Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Максимова, О задаче Коши для n -мерной системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу на плоскости, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 1(), 21–30

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1050>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:51:45

УДК 517.956.3

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ n -МЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ НА ПЛОСКОСТИ**Е. А. Максимова**Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: kattyha_mak@mail.ru

Рассмотрена система уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу. Получено решение задачи Коши для случая, когда матрица-коэффициент — действительная $(n \times n)$ -матрица и имеет одно собственное значение кратности n или пару комплексно-сопряжённых собственных значений кратности $n/2$ и действительная часть собственных значений принадлежит интервалу $(-1/2, 1/2)$.

Ключевые слова: метод Римана, задача Коши, дифференциальные уравнения в частных производных, система уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую систему n дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{2G}{y} \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\top$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

В работе [1] построена матрица Римана и с её помощью получено решение задачи Коши для системы (1) в случае, когда $n = 2$ и спектр матрицы G принадлежит интервалу $(-1/2, 1/2)$. В [2, 3] получены решения задачи Коши для случаев, когда собственные значения матрицы $G \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — комплексно-сопряжённые с действительной частью из интервала $(-1/2, 1/2)$.

Необходимо найти решение задачи Коши для системы (1) для случая, когда матрица G имеет одно собственное значение $\lambda \in \mathbb{R}$ кратности n и $\lambda \in (-1/2, 1/2)$ или пару комплексно-сопряжённых собственных значений λ_1, λ_2 кратности $n/2$:

$$\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \alpha \in (-1/2, 1/2).$$

Задача Коши. Найти вектор-функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, где $D = \{(x, y) : 0 < -y < x < y + 1\}$;
- 2) $U(x, y)$ удовлетворяет системе (1);
- 3) выполняются начальные условия

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1]; \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} K(y) \frac{\partial U}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3)$$

где $\tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x), \dots, \tau_n(x))^T$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x))^T$, $K(y) = (-y)^{2G}$.

В характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ область D переходит в область $H = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$, матричное уравнение (1) редуцируется к системе уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу специального вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{G}{\eta - \xi} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{G}{\eta - \xi} \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, \quad (4)$$

а начальные условия (2), (3) примут следующий вид:

$$U(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad \xi \in [0, 1]; \quad (5)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi + 0} K\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \nu(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \quad (6)$$

Случай 1. Известно [4], если $\lambda \in (-1/2, 1/2)$ и

$$\text{rank}(G - \lambda E)^{n-1} - 2\text{rank}(G - \lambda E)^n + \text{rank}(G - \lambda E)^{n+1} = 1,$$

где E — единичная матрица, то существует матрица перехода Q к жорданову базису такая, что

$$Q^{-1}GQ = J(\lambda).$$

Здесь $J(\lambda)$ — жорданова клетка порядка n , соответствующая действительному собственному значению λ .

Тогда система уравнений (4) редуцируется к

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{J(\lambda)}{\eta - \xi} \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{J(\lambda)}{\eta - \xi} \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0, \quad (7)$$

где $W = Q^{-1}U$.

Условия Коши (5), (6) для системы (7) преобразуются к виду

$$W(\xi, \xi) = Q^{-1}\tau(\xi), \quad \xi \in [0, 1]; \quad (8)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi + 0} K\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \eta}\right) = Q^{-1}\nu(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \quad (9)$$

В работе [1] построена матрица Римана для системы (7):

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = f(J) = V^J {}_2F_1 \left(\begin{matrix} J, J \\ 1 \end{matrix}; \sigma \right),$$

где

$$\sigma = -\frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\xi - \eta_0)(\xi_0 - \eta)}, \quad V = \frac{(\eta - \xi)^2}{(\eta - \xi_0)(\eta_0 - \xi)}.$$

Если $W(\xi, \eta)$ является решением (7), а $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ — матрица Римана этой системы, то, используя свойства матрицы Римана и векторный аналог тождества Грина [5], получаем

$$W(\xi_0, \eta_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} (RU) \Big|_{\substack{\xi = \eta_0 - \varepsilon \\ \eta = \eta_0}} + \frac{1}{2} (RU) \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = \xi_0 + \varepsilon}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} R \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{4RJ}{\xi - \eta} \right) U \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi \right).$$

Очевидно, что $W(\xi_0, \eta_0)$ можно записать в виде

$$W(\xi_0, \eta_0) = \sum_{k=1}^n I(J, w_k) e_k, \quad (10)$$

где

$$I(J, w_k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} (f(J)w_k) \Big|_{\substack{\xi = \eta_0 - \varepsilon \\ \eta = \eta_0}} + \frac{1}{2} (f(J)w_k) \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = \xi_0 + \varepsilon}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} f(J) \left(\frac{\partial w_k}{\partial \eta} - \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left(\frac{\partial f(J)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(J)}{\partial \xi} + \frac{4f(J)J}{\xi - \eta} \right) w_k \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi \right);$$

$e_k = (e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kn})^\top$, $e_{ki} = 0$ если $i \neq k$, $e_{kk} = 1$; w_k — компоненты вектора W .

Известно [6], если J — жорданова клетка, то функция $I(J, w_k)$ может быть записана в виде

$$I(J, w_k) = \begin{pmatrix} I(\lambda, w_k) & \frac{I'_\lambda(\lambda, w_k)}{1!} & \vdots & \frac{I_\lambda^{(n-1)}(\lambda, w_k)}{(n-1)!} \\ 0 & I(\lambda, w_k) & \vdots & \frac{I_\lambda^{(n-2)}(\lambda, w_k)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & I(\lambda, w_k) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$I(\lambda, w_k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} (f(\lambda)w_k) \Big|_{\substack{\xi = \eta_0 - \varepsilon \\ \eta = \eta_0}} + \frac{1}{2} (f(\lambda)w_k) \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = \xi_0 + \varepsilon}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} f(\lambda) \left(\frac{\partial w_k}{\partial \eta} - \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left(\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \xi} + \frac{4f(\lambda)\lambda}{\xi - \eta} \right) w_k \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi \right).$$

Подставляя (11) в (10), получаем

$$W(\xi_0, \eta_0) = \begin{pmatrix} I(\lambda, w_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{I_\lambda^{(k)}(\lambda, w_{k+1})}{k!} \\ I(\lambda, w_2) + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{I_\lambda^{(k)}(\lambda, w_{k+2})}{k!} \\ \vdots \\ I(\lambda, w_n) \end{pmatrix} = EI(\lambda, W) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H^k}{k!} I_\lambda^{(k)}(\lambda, W), \quad (12)$$

где H — $(n \times n)$ -матрица вида

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Выполняя в выражении (12) замену $W = Q^{-1}U$, получим

$$\begin{aligned} U(\xi_0, \eta_0) &= EI(\lambda, U) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{QH^kQ^{-1}}{k!} I_\lambda^{(k)}(\lambda, U) = \\ &= EI(\lambda, U) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(G - \lambda E)^k}{k!} I_\lambda^{(k)}(\lambda, U). \end{aligned}$$

Вид $I(\lambda, U)$ будет различным для $\lambda \in (0, 1/2)$ и $\lambda \in (-1/2, 0]$.

Случай 1.1. Пусть $\lambda \in (0, 1/2)$. В этом случае, исходя из результатов [1], получим

$$\begin{aligned} I(\lambda, U) &= K_1(\lambda)(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) [\varphi(\xi)]^{\lambda-1} d\xi - \\ &\quad - K_2(\lambda) 2^{2\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) [\varphi(\xi)]^{-\lambda} d\xi, \end{aligned}$$

где $K_1(\lambda) = \Gamma(2\lambda)/\Gamma^2(\lambda)$, $K_2(\lambda) = \Gamma(1-2\lambda)/\Gamma^2(1-\lambda)$, $\varphi(\xi) = (\eta_0 - \xi)(\xi - \xi_0)$.

Производные $I(\lambda, U)$ по переменной λ будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned} I_\lambda^{(k)}(\lambda, U) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(K_1^{(j)}(\lambda)(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\lambda} \times \right. \\ &\quad \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) [\varphi(\xi)]^{\lambda-1} \left(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \right)^{k-j} d\xi - \end{aligned}$$

$$- K_2^{(j)}(\lambda) 2^{2\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) [\varphi(\xi)]^{-\lambda} \left(\ln \frac{4}{\varphi(\xi)} \right)^{k-j} d\xi \Bigg).$$

Здесь производные $K_1^{(j)}(\lambda)$, $K_2^{(j)}(\lambda)$ выражаются через полигамма-функцию $\Psi^{(k)}(z)$ [7, 8].

Случай 1.2. Пусть $\lambda \in (-1/2, 0]$. Исходя из результатов [1] получим

$$\begin{aligned} I(\lambda, U) = & K_1(1+\lambda)(\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) [\varphi(\xi)]^\lambda d\xi - \\ & - \frac{1}{2} K_2(-\lambda)(\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi) [\varphi(\xi)]^\lambda (\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) d\xi - \\ & - K_2(\lambda) 2^{2\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) [\varphi(\xi)]^{-\lambda} d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\lambda^{(k)}(\lambda, U) = & \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \Bigg(K_1^{(j)}(1+\lambda)(\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\lambda} \times \\ & \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) [\varphi(\xi)]^{\lambda-1} \left(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \right)^{k-j} d\xi - \\ & - \frac{(-1)^j}{2} K_2^{(j)}(-\lambda)(\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi) [\varphi(\xi)]^\lambda \left(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \right)^{k-j} (\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) d\xi - \\ & - K_2^{(j)}(\lambda) 2^{2\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) [\varphi(\xi)]^{-\lambda} \left(\ln \frac{4}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \right)^{k-j} d\xi \Bigg). \end{aligned}$$

Случай 2. Рассмотрим случай, когда матрица G имеет комплексно-сопряжённые собственные значения:

$$\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \alpha \in (-1/2, 1/2).$$

Из свойств функции от матрицы [9] следует, что вектор-функция $U(\xi, \eta)$ есть вещественная функция даже в том случае, когда характеристические числа матрицы G комплексно-сопряжённые. Выполнение условия

$$\text{rank}(G - \lambda E)^{n/2-1} - 2 \text{rank}(G - \lambda E)^{n/2} + \text{rank}(G - \lambda E)^{n/2+1} = 1$$

означает, что существует матрица перехода Q к жорданову базису такая, что

$$Q^{-1} G Q = J = P_n(\alpha, \beta),$$

при этом блочная матрица $P_n(\alpha, \beta)$ — вещественный аналог жордановой клетки порядка n [4], соответствующий паре комплексно-сопряжённых собственных значений $\lambda, \bar{\lambda}$:

$$P_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} P(\alpha, \beta) & E & \vdots & O & O \\ O & P(\alpha, \beta) & \vdots & O & O \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ O & O & \vdots & P(\alpha, \beta) & E \\ O & O & \vdots & O & P(\alpha, \beta) \end{pmatrix},$$

где

$$P(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае система (4) преобразуется к виду (7) и начальные условия будут иметь вид (8), (9).

Можно показать, что функция от матрицы $P_n(\alpha, \beta)$ представима в виде блочной матрицы:

$$f(P_n(\alpha, \beta)) = \begin{pmatrix} F & F_1 & \vdots & F_{n/2-1} \\ O & F & \vdots & F_{n/2-2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ O & O & \vdots & F \end{pmatrix},$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(\lambda)) & \operatorname{Im}(f(\lambda)) \\ -\operatorname{Im}(f(\lambda)) & \operatorname{Re}(f(\lambda)) \end{pmatrix}, \quad F_k = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{Re}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} & \frac{\operatorname{Im}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} \\ -\frac{\operatorname{Im}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} & \frac{\operatorname{Re}(f^{(k)}(\lambda))}{k!} \end{pmatrix}.$$

Рассуждая аналогично случаю 1, получим

$$W(\xi_0, \eta_0) = E \operatorname{Re}(I(\lambda, W)) + B_1 \operatorname{Im}(I(\lambda, W)) + \\ + \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(\frac{H^k}{k!} \operatorname{Re}(I_\lambda^{(k)}(\lambda, W)) + \frac{B_{k+1}}{k!} \operatorname{Im}(I_\lambda^{(k)}(\lambda, W)) \right). \quad (14)$$

Здесь H — $(n \times n)$ -матрица вида (13), B_k — блочные $(n \times n)$ -матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} N & O & \vdots & O \\ O & N & \vdots & O \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ O & O & \vdots & N \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} O & N & O & O & \vdots & O \\ O & O & N & O & \vdots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & O & \vdots & N \\ O & O & O & O & \vdots & O \end{pmatrix}, \dots, \\ B_{n/2} = \begin{pmatrix} O & \vdots & O & N \\ O & \vdots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \vdots & O & O \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполняя в (14) замену $W = Q^{-1}U$, получим

$$U(\xi_0, \eta_0) = E \operatorname{Re}(I(\lambda, U)) + QB_1Q^{-1} \operatorname{Im}(I(\lambda, U)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(\frac{QH^k Q^{-1}}{k!} \operatorname{Re} \left(I_{\lambda}^{(k)}(\lambda, U) \right) + \frac{QB_{k+1} Q^{-1}}{k!} \operatorname{Im} \left(I_{\lambda}^{(k)}(\lambda, U) \right) \right).$$

Вид $I(\lambda, U)$ и её производных будет различным для $\operatorname{Re}(\lambda) \in (0, 1/2)$ и $\operatorname{Re}(\lambda) \in (-1/2, 0]$.

Случай 2.1 Пусть $\operatorname{Re}(\lambda) \in (0, 1/2)$. Используя результаты, опубликованные в работе [2], получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I(\lambda, U)) = & (\operatorname{Re}(M_1(\lambda)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) + \operatorname{Im}(M_1(\lambda)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\ & \times (\eta_0 - \xi_0)^{1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \varphi^{\alpha-1}(\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi + \\ & + (\operatorname{Re}(M_1(\lambda)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) - \operatorname{Im}(M_1(\lambda)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\ & \times (\eta_0 - \xi_0)^{1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \varphi^{\alpha-1}(\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\ & - 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_2(\lambda)) \cos(\beta \ln 4) - \operatorname{Im}(M_2(\lambda)) \sin(\beta \ln 4)) \times \\ & \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) \varphi^{-\alpha}(\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\ & - 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_2(\lambda)) \sin(\beta \ln 4) + \operatorname{Im}(M_2(\lambda)) \cos(\beta \ln 4)) \times \\ & \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) \varphi^{-\alpha}(\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(I(\lambda, U)) = & (\operatorname{Im}(M_1(\lambda)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) - \operatorname{Re}(M_1(\lambda)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\ & \times (\eta_0 - \xi_0)^{1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \varphi^{\alpha-1}(\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi + \\ & + (\operatorname{Re}(M_1(\lambda)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) + \operatorname{Im}(M_1(\lambda)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\ & \times (\eta_0 - \xi_0)^{1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \varphi^{\alpha-1}(\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\ & - 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_2(\lambda)) \sin(\beta \ln 4) + \operatorname{Im}(M_2(\lambda)) \cos(\beta \ln 4)) \times \\ & \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) \varphi^{-\alpha}(\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\ & - 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_2(\lambda)) \cos(\beta \ln 4) - \operatorname{Im}(M_2(\lambda)) \sin(\beta \ln 4)) \times \\ & \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) \varphi^{-\alpha}(\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(M_1(\lambda)) &= (2\alpha - 1) \operatorname{Re}(M_2(1 - \lambda)) - 2\beta \operatorname{Im}(M_2(1 - \lambda)), \\ \operatorname{Im}(M_1(\lambda)) &= (2\alpha - 1) \operatorname{Im}(M_2(1 - \lambda)) + 2\beta \operatorname{Re}(M_2(1 - \lambda)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(M_2(\lambda)) &= \frac{\sin(\pi\alpha) \operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \cos\left(\beta \ln \frac{t}{(1-t)^2}\right) dt - \\ &\quad - \frac{\cos(\pi\alpha) \operatorname{sh}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \sin\left(\beta \ln \frac{t}{(1-t)^2}\right) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(M_2(\lambda)) &= \frac{\sin(\pi\alpha) \operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \sin\left(\beta \ln \frac{t}{(1-t)^2}\right) dt - \\ &\quad - \frac{\cos(\pi\alpha) \operatorname{sh}(\pi\beta)}{\pi} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{-2\alpha} \cos\left(\beta \ln \frac{t}{(1-t)^2}\right) dt. \end{aligned}$$

Случай 2.2 Пусть $\operatorname{Re}(\lambda) \in (-1/2, 0]$. Используя результаты, полученные в работе [3], получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I(\lambda, U)) &= (\operatorname{Re}(M_1(\lambda + 1)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) + \operatorname{Im}(M_1(\lambda + 1)) \times \\ &\quad \times \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) (\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \varphi^\alpha(\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi + \\ &+ (\operatorname{Re}(M_1(\lambda + 1)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) - \operatorname{Im}(M_1(\lambda + 1)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\ &\quad \times (\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \varphi^\alpha(\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\ &- \frac{1}{2} (\operatorname{Re}(M_2(-\lambda)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) + \operatorname{Im}(M_2(-\lambda)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\ &\quad \times (\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi) \varphi^\alpha(\xi) (\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\ &- \frac{1}{2} (\operatorname{Re}(M_2(-\lambda)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) - \operatorname{Im}(M_2(-\lambda)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\ &\quad \times (\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi) \varphi^\alpha(\xi) (\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\ &- 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_3(\lambda)) \cos(\beta \ln 4) - \operatorname{Im}(M_3(\lambda)) \sin(\beta \ln 4)) \times \\ &\quad \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) \varphi^{-\alpha}(\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\ &- 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_3(\lambda)) \sin(\beta \ln 4) + \operatorname{Im}(M_3(\lambda)) \cos(\beta \ln 4)) \times \\ &\quad \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) \varphi^{-\alpha}(\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(I(\lambda, U)) &= (\operatorname{Im}(M_1(\lambda + 1)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) - \operatorname{Re}(M_1(\lambda + 1)) \times \\ &\quad \times \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) (\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \varphi^\alpha(\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi + \\ &+ (\operatorname{Re}(M_1(\lambda + 1)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) + \operatorname{Im}(M_1(\lambda + 1)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\ &\quad \times (\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \varphi^\alpha(\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}(\operatorname{Im}(M_2(-\lambda)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) - \operatorname{Re}(M_2(-\lambda)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\
 & \quad \times (\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi) \varphi^\alpha(\xi) (\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\
 & -\frac{1}{2}(\operatorname{Re}(M_2(-\lambda)) \cos(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0)) + \operatorname{Im}(M_2(-\lambda)) \sin(2\beta \ln(\eta_0 - \xi_0))) \times \\
 & \quad \times (\eta_0 - \xi_0)^{-1-2\alpha} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi) \varphi^\alpha(\xi) (\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi - \\
 & - 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_3(\lambda)) \sin(\beta \ln 4) + \operatorname{Im}(M_3(\lambda)) \cos(\beta \ln 4)) \times \\
 & \quad \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) \varphi^{-\alpha}(\xi) \cos(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi + \\
 & + 2^{2\alpha-1} (\operatorname{Re}(M_3(\lambda)) \cos(\beta \ln 4) - \operatorname{Im}(M_3(\lambda)) \sin(\beta \ln 4)) \times \\
 & \quad \times \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) \varphi^{-\alpha}(\xi) \sin(\beta \ln \varphi(\xi)) d\xi,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(M_3(\lambda)) &= \operatorname{Re}(M_2(\lambda + 1)) \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + 4 \right) - \operatorname{Im}(M_2(\lambda)) \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \\
 \operatorname{Im}(M_3(\lambda)) &= \operatorname{Im}(M_2(\lambda + 1)) \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + 4 \right) + \operatorname{Re}(M_2(\lambda)) \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.
 \end{aligned}$$

Используя выражения для $U(\xi_0, \eta_0)$, можно записать решение $U(x, y)$ в области D . Таким образом, если $\tau(x) \in C^3[0, 1]$ и $\nu(x) \in C^2(0, 1)$, то задача Коши (2), (3) для уравнения (1) корректна по Адамару.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев А. А. Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа / В сб.: *Дифференциальные уравнения в частных производных*. Сб. тр. мат. кафедр пединститутов РСФСР. Вып. 16. Рязань: Рязан. гос. пед. инст., 1980. С. 9–14. [Andreev A. A. On a class of systems of differential equations of hyperbolic type / In: *Partial differential equations*. Ryazan: Ryazan. Gos. Ped. Inst., 1980. Pp. 9–14].
2. Андреев А. А., Максимова Е. А. Решение задачи Коши для одной системы гиперболического типа с сингулярными характеристиками / В сб.: *Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием*. Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Математическое моделирование и краевые задачи. Самара: СамГТУ, 2011. С. 11–17. [Andreev A. A., Maksimova E. A. The solution of the Cauchy problem for one hyperbolic system with singular characteristics / In: *Proceedings of the Eighth All-Russian Scientific Conference with international participation*. Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2011. Pp. 11–17].
3. Максимова Е. А. Решение задачи Коши для системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 3(24). С. 167–170. [Maksimova E. A. Solution of the Cauchy problem for system of the Euler–Poisson–Darboux equations // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 3(24). Pp. 167–170].
4. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007. 480 с. [Tyrtysnikov E. E. Moscow: Fizmatlit, 2007. 480 pp.]
5. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1966. 164 с.; англ. пер.: Bitsadze A. V. Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 1964. 160 pp.

6. *Lancaster P.* Theory of Matrices. New York: Academic Press, 1969. 316 pp.; русск. пер.: *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
7. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* / eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. New York: Dover, 1972. 824 pp.; русск. пер.: Справочник по специальным функциям / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [*Gantmakher F. R.* Theory of matrices. Moscow: Nauka. 549 pp.]

Поступила в редакцию 22/I/2011;
в окончательном варианте — 24/II/2012.

MSC: 35L45

ON CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEM OF n EULER–POISSON–DARBOUX EQUATIONS IN THE PLANE

E. A. Maksimova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: katyuha_mak@mail.ru

The system of Euler–Poisson–Darboux equations is considered, the Cauchy problem is solved for the case of real $n \times n$ matrix-coefficient with one real eigenvalue or two complex conjugate eigenvalues with real part in the interval $(-1/2, 1/2)$.

Key words: *Riemann method, Cauchy problem, partial differential equation, system of Euler–Poisson–Darboux equations.*

Original article submitted 22/I/2011;
revision submitted 24/II/2012.