf{r}), \quad s_{pp}(\mathbf{r}) = 3 \left(K_m + \sum_{s=2}^n [K_s] c_s(\mathbf{r}) \right) e_{pp}(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Здесь $[m_s] = m_s - m_m$, $[K_s] = K_s - K_m$.

Преобразуем систему уравнений, состоящую из уравнений (2), уравнений равновесия $s_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0$ и формул Коши $2e_{ij}(\mathbf{r}) = u_{i,j}(\mathbf{r}) + v_{i,j}(\mathbf{r})$, связывающих компоненты тензора деформаций с компонентами вектора скоростей перемещений, в систему уравнений в скоростях перемещений

$$m_m n'_{i,pp} + \left(K_m - \frac{1}{3} m_m \right) n'_{p,pi} - t'_{ip,p} = 0,$$

$$t_{ij}(\mathbf{r}) = -2 \sum_{s=1}^n [m_s] c_s(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r}) - d_{ij} \sum_{s=1}^n [l_s] c_s(\mathbf{r}) e_{pp}(\mathbf{r}), \quad l_s = K_s - \frac{2m_s}{3}. \quad (3)$$

С помощью тензора Грина эта система уравнений заменяется системой интегральных уравнений

$$e'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) t'_{kl}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (4)$$

Осредним соотношение (2) по полному объему:

$$\langle s_{ij} \rangle = 2m_m \langle e_{ij} \rangle + d_{ij} l_m \langle e_{pp} \rangle + 2 \sum_{s=1}^n [m_s] c_s \langle e_{ij} \rangle_s + d_{ij} \sum_{s=1}^n [l_s] c_s \langle e_{pp} \rangle_s. \quad (5)$$

Здесь $c_s = \frac{V_s}{V}$. Из (5) видно, что для нахождения эффективных соотношений необходимо вычислить средние деформации $\langle e_{ij} \rangle_s$. Для этого определим моменты

$$\langle c'_{s,a} e'_{ij} \rangle = \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r}_1) \langle c'_{s,a}(\mathbf{r}) t'_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1. \quad (6)$$

Воспользуемся тем, что функции $c_{s,a}(\mathbf{r})$ описывают только эллипсоидальные включения одного направления и будем считать, что корреляционные функции имеют вид

$$\langle c'_{s,a}(\mathbf{r}) t'_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle = f_{kl}^{(s,a)} \left(\frac{x_1^2}{[a_1^s]^2} + \frac{x_2^2}{[a_2^s]^2} + \frac{x_3^2}{[a_3^s]^2} \right).$$

Это допущение является обобщением гипотезы сильной изотропии на случай эллипсоидальной анизотропии в одном направлении. Тогда интегралы (6) вычисляются точно и их значения выражаются формулами

$$\langle c'_{s,a} e'_{ij} \rangle = \frac{c_{s,a} Z_{ijkl}^{(s,a)}}{2I_m} [\langle t_{kl} \rangle_{s,a} - c_f \langle t_{kl} \rangle_f]. \quad (7)$$

Здесь $Z_{ijkl}^{(s,a)} = S_{ijkl}^{(s,a)} - d_{ij} \frac{n_m}{1+n_m} S_{ppkl}^{(s,a)}$; $S_{ijkl}^{(s,a)}$ - компоненты тензора Эшелби, записанные в лабораторной системе координат эллипсоидальных включений направления $\mathbf{a}$.

Подставляя выражение (7) в известное соотношение [3], получим

$$\langle e_{ij} \rangle_{s,a} = Q_{ijmr}^{(s,a)} P_{mrkl}^{(s,a)} \left[\sum_{q=1}^n c_q \langle e_{kl} \rangle_q \right] + Q_{ijkl}^{(s,a)} \langle e_{kl} \rangle, \quad (8)$$

где $P_{ijkl}^{(s,a)} = \frac{1}{2m_m} [2[m_s] Z_{ijkl}^{(s,a)} + d_{kl} [l_s] Z_{ijpp}^{(s,a)}]$, $Q_{ijkl}^{(s,a)} = [I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s,a)}]^{-1}$.

Умножим (8) на $c_{s,a}$ и, суммируя по всем направлениям $\mathbf{a}$, запишем уравнения для деформаций, осредненных по V_f :

$$\langle e_{ij} \rangle_f = a_{ijkl} \langle e_{kl} \rangle. \quad (9)$$

Здесь

$$a_{ijkl} = c_f^{-1} \left[c_m I_{ijkl} + \sum_{s=1}^n K_{ijmr}^{(s)} \right]^{-1} \sum_{s=1}^n K_{mrkl}^{(s)}, \quad K_{ijkl}^{(s)} = \sum_{a=1}^{s_a} c_{s,a} Q_{ijkl}^{(s,a)}.$$

Подставляя (9) в (5), получим макроскопический закон упругопластического деформирования рассматриваемого композиционного материала:

$$\langle s_{ij} \rangle = E_{ijkl}^* (\Lambda_m, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \langle e_{kl} \rangle, \quad (10)$$

где $E_{ijkl}^* = 2m_m I_{ijkl} + l_m d_{ij} d_{kl} + c_f [2[m_f] I_{ijkl} + [l_f] d_{ij} d_{kl}] a_{ijkl}$ - эффективный тензор модулей пластичности. Поскольку в соотношение (10) входят величины $\Lambda_{m,f;s}$, то для расчета деформационных характеристик композита при конкретных способах нагружения его необходимо решать совместно с уравнениями (9). При этом следует задавать вид функций $m(\Lambda_{m,f;s})$, который оп-

ределяется на основе экспериментальных данных в соответствии с деформационными свойствами материалов компонентов.

Важным частным случаем общих соотношений (10) является модель композита, в котором эллипсоидальные включения ориентированы равновероятно. В этом случае

$c_{s,1} = c_{s,2} = \dots = c_{s,s_a}$. При этом тензоры четвертого ранга $K_{ijkl}^{(s)} = \sum_{a=1}^{s_a} c_{s,a} Q_{ijki}^{(s,a)}$ будут изотропными и их общее представление будет иметь вид:

$$K_{ijkl}^{(s)} = c_s (a_s I_{ijkl} + b_s d_{ij} d_{kl}), \quad a_s = \frac{1}{15} [3Q_{ppqq}^{(s)} - Q_{ppqq}^{(s)}], \quad b_s = \frac{1}{15} [Q_{ppqq}^{(s)} - 2Q_{ppqq}^{(s)}].$$

Подставляя эти соотношения в тензорное уравнение (9) и выделяя объемную и девиаторную части, находим деформации, осредненные по объемам включений:

$$\begin{aligned} \langle e_{ij} \rangle_s &= \frac{a_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s a_s} \langle e_{ij} \rangle, \quad \langle e_{pp} \rangle_s = \frac{g_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s g_s} \langle e_{pp} \rangle, \quad \langle e_{ij} \rangle_f = \frac{\sum_{s=1}^n c_s a_s}{c_f c_m + c_f \sum_{s=1}^n c_s a_s} \langle e_{ij} \rangle; \\ \langle e_{pp} \rangle_f &= \frac{\sum_{s=1}^n c_s g_s}{c_f c_m + c_f \sum_{s=1}^n c_s g_s} \langle e_{pp} \rangle, \quad g_s = a_s - 3b_s. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда соотношения (10) принимают вид

$$\begin{aligned} \langle s_{ij} \rangle &= 2m_m^* (\Lambda_m, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \langle e_{ij} \rangle, \quad \langle s_{pp} \rangle = 3K^* (\Lambda_m, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \langle e_{pp} \rangle; \\ m^* &= m_m + [m_f] \frac{\sum_{s=1}^n c_s a_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s a_s}, \quad K^* = K_m + [K_f] \frac{\sum_{s=1}^n c_s g_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s g_s}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (11) и правила смесей следует, что

$$\Lambda_s = \frac{a_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s a_s} e, \quad \Lambda_f = \frac{\sum_{s=1}^n c_s a_s}{c_f c_m + c_f \sum_{s=1}^n c_s a_s} e, \quad \Lambda_m = \frac{1}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s a_s} e. \quad (13)$$

Для решения этой системы необходимо задать вид функций $m(\Lambda_{m,f;s})$, выбираемый на основе экспериментальных данных в соответствии с деформационными свойствами материалов компонентов. Решать систему (13) следует численными методами, вычисляя на каждом этапе итераций инварианты a_s , b_s , полученные при обращении тензора $I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s)}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сараев Л. А., Хохрякова Ю. В. Уругопластические свойства трехкомпонентного хаотически армированного композиционного материала // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. одиннадцатой межвуз. конф. Ч.1. Самара: СамГУ, 2001. С. 166-171.
2. Глуценков В. С., Сараев Л. А., Хохрякова Ю. В. Малые уругопластические деформации композиционного материала, хаотически армированного эллипсоидальными включениями // Вестн. СамГУ. 2001. №2(20). С. 121-125.
3. Сараев Л. А. Моделирование макроскопических свойств многокомпонентных композиционных материалов. Самара: СамГУ, 2000. 182с.