Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Я. Рапопорт, О чебышевских свойствах решений задач полубесконечной оптимизации, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 86–110

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu11>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:54:12

Математическая теория управления и оптимизации

УДК 519.3:62-50

Э.Я. Рапопорт

О ЧЕБЫШЕВСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ¹

Приводятся формулировки и доказательства теорем, устанавливающих альтернансные свойства решений задач математического программирования с континуумом ограничений в условиях, ослабленных по сравнению с традиционными. Рассматривается вычислительный алгоритм, базирующийся на этих свойствах.

Достаточно широкий круг параметрических экстремальных задач формулируется в терминах функций максимума, что приводит к специальным задачам математического программирования с континуумом ограничений [1,2], получившим название задач полубесконечной оптимизации или полубесконечного программирования (ЗПО) [3,4].

Известные необходимые условия экстремума для ЗПО формулируются в виде обобщенного правила Лагранжа для таких точек максимума соответствующих функций на заданных множествах, в которых значения данных функций оказываются равными по определению величине критерия оптимальности и заданному пределу для функциональных ограничений [1,2,5].

В соответствии с теоремой Каратеодори о выпуклой оболочке подмножества в векторном пространстве здесь сразу устанавливается верхняя граница для минимального числа этих точек, а достижение в определенных условиях равенства данного числа его верхнему граничному значению, при котором отмеченное число становится равным числу всех искомых неизвестных, является центральным свойством решений ЗПО, называемым далее альтернансным по аналогии с подобными определениями в теории чебышевских приближений [6-11].

Еще П.Л.Чебышев [12] и С.Н.Бернштейн [13] указывали, что альтернансные свойства решений в задачах равномерного приближения функций приводят к замкнутым системам соответствующих соотношений в точках максимума погрешностей приближения, редуцируемым, в свою очередь, к разрешаемым относительно всех искомых величин системам уравнений.

На альтернансных свойствах экстремальных элементов базируется целый ряд алгоритмов, с успехом используемых для решения рассматриваемого круга задач [2,14-17].

Однако известные условия, при которых решения ЗПО обладают альтернансными свойствами часто оказываются (за исключением простейших одномерных модификаций в линейной постановке) достаточно сложными и стеснительными, а их предварительная проверка затруднительной. В значительной степени это связано с типичными формулировками данных свойств в форме так называемого "обобщенного альтернанса" [18-21], обладающей избыточными признаками по отношению к определяющему соотношению для числа точек максимума, использованием которого во многих случаях исчерпывается "практическая полезность" соответствующих теорем.

Отмеченные особенности в первую очередь относятся к многомерным постановкам ЗПО, для которых функции максимума определяются на множествах с размерностью, большей единицы.

В соответствии со сказанным возникает проблема ослабления предварительных допущений, гарантирующих выполнение альтернансных свойств оптимальных решений ЗПО, понимаемых в указанном выше более узком смысле по сравнению с понятием обобщенного альтернанса.

В настоящей работе сформулированы теоремы об альтернансных свойствах, в определенной степени решающие отмеченную проблему в рамках рассматриваемых математических мо-

¹ Работа поддержана грантом Минобразования РФ по фундаментальным исследованиям в области автоматики и телемеханики (проект 97-6-1.1-62).

делей. Приводятся полные доказательства этих теорем по схеме, указанной в работах [17,22]. Обсуждается вычислительный алгоритм решения ЗПО, базирующийся на полученных результатах.

1. Задача полубесконечного программирования с гладкой целевой функцией

Рассмотрим задачу математического программирования [1]

$$I(\Delta) \rightarrow \min, \Delta \in G_n \quad (1)$$

с бесконечным числом ограничений

$$F(x, \Delta) - \varepsilon_0 \leq 0, \quad x \in \Omega_m, \quad m \geq 1, \quad \varepsilon_0 \geq \varepsilon_{\min}^{(n)} > 0,$$

эквивалентных условию

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta) &= \max \{F(x, \Delta) : x \in \Omega_m, m \geq 1\} \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 \geq \varepsilon_{\min}^{(n)} > 0, \\ \varepsilon_{\min}^{(n)} &= \inf \{\Phi(\Delta) : \Delta \in G_n\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь G_n - замкнутое множество в E^n , обладающее в каждой точке $\Delta \in G_n$ некоторым непустым выпуклым конусом; Ω_m - связное компактное множество в E^m , $m \geq 1$; $I(\Delta)$ - непрерывно дифференцируемая функция n - мерного аргумента $\Delta = (\Delta_i)$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 1$; $F(x, \Delta)$ - заданная функция, непрерывная вместе со своими частными производными по совокупности аргументов на $\Omega_m \times G_n$, и ε_0 - заданное число.

Замечание 1. В характерном частном случае $\Phi(\Delta) = \max \{F(x, \Delta) : x \in \Omega_m\}$, где сохраняются прежние свойства Ω_m и $F(x, \Delta)$, задача сводится к виду (1), (2) с помощью преобразования [1]

$$\begin{aligned} \max \{f(t, \Delta) : t \in P_k \subset E^k\} &= \max \{f_1(\varphi, \Delta) : \varphi \in P_{k+1} \subset E^{k+1}\}, \\ f_1(\varphi, \Delta) &= \xi f(t, \Delta); \quad \varphi = (\xi, t); \quad \xi \in [-1, 1]; \quad P_{k+1} = P_k \times [-1, 1] \end{aligned}$$

для заданной функции $f(t, \Delta)$, $\Delta \in G_n$ □.

Поскольку существует минимизирующая последовательность, на которой достигается нижняя грань функции $\Phi(\Delta)$, равная $\varepsilon_{\min}^{(n)}$, то множество Лебега $N(\varepsilon_0) = \{\Delta \in G_n : \Phi(\Delta) \leq \varepsilon_0\}$ оказывается непустым для всех $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}$.

Будем всюду далее считать выполненным достаточное в такой ситуации условие [23]

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow \infty} I(\Delta) = \infty \quad (3)$$

существования решения задачи (1), (2) для всех $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}$, где $\|\cdot\|$ - евклидова норма в E^n .

Пусть для всех $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_{\min}^{(n)}$, при которых существует решение Δ^0 задачи (1), (2), выполняются следующие допущения, характеризующие искомую точку Δ^0 :

$$a) \quad \Delta^0 \in \text{int } G_n; \quad (4)$$

$$b) \quad \text{grad } I(\Delta^0) \neq 0; \quad (5)$$

с) для всех $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}$ найдется такой вектор S , $\|S\| = 1$, принадлежащий конусу $K(\Delta^0)$ возможных направлений [1, 2] множества G_n в точке Δ^0 , что производная функции максимума $\Phi(\Delta)$ в этой точке по направлению S отрицательна:

$$\frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial S} < 0; \quad S \in K(\Delta^0), \quad \|S\| = 1; \quad (6)$$

$$d) \text{ функции } \frac{\partial F(x, \Delta^0)}{\partial \Delta_i}, \quad i = \overline{1, n}, \text{ линейно независимы на } \Omega_m;$$

е) всякому фиксированному $\Delta \in G_n$ сопоставим множество $\Omega_m^\varepsilon(\Delta) = \{x \in \Omega_m : F(x, \Delta) = \Phi(\Delta) = \varepsilon\}$ всех точек x на Ω_m , в которых $F(x, \Delta)$ достигает своего максимального значения, равного ε .

Тогда будем считать, что число R_x таких различающихся точек для $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\Delta = \Delta^0$ ограничивается при выполнении (5) неравенством

$$R_x \geq 2. \quad (7)$$

Покажем, что в рассматриваемых условиях решения задачи (1), (2) обладают альтернансными свойствами, формулируемыми в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. Пусть $\Delta^0 = (\Delta_i^0)$, $i = \overline{1, n}$ – решение задачи (1), (2) и выполняются условия а) – е). Тогда существует R_x различающихся точек $x_j^0 \in \Omega_m^{\varepsilon_0}(\Delta^0)$, $j = \overline{1, R_x}$, где

$$R_x = n, \text{ если } \varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}; \quad (8)$$

$$R_x = n + 1, \text{ если } \varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}. \quad (9)$$

Доказательство теоремы 1

1⁰. Рассмотрим сначала задачу (1), (2) при $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}$. В силу (7) достаточно рассмотреть при этом случай $n \geq 3$. Нетрудно видеть, что линейная система уравнений

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial I(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} h_i = a; \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x_j^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} h_i = b_j; \quad j = \overline{1, R_x} \quad (10)$$

должна быть неразрешима относительно $h = (h_i)$, $i = \overline{1, n}$, для всех $a < 0$, $b_j < 0$, $j = \overline{1, R_x}$. Действительно, в противном случае существуют возможные (с учетом включения (4)) направления $h \in E^n$, $\|h\| = 1$, производные по которым $\partial I(\Delta)/\partial h$ и $\partial \Phi(\Delta)/\partial h$ целевой функции $I(\Delta)$ и функции максимума $\Phi(\Delta)$, определяемые выражениями [2]

$$\frac{\partial I(\Delta)}{\partial h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial I(\Delta)}{\partial \Delta_i} h_i; \quad \frac{\partial \Phi(\Delta)}{\partial h} = \max_{x \in \Omega_m^{\varepsilon_0}(\Delta)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x, \Delta)}{\partial \Delta_i} h_i, \quad (11)$$

отрицательны при $\Delta = \Delta^0$, что противоречит необходимому условию локального минимума $\partial I(\Delta^0)/\partial h \geq 0$ по всем допустимым $h \in K(\Delta^0)$, $\|h\| = 1$ [2].

Вопреки утверждению (8) предположим теперь, что $R_x = R^* < n$, где $R^* > 1$ в соответствии с (7). Тогда для того, чтобы система (10) не имела решений при отрицательных a и b_j , в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли [24] необходимо, чтобы при $R^* < n$ ранг r^* ее матрицы был меньше максимально возможного $r_{\max}^*$, который в условиях $R^* < n$ равен $r_{\max}^* = R^* + 1 \leq n$. Но в таком случае существуют [24] нетривиальные решения $\tilde{h} = (\tilde{h}_i)$ однородной системы (10) при $a = b_1 = b_2 = \dots = b_{R^*} = 0$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial I(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x_j^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i = 0, \quad j = \overline{1, R^*}, \quad (12)$$

откуда, в силу определений (11), следует существование допустимых направлений $\tilde{h}$, $\|\tilde{h}\| = 1$, для которых

$$\frac{\partial I(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} = \left(\frac{\partial I(\Delta^0)}{\partial \Delta}, \tilde{h} \right) = 0; \quad \frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} = \max_{x_j^0} \left(\frac{\partial F(x_j^0, \Delta^0)}{\partial \Delta}, \tilde{h} \right) = 0, \quad (13)$$

где внешние круглые скобки в правых частях равенств (13) означают скалярное произведение в E^n .

Последующий этап доказательства проводится по следующей схеме. При сделанном выше предположении $R_x = R^* < n$ в условиях а) – е) теоремы 1 можно сформулировать такую деформированную задачу вида (1), (2) с заменой $F(x, \Delta)$ на некоторую варьируемую функцию $F_1(x, \Delta)$, тождественно совпадающую с $F(x, \Delta)$ на Ω_m э x при $\Delta = \Delta^0$, что, во-первых, Δ^0 является одновременно решением как исходной, так и деформированной задачи в некоторой окрестности Δ^0 и, во-вторых, ранг r^* матрицы вида (10) после замены F на F_1 равен максимальному $r_{\max}^* = R^* + 1 \leq n$. С другой стороны, последнее равенство оказывается невозможным в условиях существования нетривиального решения однородной системы уравнений (12) для возмущенной задачи в силу необходимого условия экстремума при $R_x = R^* < n$ как для исходной, так и деформируемой задачи, если $F_1(x, \Delta^0) \equiv F(x, \Delta^0)$, $x \in \Omega_m$. Получаемое противоречие и свидетельствует о невозможности неравенства $R^* < n$.

В целях формирования функции $F_1(x, \Delta)$, обладающей указанными свойствами, используется разложение $F(x, \Delta)$ в бесконечный ряд.

Приступим к реализации изложенной схемы доказательства.

Постулируемые свойства функции $F(x, \Delta) \in L_{2,p}[\Omega_m]$ позволяют выполнить ее разложение в равномерно сходящийся на Ω_m ряд Фурье по некоторой полной ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе функций $\{\eta_k(x)\} \in L_{2,p}[\Omega_m]$ [25]:

$$F(x, \Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(\Delta) \eta_k(x); \quad z_k(\Delta) = \int_{\Omega_m} F(x, \Delta) \rho(x) \eta_k(x) d\mu. \quad (14)$$

Равномерная сходимость ряда в (14) гарантирует правомерность всех используемых ниже операций с этим рядом.

Используя изоморфизм пространств $L_{2,p}[\Omega_m]$ и l_2 $\ni Z(\Delta) = \{z_k(\Delta)\}$ функций с интегрируемым на Ω_m квадратом и бесконечных числовых последовательностей с ограниченной суммой квадратов их членов [25], рассмотрим далее в G_n непустые множества

$$M(I_0) = \{\Delta \in G_n : I(\Delta) - I_0 = 0; I_0 = I(\Delta^0)\}; \quad N(\varepsilon_0) = \{\Delta \in G_n : \Phi(\Delta) \leq \varepsilon_0\},$$

содержащие точку $\Delta^0 \in M(I_0) \cap N(\varepsilon_0)$, являющуюся граничной точкой множества $N(\varepsilon_0)$, и их отображения согласно (14) в l_2 – соответственно $M^*(I_0)$ и $N^*(\varepsilon_0)$, содержащие точку $Z(\Delta^0) = \{z_k(\Delta^0)\} \in M^*(I_0) \cap N^*(\varepsilon_0)$, которая является граничной точкой множества $N^*(\varepsilon_0)$. Установим вначале справедливость следующих утверждений.

У т в е р ж д е н и е 1. *Каждый вектор $\tilde{h}$ в (12), (13) является касательным одновременно к $M(I_0)$ и $N(\varepsilon_0)$ в точке Δ^0 , причем производные $\partial I(\Delta^0)/\partial \tilde{h}$ и $\partial \Phi(\Delta^0)/\partial \tilde{h}$ по направлениям каждого касательного вектора к этим множествам равны нулю.*

У т в е р ж д е н и е 2. *Отображение $h^* = (h_k^*)$, $h_k^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i$, $k=1,2,\dots$ каждого вектора $\tilde{h}$ в пространстве l_2 является касательным вектором одновременно к $M^*(I_0)$ и $N^*(\varepsilon_0)$ в точке $Z(\Delta^0)$, и при этом производные отображений $I(\Delta)$ и $\Phi(\Delta)$ по направлениям h^* в точке $Z(\Delta^0)$ равны нулю.*

Доказательство утверждения 1. Утверждение 1 относительно множества $M(I_0)$ для непрерывно дифференцируемой функции $I(\Delta)$ непосредственно следует в условиях (5), (12) из теоремы Люстерника о касательных пространствах [26,27] и остается доказать это утверждение относительно $N(\varepsilon_0)$.

Поскольку [2]

$$\Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h}) = \Phi(\Delta^0) + \alpha \frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} + o(\alpha); \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0, \quad (15)$$

то при $\overline{\partial \Phi(\Delta^0)/\partial \tilde{h}} = 0$ согласно (13) и $\Phi(\Delta^0) = F(x_j^0, \Delta^0) = \varepsilon_0$ по определению точек $x_j^0, j=1, R^*$, $R^* > 1$ получим из (15)

$$\Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h}) = \varepsilon_0 + o(\alpha). \quad (16)$$

В силу условий (4), (6) и определения (11) для непрерывных функций $\frac{\partial F(x, \Delta)}{\partial \Delta}$ найдется такое допустимое направление $h^{(1)} \in E^n$, $\|h^{(1)}\| = 1$, для которого производная $\frac{\partial \Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h})}{\partial h^{(1)}}$ отлична от нуля при достаточно малом $\alpha > 0$ и имеет требуемый знак. Тогда, используя выражение вида (15), приходим к существованию такого $\alpha_1 > 0$, что

$$\Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h} + \alpha_1 h^{(1)}) = \Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h}) + \alpha_1 \frac{\partial \Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h})}{\partial h^{(1)}} + o(\alpha_1) = \Phi(\Delta^0) = \varepsilon_0. \quad (17)$$

Подставляя сюда равенство (16), будем иметь

$$\alpha_1 \frac{\partial \Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h})}{\partial h^{(1)}} + o(\alpha) + o(\alpha_1) = 0.$$

При $\frac{\partial \Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h})}{\partial h^{(1)}} \neq 0$ отсюда следует, что $\alpha_1 = o(\alpha)$. Таким образом, если $\Delta^0 \in N(\varepsilon_0)$ и $\frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} = 0$, то найдется такое $\Delta = \Delta^0 + \alpha \tilde{h} + \alpha_1 h^{(1)} = \Delta^0 + \alpha \tilde{h} + o(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow +0$, что $\Delta \in N(\varepsilon_0)$. Поскольку в условиях (12) производная функции максимума $\Phi(\Delta)$ равна нулю в точке $\Delta = \Delta^0$ и по направлению $-\tilde{h}$, то аналогичным образом получаем, что последний вывод справедлив и при $\alpha \rightarrow -0$, то есть, $\Delta = \Delta^0 + \alpha \tilde{h} + o(\alpha) \in N(\varepsilon_0)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и, значит, $\tilde{h}$ по определению есть касательный вектор к множеству $N(\varepsilon_0)$ в точке $\Delta^0 \in N(\varepsilon_0)$ [26, 27].

Обратно, если $\tilde{h}, \|\tilde{h}\|=1$ – касательный вектор к $N(\varepsilon_0)$ в точке Δ^0 , то $\Delta^0 + \alpha \tilde{h} + o(\alpha) \in N(\varepsilon_0)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и, следовательно,

$$\Phi(\Delta^0) = \Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h} + o(\alpha)) = \varepsilon_0 \quad (18)$$

при некотором достаточно малом α .

Полагая здесь $o(\alpha) = \alpha_1 h^{(1)}$, $\|h^{(1)}\|=1$, где $\alpha_1 = o(\alpha)$, приходим к равенству (17), из которого после подстановки выражения (15) следует, что

$$\alpha \frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} + \alpha_1 \frac{\partial \Phi(\Delta^0 + \alpha \tilde{h})}{\partial h^{(1)}} + o(\alpha) + o(\alpha_1) = 0.$$

При $\alpha_1 = o(\alpha)$ последнее соотношение принимает вид

$$\alpha \frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} + o(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} = 0,$$

что и завершает доказательство утверждения 1 $\square$.

Доказательство утверждения 2. Если $\tilde{h}$, где $\|\tilde{h}\|=1$ – касательный вектор к множеству W в точке $\Delta = \Delta^0$, $W = M(I_0)$ или $W = N(\varepsilon_0)$, то

$$\Delta = \Delta^0 + \alpha \tilde{h} + o(\alpha) \in W \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \text{ если } \Delta^0 \in W. \quad (19)$$

Обозначая здесь $\tilde{\Delta} = \Delta^0 + \alpha \tilde{h} + o(\alpha)$; $\delta \Delta^* = \alpha \tilde{h}$, имеем отсюда [27]

$$\|\tilde{\Delta} - \Delta^0 - \delta \Delta^*\| = o\|\delta \Delta^*\|, \quad (20)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Теперь, используя разложение $z_k(\tilde{\Delta})$, $k=1,2,\dots$, в ряд Тейлора в точке $\Delta^0 + \delta \Delta^*$, получим с учетом (20) следующую оценку для нормы $\|\cdot\|_{l_2}$ в пространстве l_2 разности $Z(\tilde{\Delta}) - Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*)$:

$$\begin{aligned} \|Z(\tilde{\Delta}) - Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*)\|_{l_2} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (z_k(\tilde{\Delta}) - z_k(\Delta^0 + \delta \Delta^*))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k(\Delta^0 + \delta \Delta^*)}{\partial \Delta_i} (\tilde{\Delta}_i - \Delta_i^0 - \delta \Delta_i^*) + o(\|\tilde{\Delta} - \Delta^0 - \delta \Delta^*\|) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = o\|\delta \Delta^*\|. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \|Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*) - Z(\Delta^0)\|_{l_2} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (z_k(\Delta^0 + \delta \Delta^*) - z_k(\Delta^0))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i^* + o(\|\delta \Delta^*\|) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (22)$$

причем здесь не все $\frac{\partial z_k(\Delta^0)}{\partial \Delta_i}$, $i = \overline{1, n}$; $k = 1, 2, \dots$, равны нулю одновременно. Действительно, в противном случае в силу (14)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i^* \right) \eta_k(x) = \sum_{i=1}^n \delta \Delta_i^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial z_k(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \eta_k(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i^* \equiv 0$$

по всем $x \in \Omega_m$ при $\delta \Delta^* \neq 0$, что противоречит условию d теоремы 1. Тогда, согласно (22), будем иметь

$$\|Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*) - Z(\Delta^0)\|_{l_2} = O(\|\delta \Delta^*\|), \quad (23)$$

где $O(\|\delta \Delta^*\|)$ есть малая того же порядка, что и евклидова норма $\|\delta \Delta^*\|$. Сопоставляя (21) и (23), получим следующее соотношение:

$$\|Z(\tilde{\Delta}) - Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*)\|_{l_2} = o\left(\|Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*) - Z(\Delta^0)\|_{l_2}\right). \quad (24)$$

Отсюда следует в силу (24) и (19), что

$$\begin{aligned} Z(\tilde{\Delta}) &= Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*) + O\left(\|Z(\tilde{\Delta}) - Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*)\|_{l_2}\right) = \\ &= Z(\Delta^0) + (Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*) - Z(\Delta^0)) + O\left(\|Z(\tilde{\Delta}) - Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*)\|_{l_2}\right) = \\ &= Z(\Delta^0) + (Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*) - Z(\Delta^0)) + o\left(\|Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*) - Z(\Delta^0)\|_{l_2}\right) \in W^*, \end{aligned} \quad (25)$$

если $Z(\Delta^0) \in W^*$, где W^* есть отображение W в l_2 .

Так как

$$Z(\Delta^0 + \delta \Delta^*) - Z(\Delta^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Z(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i^* + o(\|\delta \Delta^*\|) = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial Z(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i + o(\alpha),$$

где не все $\frac{\partial Z(\Delta^0)}{\partial \Delta_i}$ одновременно равны нулю, то (25) принимает следующий вид:

$$Z(\tilde{\Delta}) = Z(\Delta^0) + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial Z(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i + o(\alpha) \in W^*, \text{ если } Z(\Delta^0) \in W^*. \quad (26)$$

Последний вывод по определению [26, 27] означает, что отображение

$h^* = (h_k^*)$; $h_k^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i$ каждого вектора $\tilde{h}$ из (12), (13) в l_2 есть касательный вектор одновременно к $M^*(I_0)$ и $N^*(\varepsilon_0)$ в точке $Z(\Delta^0)$, так как всякий вектор $\tilde{h}$ является касательным одновременно к $M(I_0)$ и $N(\varepsilon_0)$ согласно утверждению 1.

Используя далее возможность представления вида (15)

$$f(Z + \alpha q) = f(Z) + \alpha \frac{\partial f(Z)}{\partial q} + o(\alpha); \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$$

для дифференцируемых по любому направлению q функций f , заданных на элементах Z нормированного пространства l_2 [1], можно далее совершенно аналогично выводу равенства

$\frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} = 0$ при доказательстве утверждения 1 показать, что производные отображений $I(\Delta)$ и

$\Phi(\Delta)$ по всем направлениям h^* равны нулю в точке $Z(\Delta^0)$. Сказанное завершает доказательство утверждения 2 $\square$.

Возвращаясь к анализу множеств $M^*(I_0)$ и $N^*(\varepsilon_0)$, рассмотрим теперь функцию максимума

$$\Phi^*(Z) = \max_{x \in \Omega_m} \sum_{k=1}^{\infty} z_k \eta_k(x), \quad Z(\Delta) \subset Z = (z_k) \in l_2, \quad \Delta \in G_n, \quad (27)$$

и ее производную по направлениям $h^* = (h_k^*)$ [1] в точке $Z(\Delta^0)$:

$$\frac{\partial \Phi(Z(\Delta^0))}{\partial h^*} = \max_{x_j^0} \sum_{k=1}^{\infty} h_k^* \eta_k(x_j^0), \quad j = \overline{1, R^*}. \quad (28)$$

Поскольку утверждение 1 справедливо для каждого вектора $\pm \tilde{h}$ в силу соотношений (12), (13), то согласно утверждению 2

$$\frac{\partial \Phi^*(Z(\Delta^0))}{\partial h^*} = \frac{\partial \Phi^*(Z(\Delta^0))}{\partial(-h^*)} = 0, \quad (29)$$

откуда, в соответствии с (28) будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k^* \eta_k(x_j^0) = 0, \quad j = \overline{1, R^*}. \quad (30)$$

Очевидно, что $N^*(\varepsilon_0) \subset N^{**}(\varepsilon_0) = \{Z \in I_2 : \Phi^*(Z) \leq \varepsilon_0\}$, и все касательные к $N^*(\varepsilon_0)$ векторы h^* являются касательными также и к $N^{**}(\varepsilon_0)$ в точке $Z(\Delta^0)$, причем $N^{**}(\varepsilon_0)$ - выпуклое множество в I_2 [1] с непустой внутренностью. Тогда к $N^{**}(\varepsilon_0)$ можно провести, по крайней мере, одну опорную гиперплоскость Γ через граничную точку $Z(\Delta^0)$, такую, что [28]

$$\Gamma = \left\{ Z \in I_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z_k = b \right\}; \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z_k(\Delta^0) = b; \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z_k \leq b, \quad Z \in N^{**}(\varepsilon_0), \quad (31)$$

где $\beta = (\beta_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, есть нормальный вектор к Γ и b - некоторая константа.

Справедливо следующее

У т в е р ж д е н и е 3. Все касательные векторы h^* лежат в любой из опорных гиперплоскостей (31).

Доказательство утверждения 3. Пусть, согласно (26),

$$Z(\tilde{\Delta}) = Z(\Delta^0) + \alpha h^* + o(\alpha) \in N^{**}(\varepsilon_0) \quad \text{и} \quad h^* \notin \Gamma.$$

Тогда в соответствии с (31) и (29)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z_k(\Delta^0) + \alpha h_k^*) \neq b, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z_k(\Delta^0) = b \quad \text{и} \quad \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k h_k^* > 0$$

при соответствующем выборе знака α , который можно принять любым, заменяя, если потребуется, h^* на $-h^*$. Но в таком случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z_k(\tilde{\Delta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z_k(\Delta^0) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k h_k^* + o(\alpha) > b,$$

что невозможно при $Z(\tilde{\Delta}) \in N^{**}(\varepsilon_0)$ в силу неравенства обратного знака в (31). Полученное противоречие доказывает утверждение 3 $\square$.

Определим теперь аналитическое представление касательных векторов h^* и условие принадлежности $h^* \in \Gamma$.

Согласно теоремам о неявных функциях, равенство $I(\Delta) - I_0 = 0$ определяет в условиях (5) для некоторого $p \in \overline{1, n}$ переменную Δ_p как однозначную непрерывно дифференцируемую функцию $\Delta_p = g(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{p-1}, \Delta_{p+1}, \dots, \Delta_n, I_0)$ в достаточно малой окрестности $Q(\Delta^0) \in \text{int } G_n$ точки Δ^0 . Отсюда получаем в соответствии с (14) следующее параметрическое представление $M^*(I_0)$ в окрестности $Z(\Delta^0)$:

$$\begin{aligned} z_k &= \tilde{z}_k(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{p-1}, \Delta_{p+1}, \dots, \Delta_n) = \\ &= z_k(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{p-1}, g(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{p-1}, \Delta_{p+1}, \dots, \Delta_n, I_0), \Delta_{p+1}, \dots, \Delta_n), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Положим здесь $\Delta_i = \Delta_i(\psi)$, $\Delta_i^0 = \Delta_i(\psi_0)$; $\psi \in [\psi_0 - a, \psi_0 + a]$, $a > 0$, $i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n$, где $\Delta_i(\psi)$ - произвольные достаточно гладкие функции скалярной переменной ψ , отображающие точку Δ^0 при некотором значении $\psi = \psi_0$.

В таком случае получим вместо (32)

$$z_k = \tilde{z}_k(\Delta(\psi)) = z_k^*(\psi), \quad k = 1, 2, \dots$$

Если $Z^*(\psi_0) = Z(\Delta^0) \in M^*(I_0)$; $Z^*(\psi_0 + \delta\psi) = Z(\Delta^0 + \delta\Delta^0) \in M^*(I_0)$, то в силу разложения в ряд Тейлора

$$z_k^*(\psi_0 + \delta\psi) = z_k^*(\psi_0) + \frac{dz_k^*(\psi_0)}{d\psi} \delta\psi + o(\delta\psi), \quad \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{o(\delta\psi)}{\delta\psi} = 0, \quad k=1,2,\dots$$

по определению получаем, что $\frac{dZ^*(\psi_0)}{d\psi} = \left(\frac{dz_k^*(\psi_0)}{d\psi} \right)$, $k=1,2,\dots$, есть касательный вектор к

$M^*(I_0)$ в точке $Z(\Delta^0)$ и, следовательно, все векторы h^* , касательные в точке $Z(\Delta^0)$ одновременно к $M^*(I_0)$ и $N^*(\varepsilon_0)$, согласно утверждению 2, представляются в виде

$$h_k^* = \frac{dz_k^*(\psi_0)}{d\psi} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \mu_{ki} \Delta'_i(\psi_0); \quad \mu_{ki} = \frac{\partial z_k(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} + \frac{\partial z_k(\Delta^0)}{\partial \Delta_p} \frac{\partial g(\Delta^0, I_0)}{\partial \Delta_i}. \quad (33)$$

Если $h^* \in \Gamma$, согласно утверждению 3, то в соответствии с (31), (33)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k h_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \mu_{ki} \Delta'_i(\psi_0) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \Delta'_i(\psi_0) \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mu_{ki} = 0. \quad (34)$$

Поскольку последнее соотношение должно выполняться в силу утверждения 3 для любых $\Delta'_i(\psi_0)$, то из (34) получаем следующее необходимое и достаточное условие принадлежности всех касательных векторов h^* опорной гиперплоскости Γ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mu_{ki} = 0, \quad i=1,2,\dots, p-1, p+1,\dots, n. \quad (35)$$

Для дальнейшего потребуется

Л е м м а 1. Равенства

$$\sum_{j=1}^R A_j \eta_k(x_j) = 0, \quad k=1,2,\dots \quad (36)$$

выполняются для всех $k=1,2,\dots$ в любых $R>1$ различающихся точках $x_j \in \Omega_m$, $j=\overline{1,R}$, $1 < R < \infty$ только тогда, когда все коэффициенты A_j , $j=\overline{1,R}$ равны нулю.

Доказательство леммы 1. Пусть все равенства (36) выполняются в некоторых $R>1$ точках x_j при не всех A_j , равных нулю, и пусть $f(x) \in L_{2,p}[\Omega_m]$ - некоторая функция, удовлетворяющая условию $\sum_{j=1}^R A_j f(x_j) \neq 0$. Тогда, используя, подобно (14), разложение $f(x)$ в ряд Фурье с коэффициентами C_k по системе функций $\eta_k(x)$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^R A_j f(x_j) = \sum_{j=1}^R A_j \sum_{k=1}^{\infty} C_k \eta_k(x_j) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sum_{j=1}^R A_j \eta_k(x_j) \neq 0,$$

что невозможно в условиях (36). Полученное противоречие доказывает лемму $\square$.

Теперь установим справедливость следующего предложения.

У т в е р ж д е н и е 4. При выполнении условия (7) для любой опорной гиперплоскости Γ существует в точке Δ^0 такое направление $s^* \in \Gamma$, $\|s^*\|=1$, что

$$\frac{\partial \Phi^*(Z(\Delta^0))}{\partial s^*} \neq 0. \quad (37)$$

Доказательство утверждения 4. Предположим противное, и пусть

$$\frac{\partial \Phi^*(Z(\Delta^0))}{\partial s^*} = \frac{\partial \Phi^*(Z(\Delta^0))}{\partial (-s^*)} = 0 \quad \text{для всех } s^* \in \Gamma,$$

откуда в силу выражения (28) получаем подобно (30), что

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^* \eta_k(x_j^0) = 0, \quad j=\overline{1,R^*}, \quad \text{для всех } s^* = (s_k^*) \in \Gamma. \quad (38)$$

Поскольку $s^* \in \Gamma$, то, согласно (31) и также, как в (34),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k s_k^* = 0 \text{ для всех } s^* = (s_k^*) \in \Gamma. \quad (39)$$

Из соотношений (38), (39) следует, что тогда

$$\eta_k(x_1^0) = \eta_k(x_2^0) = \dots = \eta_k(x_{R^*}^0) = \beta_k \text{ для всех } k=1,2,\dots, \quad (40)$$

где $R^* \geq 2$ по условию (7). Но в таком случае равенства (36) выполняются для $R = R^* \geq 2$ при любых отличных от нуля коэффициентах A_j , удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^{R^*} A_j = 0$, что невозможно в силу леммы 1. Полученное противоречие доказывает утверждение 4 $\square$.

Замечание. Отметим, что условие (7), согласно которому здесь $R^* \geq 2$, существенно для справедливости утверждения 4. Если $R^* = 1$, то гиперплоскость

$$\Gamma_1 = \left\{ Z \in I_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(x_1^0) z_k = \varepsilon_0 \right\}, \quad (41)$$

где x_1^0 - единственная точка максимума функции $F(x, \Delta^0)$, проходит через точку $Z(\Delta^0)$ и является, очевидно, опорной для $N^{**}(\varepsilon_0)$ по определению этого множества. Тогда в качестве Γ в (31) можно выбрать Γ_1 и, следовательно, в (31) выполняются равенства (40) для одной точки x_1^0 при $b = \varepsilon_0$, $\beta_k = \eta_k(x_1^0)$, $k=1,2,\dots$. В таком случае соотношения (38) и (39) при $R^* = 1$ оказываются тождественными, и значит $\frac{\partial \Phi(Z(\Delta^0))}{\partial s^*} = 0$ для всех $s^* \in \Gamma$, вопреки утверждению 4. При $R^* \geq 2$ существуют более одной гиперплоскости Γ_j , $j=1, \overline{R^*}$ вида (41) и только в этом случае верно утверждение 4 $\square$.

Рассмотрим далее в окрестности $Q(\Delta^0) \in \text{int } G_n$ точки Δ^0 наряду с исходной некоторую деформированную задачу для $\Delta \in Q(\Delta^0)$, отличающуюся от прежней только заменой $F(x, \Delta)$ в (2) на функцию $F_1(x, \Delta)$, которая определяется в пределах $Q(\Delta^0)$ разложением вида (14)

$$F_1(x, \Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^{(1)}(\Delta) \eta_k(x)$$

с коэффициентами

$$z_k^{(1)}(\Delta) = z_k(\Delta) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \gamma_{ki}(\Delta_i - \Delta_i^0), \quad k=1,2,\dots \quad (42)$$

Здесь $\gamma_{ki} : \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{ki}^2 = \text{const} < \infty$, $i=1,2,\dots, p-1, p+1,\dots, n$, - некоторые достаточно малые константы.

Как следует из (14) и (42), в таком случае

$$F_1(x, \Delta^0) \equiv F(x, \Delta^0), x \in \Omega_m; \quad \Phi_1(\Delta^0) = \max_{x \in \Omega_m} F_1(x, \Delta^0) = F(x_j^0, \Delta^0) = \Phi(\Delta^0) = \varepsilon_0, \quad j=1, \overline{R^*}. \quad (43)$$

В деформированной задаче множество $N(\varepsilon_0)$ заменяется множеством

$$N_1(\varepsilon_0) = \{ \Delta \in G_n : \Phi_1(\Delta) = \max_{x \in \Omega_m} F_1(x, \Delta) \leq \varepsilon_0 \}, \text{ а отображение } M_1^*(I_0) \text{ множества } M(I_0) \text{ и каса-}$$

тельные векторы $h^{**} = (h_k^{**})$ к $M_1^*(I_0)$ в точке $Z(\Delta^0)$ описываются вместо (32), (33) на основании (42) соответственно выражениями

$$z_k^{(1)} = \tilde{z}_k^{(1)}(\Delta) = \tilde{z}_k(\Delta) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \gamma_{ki}(\Delta_i - \Delta_i^0), \quad k=1,2,\dots; \quad (44)$$

$$h_k^{**} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \mu_{ki}^* \Delta_i'(\psi_0); \quad \mu_{ki}^* = \mu_{ki} + \gamma_{ki}, \quad k=1,2,\dots \quad (45)$$

Выберем теперь γ_{ki} в (42) так, чтобы все векторы h^{**} в (45) лежали вместе с h^* в опорной гиперплоскости (31). Это требование удовлетворяется, если вместе с (35) выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \gamma_{ki} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n, \quad (46)$$

что показывается по схеме вывода соотношений (35).

У т в е р ж д е н и е 5. При выполнении условий (46) точка Δ^0 является локальным решением $\Delta^1 \in Q(\Delta^0)$ сформулированной выше деформированной задачи.

Доказательство утверждения 5. Предполагая противное, будем иметь

$$I(\Delta^1) = \tilde{I} < I(\Delta^0) = I_0 \quad \text{при} \quad \Phi_1(\Delta^1) \leq \varepsilon_0.$$

В силу условий (4), (6), малости γ_{ki} и непрерывности рассматриваемых функций по γ_{ki} и Δ , в точке Δ^1 существует такое направление $s^1 \in G_n$, $\|s^1\| = 1$, что $\frac{\partial \Phi_1(\Delta^1)}{\partial s^1} < 0$, причем $\frac{\partial I(\Delta^1)}{\partial s^1} \geq 0$, если $\Delta^1 \in Q(\Delta^0)$ есть локальное решение деформированной задачи.

Но тогда в соответствии с (5) найдется вектор $s^2 \in G_n$, $\|s^2\| = 1$, достаточно мало отличающийся по норме в E^n от s^1 , для которого $\frac{\partial I(\Delta^1)}{\partial s^2} > 0$, $\frac{\partial \Phi_1(\Delta^1)}{\partial s^2} < 0$. Используя выражения вида (15), приходим в таком случае к выводу о существовании точки $\Delta^2 \in Q(\Delta^0)$: $I(\Delta^2) = I_0 > \tilde{I}$; $\Phi_1(\Delta^2) < \varepsilon_0$.

Последнее означает, что некоторая внутренняя точка Δ^2 множества $N_1(\varepsilon_0) = \{\Delta \in G_n : \Phi_1(\Delta) \leq \varepsilon_0\}$ принадлежит множеству $M(I_0)$, а значит пересечение $M(I_0)$ с $\text{int } N_1(\varepsilon_0)$ не является пустым множеством, т.е. $M(I_0) \cap \text{int } N_1(\varepsilon_0) \neq \emptyset$. Отсюда следует для малых γ_{ki} , сохраняющих выполнение условия d) теоремы 1 в деформированной задаче, аналогичный вывод для отображений $M_1^*(I_0)$ и $N_1^*(\varepsilon_0)$:

$$M_1^*(I_0) \cap \text{int } N_1^*(\varepsilon_0) \neq \emptyset \Rightarrow M_1^*(I_0) \cap \text{int } N^{**}(\varepsilon_0) \neq \emptyset,$$

что показывается по схеме доказательства утверждения 2.

В таком случае $Q^*(Z(\Delta^2), \delta) \in \text{int } N^{**}(\varepsilon_0)$, где $Q^*(Z(\Delta^2), \delta)$ - шар достаточно малого радиуса δ с центром в точке $Z(\Delta^2)$. Если h^{**} - касательный вектор к $M_1^*(I_0)$ в точке $Z(\Delta^0)$, то, подобно (26), будем иметь $Z(\Delta^2) = Z(\Delta^0) + \alpha h^{**} + o(\alpha) \in M_1^*(I_0)$; $Z(\Delta^0) \in M_1^*(I_0)$, и так как $Z(\Delta^2) - (Z(\Delta^0) + \alpha h^{**}) = o(\alpha)$, то при достаточно малом α получаем, что $Z(\Delta^0) + \alpha h^{**} \in Q^*(Z(\Delta^2), \delta) \in \text{int } N^{**}(\varepsilon_0)$ и, следовательно, $\alpha h^{**} \in \text{int } N^{**}(\varepsilon_0)$. Но тогда вектор h^{**} не может принадлежать опорной гиперплоскости Γ к $N^{**}(\varepsilon_0)$, проходящей через точку $Z(\Delta^0)$ по определению Γ , что противоречит условиям (46), при выполнении которых $h^{**} \in \Gamma$. Полученное противоречие доказывает утверждение 5 $\square$.

Покажем теперь, что можно так выбрать опорную гиперплоскость (31), коэффициенты γ_{ki} в (42), значения $\Delta'_i(\psi_0)$ в (45), чтобы все касательные к $M_1^*(I_0)$ векторы h^{**} , принадлежащие Γ вместе с h^* в условиях (46), в то же время не являлись бы касательными векторами к $N^{**}(\varepsilon_0)$, а значит, и к $N_1^*(\varepsilon_0)$, т.е. в соответствии с утверждением 4 для всех h^{**} не выполнялись бы, в противовес (29), равенства

$$\frac{\partial \Phi^*(Z(\Delta^0))}{\partial h^{**}} = \frac{\partial \Phi^*(Z(\Delta^0))}{\partial (-h^{**})} = 0. \quad (47)$$

Возможность выбора h^{**} , удовлетворяющих указанным требованиям, определяется в соответствии с утверждением 4 существованием направлений в Γ с ненулевой производной функции максимума $\Phi^*(Z)$.

Равенства (47) в силу (28), (45) приводятся, подобно (30), к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k^{**} \eta_k(x_j^0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \mu_{ki}^* \Delta'_i(\psi_0) \right] \eta_k(x_j^0) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \Delta'_i(\psi_0) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ki}^* \eta_k(x_j^0) \right] = 0, \quad j = \overline{1, R^*}. \quad (48)$$

Положим в (48) $\Delta'_{i_v}(\psi_0) = 0$, $v = \overline{1, n - R^* - 1}$ для любых $n - R^* - 1$ значений $i_v \in \{1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n\}$, если $R^* < n-1$ в условиях исходного предположения $R^* \leq n-1$. Тогда приходим к выводу, что производные (47) не равны нулю для всего ограниченного указанным образом множества векторов h^{**} , если однородная система $R^* \leq n-1$ линейных уравнений

$$\sum_{r=1}^{R^*} \Delta'_{i_r}(\psi_0) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ki_r}^* \eta_k(x_j^0) \right] = 0, \quad j = \overline{1, R^*}, \quad (49)$$

где $i_r, r = \overline{1, R^*}$ - все R^* значений $i \in \overline{1, n}$ за исключением $i = i_v$ и $i = p$, не имеет нетривиальных решений $\Delta'_{i_r}(\psi_0)$, $r = \overline{1, R^*}$, для чего достаточно, чтобы определитель этой системы был отличен от нуля:

$$\det \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ki_r}^* \eta_k(x_j^0) \right\} \neq 0; \quad r, j = \overline{1, R^*}. \quad (50)$$

Выберем теперь Γ по (31) так, чтобы условия (46) и (50) были совместны. Заметим, что не всякая опорная гиперплоскость удовлетворяет этим требованиям. Действительно, опорными для множества $N^{**}(\varepsilon_0)$ в точке $Z(\Delta^0)$ являются, очевидно, все гиперплоскости вида (41)

$$\Gamma_j = \left\{ Z \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} z_k \eta_k(x_j^0) = \varepsilon_0 \right\}, \quad j = \overline{1, R^*}, \quad (51)$$

число которых $R^* \geq 2$, и их произвольные линейные комбинации

$$\Gamma_{\Sigma} = \left\{ Z \in l_2 : \sum_{j=1}^{R^*} C_j \sum_{k=1}^{\infty} z_k \eta_k(x_j^0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{R^*} C_j \eta_k(x_j^0) \right) z_k = \varepsilon_0, 0 \leq C_j \leq 1, \sum_{j=1}^{R^*} C_j = 1 \right\}. \quad (52)$$

Для всех Γ_j и Γ_{Σ} по (51), (52) соотношения (46) и (50) не могут быть выполнены одновременно с равенством (35), которое является следствием утверждения 3. Действительно, если в (31) $\Gamma = \Gamma_{\Sigma}$, то

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{R^*} C_j \eta_k(x_j^0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (53)$$

Рассматривая теперь равенства (35) и (46) только для $i = i_r$ в (50) и складывая их, получим в силу (45), (53)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\mu_{ki_r} + \gamma_{ki_r}) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mu_{ki_r}^* = \sum_{j=1}^{R^*} C_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ki_r}^* \eta_k(x_j^0) \right) = 0, \quad r = \overline{1, R^*}, \quad (54)$$

что означает линейную зависимость строк определителя системы уравнений (49), и следовательно, в данном случае обеспечить неравенство (50) невозможно. Отсюда, в частности, следует, что если $R^* = 1$, то условия (46) и (50) заведомо несовместимы при наличии единственной опорной гиперплоскости Γ_1 вида (51), что опять свидетельствует о сущности допущения (7) в формулировке теоремы 1.

Выберем далее любые две различающиеся точки x_j^0 из их общего числа $R^* \geq 2$. Пусть для определенности это будут x_1^0 и x_2^0 . Если все Γ_j в (51) - опорные гиперплоскости множества $N^{**}(\varepsilon_0)$ в точке $Z(\Delta^0)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k (\Delta^0) \eta_k(x_j^0) = \varepsilon_0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} z_k \eta_k(x_j^0) \leq \varepsilon_0, \quad Z \in N^{**}(\varepsilon_0); \quad j = \overline{1, R^*}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - z_k(\Delta^0)) \eta_k(x_1^0) \leq 0, \quad Z \in N^{**}(\varepsilon_0);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \eta_k(x_2^0) + \sum_{k=1}^{\infty} (z_k - z_k(\Delta^0)) \eta_k(x_1^0) \leq \varepsilon_0, \quad Z \in N^{**}(\varepsilon_0). \quad (55)$$

Поскольку $Z(\Delta^0)$ - граничная точка выпуклого множества $N^{**}(\varepsilon_0)$, то найдутся такие $k \in \{1, 2, \dots\}$, что разности $z_k - z_k(\Delta^0)$ не меняют знака в пределах $N^{**}(\varepsilon_0)$ (иначе любое направление в шаре с центром в $Z(\Delta^0)$ будет принадлежать $N^{**}(\varepsilon_0)$, что противоречит определению граничной точки). Тогда для любого из этих значений $k = k_1$ можно выбрать такое $\tilde{\eta}_{k_1} \neq \eta_{k_1}(x_1^0)$, что $(z_{k_1} - z_{k_1}(\Delta^0))\tilde{\eta}_{k_1} < (z_{k_1} - z_{k_1}(\Delta^0))\eta_{k_1}(x_1^0)$ для всех $Z \in N^{**}(\varepsilon_0)$. Но тогда в силу (55) будем иметь:

$$f^*(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \eta_k(x_2^0) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_1}}^{\infty} (z_k - z_k(\Delta^0)) \eta_k(x_1^0) + (z_{k_1} - z_{k_1}(\Delta^0)) \eta_{k_1} \leq \varepsilon_0, \quad Z \in N^{**}(\varepsilon_0),$$

причем строгое равенство достигается здесь при $Z = Z(\Delta^0)$. Следовательно, гиперплоскость $\Gamma^* = \{Z \in l_2 : f^*(Z) = \varepsilon_0\}$, не совпадающая ни с одной из Γ_j и Γ_Σ в (51), (52), является в то же время опорной к множеству $N_1^*(\varepsilon_0)$ в точке $Z(\Delta^0)$ при произвольных $\tilde{\eta}_{k_1} \neq \eta_{k_1}(x_1^0)$, что и доказывает существование такой Γ в (31) при соответствующем выборе β_k и b , для которой обеспечивается совместность условий (35), (46) и (50).

Согласно теореме Рисса-Фишера [25] при любых $\gamma_{ki} : \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{ki}^2 < \infty$ найдутся такие функции $\varphi_0^0(x)$, $\varphi_r^0(x)$, $r = \overline{1, R^*}$, и $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, в $L_{2,p}[\Omega_m]$, что

$$\varphi_0^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \eta_k(x); \quad \varphi_r^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ki_r} \eta_k(x); \quad \varphi_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{ki} \eta_k(x).$$

Здесь $\varphi_0^0(x)$ и $\varphi_r^0(x)$ фиксируются значениями β_k в (31) и μ_{ki_r} в (33), а $\varphi_i(x)$ зависят от выбора γ_{ki} в (42).

В таком случае

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \gamma_{ki} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \int_{\Omega_m} \varphi_i(x) \rho(x) \eta_k(x) d\mu = \int_{\Omega_m} \varphi_i(x) \rho(x) \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \eta_k(x) d\mu = \\ &= \int_{\Omega_m} \varphi_i(x) \varphi_0^0(x) \rho(x) d\mu, \quad i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n, \end{aligned}$$

и соотношения (46), (50) принимают вид

$$\int_{\Omega_m} \varphi_i(x) \varphi_0^0(x) \rho(x) d\mu = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n; \quad (56)$$

$$\det\{\varphi_r^0(x_j^0) + \varphi_{i_r}(x_j^0)\} \neq 0; \quad j, r = \overline{1, R^*}. \quad (57)$$

Задавая произвольную совокупность достаточно малых значений $\varphi_{i_r}(x_j^0)$, обеспечивающих выполнение неравенства (57), можно затем множеством различных способов выбрать каждую из функций $\varphi_i(x)$ требуемого порядка малости с фиксированными значениями $\varphi_{i_r}(x_j^0)$, исходя из i -того равенства (56).

Теперь искомые коэффициенты γ_{ki} , при которых одновременно соблюдаются условия (46) и (50), могут быть найдены как соответствующие коэффициенты разложения $\varphi_i(x)$ в ряд по системе $\{\eta_k(x)\}$.

Так как в соответствии с утверждением 5 локальное решение сформулированной выше деформированной задачи с определенными указанным образом коэффициентами γ_{ki} совпадает в окрестности $Q(\Delta^0)$ с Δ^0 , для нее сохраняются, ввиду малости γ_{ki} и непрерывности рассматриваемых функций по совокупности аргументов, условия а) - е) теоремы 1 и выполняется тождество в (43), то для такой задачи так же, как и для исходной, в предположении $R^* < n$, имеют

место в тех же точках x_j^0 соотношения (12), (13) после замены $F(x, \Delta^0)$ на $F_1(x, \Delta^0)$ и, как следствие, (утверждение 2) существуют общие касательные векторы $\tilde{h}^{**}$ к $M_1^*(I)$ и $N^{**}(\varepsilon_0)$, для которых, аналогично (30), выполняются равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}_k^{**} \eta_k(x_j^0) = 0, \quad j = \overline{1, R^*}. \quad (58)$$

Среди нетривиальных решений однородной системы уравнений (12) с рангом $r^* < R^* + 1 \leq n-1$ при $R^* < n-1$ содержатся такие, что $\tilde{h}_{i_v} = 0, v = \overline{1, n-R^*-1}$, для некоторых $n-R^*-1$ значений $i_v \in \{1, n\}$, $i_v \neq p$, поскольку r^* базисных переменных этой системы линейно выражаются через $n-r^*$ свободных неизвестных, число которых больше единицы при $r^* < n-1$.

Данный вывод остается справедливым вместе с соотношениями (12) и для деформированной задачи и, следовательно, в силу утверждения 2 при $R^* < n-1$ существуют касательные векторы $\tilde{h}^{**}$, для которых $\Delta'_{i_v}(\psi_0) = 0$ в выражениях (45). Тогда равенства (58) в силу соотношений (45) редуцируются при всех $R^* \leq n-1$ к однородной системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}_k^{**} \eta_k(x_j^0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \mu_{ki}^* \Delta'_i(\psi_0) \right) \eta_k(x_j^0) = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n \Delta'_i(\psi_0) \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ki}^* \eta_k(x_j^0) = \sum_{r=1}^{R^*} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ki_r}^* \eta_k(x_j^0) \right) \Delta'_{i_r}(\psi_0) = 0, \quad j = \overline{1, R^*} \end{aligned} \quad (59)$$

с нетривиальным решением относительно $\Delta'_{i_r}(\psi_0)$, где так же, как в (49), $i_r, r = \overline{1, R^*}$ - все значения $i \in \{1, n\}$, за исключением i_v и p .

С другой стороны, система (59) не может иметь нетривиальных решений в условиях (50).

С учетом тождества в (43) полученное противоречие означает, что неравенство $R_x < n$ в системе уравнений вида (10) невозможно как для деформированной, так и для исходной задачи, откуда в итоге непосредственно следует утверждение (8) теоремы 1.

2⁰. Рассмотрим далее задачу (1), (2) при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}$. В силу (7) достаточно рассмотреть здесь случай $n \geq 2$. Вопреки утверждению (9) теоремы 1 предположим теперь, что $R_x = R^{**} < n+1$, где в соответствии с (7) $R^{**} \geq 2$.

При $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}$ искомая точка Δ^0 является решением минимаксной задачи

$$\Phi(\Delta) = \max\{F(x, \Delta) : x \in \Omega_m\} \rightarrow \min, \quad \Delta \in G_n. \quad (60)$$

Условие $\frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial h} \geq 0 \quad \forall h \in K(\Delta^0), \|h\|=1$, при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}$ приводит при $R^{**} < n+1$, подобно (12), (13), к существованию таких возможных направлений $\bar{h} \in E^n, \|\bar{h}\|=1$, для которых

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x_j^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} \bar{h}_i = 0, \quad j = \overline{1, R^{**}}; \quad \frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \bar{h}} = \max_{x_j^0} \left(\frac{\partial F(x_j^0, \Delta^0)}{\partial \Delta}, \bar{h} \right) = 0.$$

Отсюда, опять используя разложение (14) функции $F(x, \Delta)$ в ряд Фурье, приходим по схеме доказательства утверждений 1 и 2 к существованию касательных векторов $\bar{h}^* = (\bar{h}_k^*), k = 1, 2, \dots$, к множеству $N^{**}(\varepsilon_{\min}^{(n)}) = \{Z \in l_2 : \Phi^*(Z) \leq \varepsilon_{\min}^{(n)}\}$ в точке $Z(\Delta^0)$, которые являются отображением в l_2 направлений $\bar{h}$; лежат в опорной гиперплоскости (31) (в соответствии с утверждением 3 и, подобно (29), (30), удовлетворяют равенствам:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{h}_k^* \eta_k(x_j^0) = 0; \quad j = \overline{1, R^{**}}. \quad (61)$$

Здесь $\Phi^*(Z)$ по-прежнему определяется согласно (27). Аналогично (33) получаем представление $\bar{h}^*$ в виде

$$\bar{h}_k^* = \frac{dz_k^*(\psi_0)}{d\psi} = \sum_{i=1}^n \bar{\mu}_{ki} \Delta'_i(\psi_0); \quad \bar{\mu}_{ki} = \frac{\partial z_k(\Delta^0)}{\partial \Delta_i}, \quad k=1,2,\dots, \quad (62)$$

где в отличие от (33) исключается ограничение $i \neq p$, коэффициенты $\bar{\mu}_{ki}$ содержат лишь первое слагаемое μ_{ki} в (33). Очевидно, что по определению векторы $\bar{h}^*$ в форме (62) являются одновременно касательными векторами в точке Δ^0 к параметрически задаваемому разложению (14) множеству $K^* = \{Z \in l_2 : z_k = z_k(\Delta), k=1,2,\dots, \Delta \in G_n\}$.

Перейдем теперь, по аналогии с п. 1⁰, в окрестности $Q(\Delta^0)$ к деформированной минимаксной задаче вместо исходной (60):

$$\Phi_1(\Delta) = \max \{F_1(x, \Delta) : x \in \Omega_m\} \rightarrow \min, \quad \Delta \in G_n, \quad (63)$$

в условиях (42), (43), где, как и везде далее, опять исключим неравенство $i \neq p$.

Тогда K^* заменяется множеством

$$K^{**} = \left\{ Z \in l_2 : z_k = z_k(\Delta) + \sum_{i=1}^n \gamma_{ki}(\Delta_i - \Delta_i^0), k=1,2,\dots, \Delta \in G_n \right\} \quad \text{и, подобно (45), касательные век-}$$

торы $\bar{h}^{**}$ к K^{**} в точке $Z(\Delta^0)$ описываются на основании (62) следующими выражениями:

$$\bar{h}_k^{**} = \sum_{i=1}^n \bar{\mu}_{ki}^* \Delta'_i(\psi_0); \quad \bar{\mu}_{ki}^* = \bar{\mu}_{ki} + \gamma_{ki}, \quad k=1,2,\dots. \quad (64)$$

Аналогично (35), (46) получим, что все $\bar{h}^{**}$ лежат вместе с $\bar{h}^*$ в опорной гиперплоскости (31), если выполняются соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \bar{\mu}_{ki} = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \gamma_{ki} = 0; \quad i = \overline{1, n}. \quad (65)$$

В условиях (65) опять оказывается справедливым утверждение 5 о совпадении решений Δ^1 и Δ^0 деформированной и исходной задач, рассматриваемых в $Q(\Delta^0)$. Действительно, в противном случае $\Phi_1(\Delta^1) < \Phi_1(\Delta^0) = \Phi(\Delta^0)$; $\Phi^*(Z(\Delta^1)) < \Phi^*(Z(\Delta^0))$, где $\Phi^*(Z)$ определяется по (27); $Z(\Delta^1) \in K^{**}$ для деформированной задачи и, следовательно, $Z(\Delta^1)$ есть внутренняя точка множества $N^{**}(\varepsilon_{\min}^{(n)})$, где $\varepsilon_{\min}^{(n)} = \Phi(\Delta^0)$, т.е. пересечение K^{**} с внутренностью $N^{**}(\varepsilon_{\min}^{(n)})$ не является пустым множеством:

$$K^{**} \cap \text{int } N^{**}(\varepsilon_{\min}^{(n)}) \neq \emptyset. \quad (66)$$

Отсюда по схеме завершающей части доказательства утверждения 5 приходим к выводу, что $\bar{h}^{**} \notin \Gamma$, а это невозможно, если выполняются равенства (65).

Теперь, точно так же, как и для случая $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}$, опираясь на утверждение 4, устанавливается при $R^{**} \geq 2$ возможность такого выбора опорной гиперплоскости Γ и касательных к K^{**} векторов $\bar{h}^{**}$, принадлежащих Γ вместе с $\bar{h}^*$ в условиях (65), при котором все $\bar{h}^{**}$ не являются одновременно касательными векторами к $N^{**}(\varepsilon_{\min}^{(n)})$.

Аналогично предыдущему п. 1⁰ такая возможность сводится к совместности условий вида (46), (50), которые в данном случае, подобно (56), (57), записываются следующим образом:

$$\int_{\Omega_m} \varphi_i(x) \varphi_0^0(x) \rho(x) d\mu = 0; \quad i = \overline{1, n}; \quad (67)$$

$$\det \{ \bar{\varphi}_r^0(x_j^0) + \varphi_{i_r}(x_j^0) \} \neq 0; \quad j, r = \overline{1, R^{**}}, \quad (68)$$

где $\bar{\varphi}_r^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}_{ki_r} \eta_k(x)$, все остальные функции определяются так же, как в (56), (57), и способ выбора достаточно малых коэффициентов γ_{ki} в (42), удовлетворяющих соотношениям (67), (68), остается прежним. Далее, следуя схеме последнего этапа доказательства по п. 1⁰, получаем, что если Δ^0 является одновременно локальным решением деформированной задачи (63), то в условиях (43) при $R^{**} < n+1$ должны выполняться, аналогично (61), равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{h}_k^{**} \eta_k(x_j^0) = 0; \quad j = \overline{1, R^{**}},$$

которые, с другой стороны, оказываются невыполнимыми в условиях (68).

Полученное противоречие доказывает утверждение (9) теоремы 1, что и завершает ее доказательство в целом $\square$.

Заметим в заключение, что альтернансные свойства (8) и (9) для решения задачи (1), (2), "не отягощенные" дополнительными признаками обобщенного альтернанса [18-21], устанавливаются теоремой 1 в условиях, существенно ослабленных и значительно проще проверяемых при практическом решении задач по сравнению с традиционными.

2. Минимаксная задача полубесконечного программирования

Перейдем теперь к рассмотрению задачи на минимакс:

$$I_1(\Delta) = \max\{F_0(y, \Delta) : y \in L_r, r \geq 1\} \rightarrow \min, \Delta \in G_n; \quad (69)$$

с ограничением (2)

$$\Phi(\Delta) = \max\{F(x, \Delta) : x \in \Omega_m, m \geq 1\} \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0 \geq \varepsilon_{\min}^{(n)} > 0.$$

Здесь L_r - связное компактное множество в E^r ; $F_0(y, \Delta)$ - заданная функция, непрерывная вместе со своими частными производными по совокупности аргументов на $L_r \times G_n$, и все остальные элементы определяются так же, как в задаче (1), (2).

Для характерных частных случаев, когда вместо самих функций $F_0(y, \Delta)$ или (и) $F(x, \Delta)$ рассматриваются их модули, задача приводится к виду (69), (2) с помощью преобразования, приведенного в замечании 1.

Подобно (3), будем всюду далее считать выполненным достаточное условие

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow \infty} I_1(\Delta) = \infty \quad (70)$$

существования решения задачи (2), (69) для всех $\varepsilon_0 : \varepsilon_{\min}^{(n)} < \varepsilon_0 \leq \bar{\varepsilon}$,

где

$$\bar{\varepsilon} = \Phi(\bar{\Delta}); \bar{\Delta} = \arg \inf\{I_1(\Delta) : \Delta \in G_n\}. \quad (71)$$

Замечание 2. Очевидно, что по определению (71) решение $\bar{\Delta}$ минимаксной задачи (69) без функциональных ограничений является одновременно решением задачи (69), (2) для всех $\varepsilon_0 \geq \bar{\varepsilon}$ $\square$.

Пусть, подобно условиям а) - е) теоремы 1 для всех $\varepsilon_0 : \varepsilon_{\min}^{(n)} \leq \varepsilon_0 \leq \bar{\varepsilon}$, при которых существует решение Δ^0 задачи (2), (69), выполняются следующие допущения, характеризующие искомую точку Δ^0 :

$$a_1) \Delta^0 \in \text{int } G_n; \quad (72)$$

b₁) для всех $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}$ и $I_1(\Delta^0) > \inf\{I_1(\Delta) : \Delta \in G_n\}$ найдутся такие векторы $\bar{s}, \bar{\bar{s}}$, $\|\bar{s}\| = 1, \|\bar{\bar{s}}\| = 1$, принадлежащие конусу $K(\Delta^0)$ возможных направлений множества G_n в точке Δ^0 , что производные в этой точке функций максимума $I_1(\Delta)$ и $\Phi(\Delta)$ по соответствующим направлениям отрицательны:

$$\frac{\partial I_1(\Delta)}{\partial \bar{s}} < 0; \frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \bar{\bar{s}}} < 0, \|\bar{s}\| = \|\bar{\bar{s}}\| = 1; \quad (73)$$

$$c_1) \text{ функции } \frac{\partial F_0(y, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} \text{ и } \frac{\partial F(x, \Delta^0)}{\partial \Delta_i}, i = \overline{1, n}, \text{ линейно независимы, соответственно, на}$$

$L_r \ni y$ и $\Omega_m \ni x$;

d₁) наряду со множеством $\Omega_m^\varepsilon(\Delta) = \{x \in \Omega_m : F(x, \Delta) = \Phi(\Delta) = \varepsilon\}$ в условии е) теоремы 1 всякому $\Delta \in G_n$ сопоставим множество $L_r^I(\Delta) = \{y \in L_r : F_0(y, \Delta) = I_1(\Delta)\}$ всех точек на L_r , в которых $F_0(y, \Delta)$ достигает своего максимального значения, равного $I_1(\Delta)$; тогда будем считать, что числа R_x и R_y различающихся точек, принадлежащих, соответственно, $\Omega_m^{\varepsilon_0}(\Delta^0)$ и $L_r^I(\Delta^0)$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\Delta = \Delta^0$, ограничиваются при выполнении (73) неравенствами

$$R_x \geq 2; R_y \geq 2. \quad (74)$$

Альтернансные свойства решений задачи (2), (69) в описанных условиях определяет, подобно теореме 1, следующим образом.

Т е о р е м а 2. Пусть $\Delta^0 = (\Delta_i^0)$, $i = \overline{1, n}$ - решение задачи (2), (69) и выполняются допущения $a_1) - d_1)$.

Тогда существуют R_x различных точек $x_j^0 \in \Omega_m^{\varepsilon_0}(\Delta^0)$, $j = \overline{1, R_x}$, и R_y различных точек $y_v^0 \in L_r^I(\Delta^0)$, $v = \overline{1, R_y}$, где

$$R_x + R_y = n + 1, \text{ если } \varepsilon_{\min}^{(n)} < \varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}; \quad (75)$$

$$R_x = n + 1, \text{ если } \varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}; \quad (76)$$

$$R_y = n + 1, \text{ если } \varepsilon_0 \geq \bar{\varepsilon}. \quad (77)$$

Доказательство теоремы 2

Поскольку для $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}$ и $\varepsilon_0 \geq \bar{\varepsilon}$ задача (2), (69) с учетом замечания 2 сводится к минимаксным задачам, соответственно $\Phi(\Delta) \rightarrow \min$, $\Delta \in G_n$ и $I_1(\Delta) \rightarrow \min$, $\Delta \in G_n$, то в условиях $a_1) - d_1)$ утверждения (76) и (77), по существу, повторяют доказанное ранее утверждение (9) теоремы 1 и, следовательно, остается рассмотреть случай (75). Доказательство равенства в (75) проводится по общей схеме доказательства теоремы 1.

В силу (74) достаточно рассмотреть (75) при $n \geq 4$. Вопреки утверждению (75) предположим теперь, что $R_x + R_y = R^* < n + 1$. Условие локального минимума $\frac{\partial I_1(\Delta^0)}{\partial h} \geq 0$ для допустимых направлений $h \in K(\Delta^0)$ при $\varepsilon_{\min}^{(n)} < \varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}$ приводит тогда, подобно (12), (13), к существованию возможных направлений $\tilde{h} = (\tilde{h}_i)$, $i = \overline{1, n}$, с нулевыми производными $\frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}}$ и $\frac{\partial I_1(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}}$ функций максимума $\Phi(\Delta)$ и $I_1(\Delta)$ в точке Δ^0 :

$$\frac{\partial \Phi(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} = \max_{x_j^0} \left(\frac{\partial F(x_j^0, \Delta^0)}{\partial \Delta}, \tilde{h} \right) = 0; \quad \frac{\partial I_1(\Delta^0)}{\partial \tilde{h}} = \max_{y_v^0} \left(\frac{\partial F_0(y_v^0, \Delta^0)}{\partial \Delta}, \tilde{h} \right) = 0; \quad \|\tilde{h}\| = 1; \quad (78)$$

$$j = \overline{1, R_x}; \quad v = \overline{1, R_y},$$

где

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x_j^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_0(y_v^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i = 0 \quad (79)$$

для всех $j = \overline{1, R_x}; \quad v = \overline{1, R_y}$.

Выполним теперь, аналогично (14), разложение $F(x, \Delta)$ и $F_0(y, \Delta)$ в ряды Фурье по некоторым полным ортонормированным с весами $\rho_F(x)$ и $\rho_{F_0}(y)$ системам функций $\{\eta_k^F(x)\} \in L_{2, \rho_F}[\Omega_m]$ и $\{\eta_k^{F_0}(y)\} \in L_{2, \rho_{F_0}}[L_r]$:

$$F(x, \Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^F(\Delta) \eta_k^F(x); \quad z_k^F(\Delta) = \int_{\Omega_m} F(x, \Delta) \rho_F(x) \eta_k^F(x) d\mu; \quad (80)$$

$$F_0(y, \Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k^{F_0}(\Delta) \eta_k^{F_0}(y); \quad z_k^{F_0}(\Delta) = \int_{L_r} F_0(y, \Delta) \rho_{F_0}(y) \eta_k^{F_0}(y) d\mu. \quad (81)$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, приходим к выводу, что векторы $\tilde{h}$ в (78), (79) являются одновременно касательными векторами в точке Δ^0 к множествам $P(I_{10}) = \{\Delta \in G_n : I_1(\Delta) \leq I_1(\Delta^0) = I_{10}\}$ и $N(\varepsilon_0) = \{\Delta \in G_n : \Phi(\Delta) \leq \varepsilon_0\}$, где $\Delta^0 \in P(I_{10}) \cap N(\varepsilon_0)$, а отображения

$h^{F_0} = (h_k^{F_0})$, $h_k^{F_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k^{F_0}(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i$, $k = 1, 2, \dots$ и $h^F = (h_k^F)$, $h_k^F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k^F(\Delta^0)}{\partial \Delta_i} \tilde{h}_i$, $k = 1, 2, \dots$, каждого вектора $\tilde{h}$ - касательными векторами в различающихся точках $\{z_k^{F_0}(\Delta^0)\}$ и $\{z_k^F(\Delta^0)\}$ к отобра-

жениям $P^*(I_{10})$ и $N^*(\varepsilon_0)$ в пространстве l_2 , соответственно, множеств $P(I_{10})$ и $N(\varepsilon_0)$. Аналогично (29), (30) получим тогда, что производные функций максимума

$$I_1^*(Z^{F_0}) = \max_{y \in L_r} \sum_{k=1}^{\infty} z_k^{F_0} \eta_k^{F_0}(y); \quad Z^{F_0}(\Delta) \subset Z^{F_0} = (z_k^{F_0}) \in l_2, \quad \Delta \in G_n; \quad (82)$$

$$\Phi^*(Z^F) = \max_{x \in \Omega_m} \sum_{k=1}^{\infty} z_k^F \eta_k^F(x); \quad Z^F(\Delta) \subset Z^F = (z_k^F) \in l_2, \quad \Delta \in G_n \quad (83)$$

соответственно по направлениям $h^{F_0}, \|h^{F_0}\| = 1$, и $h^F, \|h^F\| = 1$ равны нулю в точке Δ^0 :

$$\frac{\partial I_1^*(Z^{F_0}(\Delta^0))}{\partial h^{F_0}} = \max_{y_v^0} \sum_{k=1}^{\infty} h_k^{F_0} \eta_k^{F_0}(y_v^0) = 0; \quad (84)$$

$$\frac{\partial \Phi^*(Z^F(\Delta^0))}{\partial h^F} = \max_{x_j^0} \sum_{k=1}^{\infty} h_k^F \eta_k^F(x_j^0) = 0, \quad (85)$$

причем здесь

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k^{F_0} \eta_k^{F_0}(y_v^0) = 0, \quad v = \overline{1, R_y}; \quad (86)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k^F \eta_k^F(x_j^0) = 0, \quad j = \overline{1, R_x}. \quad (87)$$

Подобно утверждению 3 при доказательстве теоремы 1 можно показать, что все векторы h^{F_0} и h^F принадлежат опорным плоскостям, соответственно Γ_{F_0} и Γ_F вида (31), проведенным через граничные точки $Z^{F_0}(\Delta^0)$ и $Z^F(\Delta^0)$ к выпуклым множествам с непустой внутренностью $P^{**}(I_{10}) = \{Z^{F_0} : I_1^*(Z^{F_0}) \leq I_{10}\} \supset P^*(I_{10})$ и $N^{**}(\varepsilon_0) = \{Z^F : \Phi^*(Z^F) \leq \varepsilon_0\} \supset N^*(\varepsilon_0)$:

$$\Gamma_{F_0} = \left\{ Z^{F_0} : \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{F_0} z_k^{F_0} = b_{F_0} \right\}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{F_0} z_k^{F_0} \leq b_{F_0}, \quad \forall Z^{F_0} \in P^{**}(I_{10}); \quad (88)$$

$$\Gamma_F = \left\{ Z^F : \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^F z_k^F = b_F \right\}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^F z_k^F \leq b_F, \quad \forall Z^F \in N^{**}(\varepsilon_0). \quad (89)$$

Используя параметрическое представление $\Delta = \Delta(\psi)$ в виде достаточно гладких функций скалярной переменной ψ , получим, аналогично (62), что h^{F_0} и h^F могут быть представлены в форме касательных векторов соответственно к параметрически заданным множествам

$$K_{F_0}^* = \{Z^{F_0} \in l_2 : z_k^{F_0} = z_k^{F_0}(\Delta), \quad k=1,2,\dots; \Delta \in G_n\} \quad \text{и} \\ K_F^* = \{Z^F \in l_2 : z_k^F = z_k^F(\Delta), \quad k=1,2,\dots; \Delta \in G_n\} \quad \text{в точках } Z^{F_0}(\Delta^0) \text{ и } Z^F(\Delta^0):$$

$$h_k^{F_0} = \frac{dz_k^{F_0}(\psi_0)}{d\psi} = \sum_{i=1}^n \mu_{ki}^{F_0} \Delta'_i(\psi_0); \quad \mu_{ki}^{F_0} = \frac{\partial z_k^{F_0}(\Delta^0)}{\partial \Delta_i}; \quad k=1,2,\dots; \quad (90)$$

$$h_k^F = \frac{dz_k^F(\psi_0)}{d\psi} = \sum_{i=1}^n \mu_{ki}^F \Delta'_i(\psi_0); \quad \mu_{ki}^F = \frac{\partial z_k^F(\Delta^0)}{\partial \Delta_i}; \quad k=1,2,\dots \quad (91)$$

При этом, подобно (35), (65), все векторы h^{F_0} и h^F принадлежат, соответственно, опорным гиперплоскостям Γ_{F_0} и Γ_F , если выполняются равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{F_0} \mu_{ki}^{F_0} = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^F \mu_{ki}^F = 0; \quad i = \overline{1, n}. \quad (92)$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 1, рассмотрим в окрестности $Q(\Delta^0) \in \text{int } G_n$ точки Δ^0 некоторую деформированную задачу, отличающуюся от (2), (69) только заменой $F(x, \Delta)$ и $F_0(y, \Delta)$ на функции $\tilde{F}(x, \Delta)$ и $\tilde{F}_0(y, \Delta)$, определяемые в пределах $Q(\Delta^0)$, подобно (42), разложениями вида (80), (81) с коэффициентами

$$\tilde{z}_k^{F_0}(\Delta) = z_k^{F_0}(\Delta) + \sum_{i=1}^n \gamma_{ki}^{F_0} (\Delta_i - \Delta_i^0), \quad k=1,2,\dots; \quad (93)$$

$$\tilde{z}_k^F(\Delta) = z_k^F(\Delta) + \sum_{i=1}^n \gamma_{ki}^F (\Delta_i - \Delta_i^0), \quad k=1,2,\dots, \quad (94)$$

где $\gamma_{ki}^{F_0} : \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{ki}^{F_0})^2 < \infty$; $\gamma_{ki}^F : \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{ki}^F)^2 < \infty$, $i = \overline{1, n}$ - некоторые малые константы.

При этом так же, как в (43), выполняются условия совпадения функций $F(x, \Delta)$ с $\tilde{F}(x, \Delta)$ и $F_0(y, \Delta)$ с $\tilde{F}_0(y, \Delta)$ в точке $\Delta = \Delta^0$:

$$\tilde{F}_0(y, \Delta^0) = F_0(y, \Delta^0), y \in L_r; \tilde{F}(x, \Delta^0) = F(x, \Delta^0), x \in \Omega_m. \quad (95)$$

Для деформированной задачи множества $P(I_{10})$ и $N(\varepsilon_0)$ заменяются множествами $\tilde{P}(I_{10}) = \{\Delta \in G_n : \tilde{I}_1(\Delta) = \max(\tilde{F}_0(y, \Delta) : y \in L_r) \leq \tilde{I}_1(\Delta^0) = I_1(\Delta^0) = I_{10}\}$ и $\tilde{N}(\varepsilon_0) = \{\Delta \in G_n : \tilde{\Phi}(\Delta) = \max(\tilde{F}(x, \Delta) : x \in \Omega_m) \leq \varepsilon_0\}$, их отображения $\tilde{P}^*(I_{10})$ и $\tilde{N}^*(\varepsilon_0)$ в отличие от $P^*(I_{10})$ и $N^*(\varepsilon_0)$ описываются теперь выражениями (93), (94) вместо (80), (81), а множества $K_{F_0}^*$ и K_F^* трансформируются, соответственно, к виду

$$\tilde{K}_{F_0}^* = \{Z^{F_0} \in l_2 : z_k^{F_0} = \tilde{z}_k^{F_0}(\Delta), k = 1, 2, \dots; \Delta \in G_n\}; \tilde{K}_F^* = \{Z^F \in l_2 : z_k^F = \tilde{z}_k^F(\Delta), k = 1, 2, \dots; \Delta \in G_n\}.$$

Тогда касательные векторы $\tilde{h}^{F_0}$ и $\tilde{h}^F$ к множествам $\tilde{K}_{F_0}^*$ и $\tilde{K}_F^*$ в точках $\tilde{Z}^{F_0}(\Delta^0) = \{\tilde{z}_k^{F_0}(\Delta^0)\}$ и $\tilde{Z}^F(\Delta^0) = \{\tilde{z}_k^F(\Delta^0)\}$ определяются вместо (90), (91), подобно (64), выражениями:

$$\tilde{h}_k^{F_0} = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_{ki}^{F_0} \Delta'_i(\Psi_0); \tilde{\mu}_{ki}^{F_0} = \mu_{ki}^{F_0} + \gamma_{ki}^{F_0}, k = 1, 2, \dots, \quad (96)$$

$$\tilde{h}_k^F = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_{ki}^F \Delta'_i(\Psi_0); \tilde{\mu}_{ki}^F = \mu_{ki}^F + \gamma_{ki}^F, k = 1, 2, \dots. \quad (97)$$

Эти векторы так же, как и h^{F_0} , h^F , принадлежат тем же гиперплоскостям Γ_{F_0} и Γ_F по (88) и (89), если наряду с (92) выполняются, подобно (65), равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{F_0} \gamma_{ki}^{F_0} = 0; \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^F \gamma_{ki}^F = 0; i = \overline{1, n}. \quad (98)$$

Покажем теперь, что аналогично утверждению 5 при доказательстве теоремы 1, в условиях (98) точка Δ^0 является одновременно локальным решением $\Delta^1 \in Q(\Delta^0)$ деформированной задачи.

Предполагая противное, будем иметь тогда

$$\tilde{I}_1(\Delta^1) = \max\{\tilde{F}_0(y, \Delta^1) : y \in L_r\} < \tilde{I}_1(\Delta^0) = I_1(\Delta^0) = I_{10};$$

$$\tilde{\Phi}(\Delta^1) = \max\{\tilde{F}(x, \Delta^1) : x \in \Omega_m\} \leq \varepsilon_0.$$

В силу условий (72), (73), малости γ_{ki}^F и непрерывности рассматриваемых функций по γ_{ki}^F и Δ , существует такое направление $\tilde{s} \in G_n$, $\|\tilde{s}\| = 1$, что в точке $\Delta = \Delta^1$ имеем $\frac{\partial \tilde{\Phi}(\Delta^1)}{\partial \tilde{s}} < 0$, причем

$\frac{\partial \tilde{I}_1(\Delta^1)}{\partial \tilde{s}} \geq 0$ в соответствии со свойствами точки Δ^1 локального минимума в рассматриваемой деформированной задаче.

Поскольку, согласно (73),

$$\frac{\partial I_1(\Delta^0)}{\partial \bar{s}} = \max_{y_v^0} \left(\frac{\partial F_0(y_v^0, \Delta^0)}{\partial \Delta}, \bar{s} \right) < 0,$$

то $\frac{\partial F_0(y_v^0, \Delta^0)}{\partial \Delta} \neq 0$ для всех $v = \overline{1, R_y}$ и тогда в силу малости $\gamma_{ki}^{F_0}$, условия $\Delta^1 \in Q(\Delta^0)$ и непрерывности рассматриваемых зависимостей от $\gamma_{ki}^{F_0}$ и Δ получим, что последнее неравенство сохраняется и в деформированной задаче, т.е. $\frac{\partial \tilde{F}_0(\tilde{y}_v^0, \Delta^1)}{\partial \Delta} \neq 0$ для всех $v = \overline{1, R_y}$, где

$$\tilde{y}_v^0 \in \tilde{L}_r^I(\Delta^1) = \{y \in L_r : \tilde{F}_0(y, \Delta^1) = \tilde{I}_1(\Delta^1)\}$$

В таком случае существует такое направление $\tilde{s}^1$, достаточно близкое к $\tilde{s}$, для которого $\frac{\partial \tilde{\Phi}(\Delta^1)}{\partial \tilde{s}^1} < 0$, $\frac{\partial \tilde{I}_1(\Delta^1)}{\partial \tilde{s}^1} > 0$.

Отсюда по схеме доказательства утверждения 5 приходим к выводу о пересечении множеств $\tilde{P}(I_{10})$ и $\text{int } \tilde{N}(\varepsilon_0)$, а значит, $\text{int } \tilde{P}(I_{10})$ и $\tilde{N}(\varepsilon_0)$ с непустыми внутренностями:

$$\tilde{P}(I_{10}) \cap \text{int } \tilde{N}(\varepsilon_0) \neq \emptyset; \quad (99)$$

$$\tilde{N}(\varepsilon_0) \cap \text{int } \tilde{P}(I_{10}) \neq \emptyset. \quad (100)$$

В свою очередь, при переходе к отображениям в l_2 , из (99), подобно (66), следует, что

$$\tilde{K}_F^* \cap \text{int } N^{**}(\varepsilon_0) \neq \emptyset. \quad (101)$$

и аналогичным образом, в соответствии с (100), получаем

$$\tilde{K}_{F_0}^* \cap \text{int } P^{**}(I_{10}) \neq \emptyset. \quad (102)$$

Так же, как и при доказательстве утверждения 5, последние выводы означают, что касательные векторы $\tilde{h}^F$ и $\tilde{h}^{F_0}$, определяемые согласно (96), (97), при достаточно малых γ_{ki}^F и $\gamma_{ki}^{F_0}$ в условиях (101), (102) не принадлежат опорным гиперплоскостям, соответственно Γ_F и Γ_{F_0} , что невозможно, если выполняются равенства (98).

Полученное противоречие свидетельствует о том, что Δ^0 действительно является локальным решением рассматриваемой деформированной задачи.

Подобно утверждению 4, получаем, что в условиях (74) производные обеих функций максимума $I_1^*(Z^{F_0}(\Delta))$ и $\Phi^*(Z^F(\Delta))$ в точке Δ^0 не равны нулю по всем направлениям в опорных гиперплоскостях Γ_{F_0} и Γ_F соответственно. Опираясь на этот факт, можно аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 1, так выбрать эти гиперплоскости, коэффициенты $\gamma_{ki}^{F_0}$ и γ_{ki}^F в (93), (94) и значения $\Delta'_i(\psi_0)$ в (96), (97), чтобы все векторы $\tilde{h}^{F_0}$ и $\tilde{h}^F$, принадлежащие Γ_{F_0} и Γ_F вместе с h^{F_0} и h^F , одновременно не являлись бы касательными векторами к множествам $\tilde{P}^*(I_{10})$ и $\tilde{N}^*(\varepsilon_0)$ соответственно.

Подобно (50), достаточным условием для выполнения этого требования является неравенство нулю определителя соответствующей однородной линейной системы уравнений вида (49) при исходном предположении $R_x + R_y \leq n$:

$$\det \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_{ki_q}^{F_0} \eta_k^{F_0}(y_v^0); \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_{ki_q}^F \eta_k^F(x_j^0) \right\} \neq 0; \quad v = \overline{1, R_y}; \quad j = \overline{1, R_x}; \quad q = \overline{1, R_x + R_y}, \quad (103)$$

где $i_q \in \overline{1, n}$ - любые $R_x + R_y$ из n возможных значений $i \in \overline{1, n}$, и в отличие от (49), (50) учитывается необходимость выполнить рассматриваемое требование одновременно для обоих множеств $\tilde{P}^*(I_{10})$ и $\tilde{N}^*(\varepsilon_0)$.

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что при одновременном выполнении условий $R_x \geq 2, R_y \geq 2$, согласно (74), соответствующий выбор обеих опорных гиперплоскостей Γ_{F_0} и Γ_F обеспечивает совместность условий (98) и (103).

Далее, аналогично (56), (57) и (67), (68), обозначая

$$\begin{aligned} \phi_0^0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^F \eta_k^F(x); \quad \Phi_0^0(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{F_0} \eta_k^{F_0}(y); \\ \phi_q^0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ki_q}^F \eta_k^F(x); \quad \Phi_q^0(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ki_q}^{F_0} \eta_k^{F_0}(y); \\ \phi_i(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{ki}^F \eta_k^F(x); \quad \Phi_i(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{ki}^{F_0} \eta_k^{F_0}(y), \end{aligned}$$

приведем соотношения (98), (103) к следующему виду:

$$\int_{\Omega_m} \phi_i(x) \phi_0^0(x) \rho_F(x) d\mu = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (104)$$

$$\int_{L_r} \Phi_i(y) \Phi_0^0(y) \rho_{F_0}(y) d\mu = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (105)$$

$$\det \{ \Phi_q^0(y_v^0) + \Phi_{i_q}(y_v^0); \quad \phi_q^0(x_j^0) + \phi_{i_q}(x_j^0) \} \neq 0, \quad v = \overline{1, R_y}; \quad j = \overline{1, R_x}; \quad q = \overline{1, R_x + R_y}. \quad (106)$$

После выбора здесь произвольной совокупности достаточно малых значений $\phi_{i_q}(x_j^0)$ и $\Phi_{i_q}(y_v^0)$, обеспечивающих выполнение неравенства (106), можно затем любым из возможных способов выбрать каждую из функций $\phi_i(x)$ и $\Phi_i(y)$ требуемого порядка малости с фиксированными значениями $\phi_{i_q}(x_j^0)$ и $\Phi_{i_q}(y_v^0)$, исходя из i -тых равенств в (104) и (105). Теперь искомыми значениями $\gamma_{ki}^{F_0}$ и γ_{ki}^F , при которых одновременно выполняются условия (104)-(106), найдутся как соответствующие коэффициенты разложения соответственно функций $\Phi_i(y)$ и $\phi_i(x)$ в ряды по системам $\{\eta_k^{F_0}(y)\}$ и $\{\eta_k^F(x)\}$.

Следуя далее схеме завершающей части доказательства пп. 1⁰ и 2⁰ теоремы 1, получаем, что если Δ^0 является одновременно локальным решением сформулированной выше деформированной задачи, то в условиях (95) при $R_x + R_y < n + 1$ существуют векторы $\bar{h}^{F_0}$ и $\bar{h}^F$ вида (96), (97), касательные, соответственно, к $\tilde{P}^*(I_{10})$ и $\tilde{N}^*(\varepsilon_0)$ в точках $\tilde{Z}^{F_0}(\Delta^0)$ и $\tilde{Z}^F(\Delta^0)$, для которых в тех же точках y_v^0 и x_j^0 выполняются, аналогично (86), (87), равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{h}_k^{F_0} \eta_k^{F_0}(y_v^0) = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \bar{h}_k^F \eta_k^F(x_j^0) = 0; \quad v = \overline{1, R_y}; \quad j = \overline{1, R_x}. \quad (107)$$

Подобно (59), эти равенства в силу соотношений (96), (97) редуцируются при всех $R_x + R_y \leq n$ к однородной системе уравнений

$$\sum_{q=1}^{R_x+R_y} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_{ki_q}^{F_0} \eta_k^{F_0}(y_v^0) \right) \Delta'_{i_q}(\psi_0) = 0; \quad v = \overline{1, R_y};$$

$$\sum_{q=1}^{R_x+R_y} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_{ki_q}^F \eta_k^F(x_j^0) \right) \Delta'_{i_q}(\psi_0) = 0; \quad j = \overline{1, R_x}$$

с нетривиальным решением относительно Δ'_{i_q} , где $i_q, q = \overline{1, R_x + R_y}$ - некоторые $R_x + R_y$ из n значений $i \in \{1, n\}$.

С другой стороны, система уравнений (108) не может иметь нетривиальных решений в условиях (103). С учетом тождества (95) полученное противоречие означает, что неравенство $R_x + R_y < n + 1$ невозможно как для деформированной, так и для исходной задачи, откуда следует утверждение (75). Теорема 2 полностью доказана $\square$.

Подобно случаю с гладкой целевой функцией, теорема 2 устанавливает альтернансные свойства решений задачи (69), (2) в форме соотношений (75)-(77) при допущениях а₁) – д₁) более слабых и легче проверяемых по сравнению с типовыми, гарантирующими обладание точкой Δ^0 свойством обобщенного альтернанса, которое наряду с этими соотношениями включает ряд дополнительных признаков [18-21].

Отметим в итоге, что для дальнейшей детализации альтернансных свойств решений рассматриваемых ЗПО, например, для существования чебышевского альтернанса [5-11] в одномерных задачах (69), (2) или (1), (2) при $r=m=1$ с заменой функций $F_0(y, \Delta)$ и $F(x, \Delta)$ на их модули подобных допущений уже оказывается недостаточно. В частности, в этом случае необходимо, чтобы система функций

$$\frac{\partial F_0(y, \Delta^0)}{\partial \Delta_1}, \dots, \frac{\partial F_0(y, \Delta^0)}{\partial \Delta_n}, \frac{\partial F(x, \Delta^0)}{\partial \Delta_1}, \dots, \frac{\partial F(x, \Delta^0)}{\partial \Delta_n}$$

являлась чебышевской (Т-системой) [5-11] на $L_1 \times \Omega_1$ для задачи (69), (2).

Соответствующие теоремы, формулирующие альтернансные свойства решений ЗПО в подобной ситуации, приведены в [17, 29].

3. Анализ параметрических зависимостей решений ЗПО

Характер зависимости решений задач (1), (2) и (69), (2) от основного параметра ε_0 в (2) устанавливает

Т е о р е м а 3. При выполнении условий (3)-(6) или (70), (72), (73) зависимости $\Delta^0(\varepsilon_0)$ решений Δ^0 задачи (1), (2) или (69), (2) от ε_0 непрерывны справа по ε_0 в любой точке $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}$ (в любой точке $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_{\min}^{(n)}$, если решение задачи существует при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}$). Указанные зависимости непрерывны в тех точках ε_0 , для которых рассматриваемые задачи имеют единственное решение.

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(n)}$, $|\delta\varepsilon| \rightarrow 0$; $\Delta^0(\varepsilon)$ - решение задачи (1), (2) с ограничением $\Phi(\Delta) \leq \varepsilon$ вместо (2), и $I(\Delta^0(\varepsilon)) = I_{\min}(\varepsilon)$.

Поскольку множество Лебега $V(c) = \{\Delta \in G_n : I(\Delta) \leq c\}$, $c = \text{const}$ ограничено в условиях (3) [23], то в силу замкнутости G_n и непрерывности функции $I(\Delta)$ это множество компактно [9,23] и $I_{\min}(\varepsilon)$ - конечная величина [9], что обеспечивает существование компактного подмножества $G_n^* \subset G_n$, которому принадлежат все решения $\Delta^0(\varepsilon)$ [5].

В силу компактности G_n^* существует подпоследовательность $\{\Delta^0(\varepsilon_i)\} \in G_n^*$, $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon_i$, $|\delta\varepsilon_i| \rightarrow 0$, сходящаяся к некоторому элементу $\tilde{\Delta} \in G_n^*$.

Поскольку требование $\Phi(\Delta) \leq \varepsilon = \varepsilon'$ заведомо удовлетворяется при выполнении неравенства $\Phi(\Delta) \leq \varepsilon = \varepsilon''$, если $\varepsilon'' < \varepsilon'$, то $I_{\min}(\varepsilon)$ - невозрастающая функция ε .

Если теперь $\Delta^0(\varepsilon_i) \rightarrow \tilde{\Delta}^{(1)}$ при $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_0 + 0$, то из сказанного следует для непрерывной функции $I(\Delta)$

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_0 + 0} I(\Delta^0(\varepsilon_i)) = I(\tilde{\Delta}^{(1)}) \leq I_{\min}(\varepsilon_0),$$

откуда имеем, что $I(\tilde{\Delta}^{(1)}) = I_{\min}(\varepsilon_0)$, $\tilde{\Delta}^{(1)} = \Delta^0(\varepsilon_0)$, и значит,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 + 0} \Delta^0(\varepsilon) = \Delta^0(\varepsilon_0),$$

т.е. зависимость $\Delta^0(\varepsilon)$ непрерывна справа в каждой точке $\varepsilon = \varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}$ в соответствии с утверждением теоремы 3.

Если решение задачи (1), (2) существует при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}$, то полученный вывод распространяется на все $\varepsilon = \varepsilon_0 \geq \varepsilon_{\min}^{(n)}$.

Далее, невозрастающая функция $I_{\min}(\varepsilon)$ непрерывна по ε в точке ε_0 при выполнении условия (6). Действительно, предположим противное, и пусть тогда в силу компактности G_n^* имеем $\Delta^0(\varepsilon_i) \rightarrow \tilde{\Delta}^{(2)} \in G_n^*$ при $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_0 - 0$, где $\tilde{\Delta}^{(2)} \neq \tilde{\Delta}^{(1)}$. При этом значения $I(\tilde{\Delta}^{(1)})$ и $I(\tilde{\Delta}^{(2)})$ конечны [9], функция $I_{\min}(\varepsilon)$ претерпевает в точке ε_0 разрыв первого рода и

$$I(\tilde{\Delta}^{(2)}) - I(\tilde{\Delta}^{(1)}) = I(\tilde{\Delta}^{(2)}) - I(\Delta^0(\varepsilon_0)) = A > 0, \text{ где } A = \text{const} < \infty,$$

откуда следует, что

$$I(\Delta^0(\varepsilon_0 - \delta\varepsilon)) - I(\Delta^0(\varepsilon_0)) = A_1 > 0, A_1 \rightarrow A \text{ при } \delta\varepsilon \rightarrow 0 \quad (109)$$

для достаточно малого $\delta\varepsilon > 0$.

С другой стороны, в силу (6) найдется такое направление S в G_n , $\|S\| = 1$, что

$$\Phi(\Delta^0(\varepsilon_0) + \alpha S) = \Phi(\Delta^0(\varepsilon_0)) + \alpha \frac{\partial \Phi(\Delta^0(\varepsilon_0))}{\partial S} + o(\alpha) = \varepsilon_0 - \delta\varepsilon \quad (110)$$

при некотором малом $\alpha > 0$, для которого будем иметь

$$I(\Delta^0(\varepsilon_0) + \alpha S) = I(\Delta^0(\varepsilon_0)) + \alpha \frac{\partial I(\Delta^0(\varepsilon_0))}{\partial S} + o(\alpha), \quad (111)$$

где $\frac{\partial \Phi(\Delta^0(\varepsilon_0))}{\partial S}$ и $\frac{\partial I(\Delta^0(\varepsilon_0))}{\partial S}$ - соответствующие производные по направлению S .

Но тогда получим на основании (109)-(111), что $I(\Delta^0(\varepsilon_0) + \alpha S) < I(\Delta^0(\varepsilon_0 - \delta\varepsilon))$ в условиях $\Phi(\Delta^0(\varepsilon_0) + \alpha S) = \varepsilon_0 - \delta\varepsilon$, что невозможно по определению $\Delta^0(\varepsilon_0 - \delta\varepsilon)$. Полученное противоречие доказывает непрерывность функции $I_{\min}(\varepsilon)$ в рассматриваемой точке.

В таком случае

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_0 - 0} I(\Delta^0(\varepsilon)) = I(\tilde{\Delta}^{(2)}) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_0 + 0} I(\Delta^0(\varepsilon)) = I(\tilde{\Delta}^{(1)}) = I_{\min}(\varepsilon_0)$$

и, следовательно, обе точки $\tilde{\Delta}^{(1)}$ и $\tilde{\Delta}^{(2)}$ являются решениями задачи (1), (2) при $\varepsilon = \varepsilon_0$. Если теперь задача (1), (2) имеет единственное решение, то $\tilde{\Delta}^{(1)} = \tilde{\Delta}^{(2)} = \Delta^0(\varepsilon_0)$ и, следовательно, функция $\Delta^0(\varepsilon)$ непрерывна в точке $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Сказанное завершает доказательство теоремы для задачи (1), (2), которое дословно сохраняется и для задачи (69), (2) после замены целевой функции $I(\Delta)$ на $I_1(\Delta)$ и условия (6) на неравенства (73), если иметь в виду, что для функции максимума $I_1(\Delta)$ сохраняется выражение вида (111) $\square$.

4. Вычислительные алгоритмы

4.1. Если выполняются допущения $a_1) - c_1)$ теоремы 2, то, согласно ее утверждениям, для задачи (69), (2) при всех значениях $\varepsilon_0 : \varepsilon_{\min}^{(n)} < \varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}$ в (2) возникает следующая альтернатива для суммарного числа $R_x + R_y$ точек $x_j^0, j = \overline{1, R_x}; y_v^0, v = \overline{1, R_y}$, максимумов функций $F(x, \Delta^0)$ и $F_0(y, \Delta^0)$, достигаемых на искомом решении Δ^0 : либо здесь, в соответствии с утверждением (75), искомая точка Δ^0 обладает альтернансным свойством $R_x + R_y = n + 1$, либо в случае, когда нарушается одно или оба неравенства (74), основное соотношение (75) не выполняется и

$$R_x + R_y = n_1 < n + 1 \text{ при } R_x = 1 \text{ или (и) } R_y = 1. \quad (112)$$

Рассмотрим сначала основной первый вариант.

Утверждение (75), дополненное условиями существования экстремума функций $F(x, \Delta^0)$ и $F_0(y, \Delta^0)$ на Ω_m и L_r в точках $x_{j_p}^0 \in \Omega_m^{\varepsilon_0}(\Delta^0)$, $y_{v_g}^0 \in L_r^I(\Delta^0)$, принадлежащих $\text{int } \Omega_m$ и $\text{int } L_r$, приводит в условиях $R_x + R_y = n + 1$ при заданном ε_0 к определяющей системе соотношений:

$$F_0(y_v^0, \Delta^0) = I_1(\Delta^0); \quad \frac{\partial F_0(y_{v_g}^0, \Delta^0)}{\partial y} = 0; \quad (113)$$

$$v = \overline{1, R_y}; \quad g = \overline{1, R_{1y}}; \quad R_{1y} \leq R_y; \quad y_{v_g}^0 \in \{y_v^0\};$$

$$F(x_j^0, \Delta^0) = \Phi(\Delta^0) = \varepsilon_0; \quad \frac{\partial F(x_{j_p}^0, \Delta^0)}{\partial x} = 0, \quad (114)$$

$$j = \overline{1, R_x}; \quad p = \overline{1, R_{1x}}; \quad R_{1x} \leq R_x; \quad x_{j_p}^0 \in \{x_j^0\},$$

замкнутой относительно всех искомым параметров оптимальных решений задачи (69), (2).

При наличии дополнительной информации о характере распределения $F_0(y, \Delta^0)$ на L_r э y и $F(x, \Delta^0)$ на Ω_m э x , позволяющей установить поведение этих функций и идентифицировать точки y_v^0 и x_j^0 , данные соотношения редуцируются к системе $H+H_1$ уравнений с $H+H_1$ неизвестными, где $H = R_x + R_y = n + 1$, $H_1 = rR_{1y} + mR_{1x}$, а в роли неизвестных фигурируют n составляющих $\Delta_i^0, i = \overline{1, n}$ вектора Δ^0 ; минимакс $I_1(\Delta^0)$; rR_{1y} координат R_{1y} точек $y_{v_g}^0$ экстремума $F_0(y, \Delta^0)$ на L_r и mR_{1x} координат R_{1x} точек $x_{j_p}^0$ экстремума $F(x, \Delta^0)$ на Ω_m .

Решения такой системы уравнений относительно указанных неизвестных содержат решения задачи (69), (2) и могут быть найдены с помощью известных численных методов.

Подобным образом, при выполнении допущений (74) случай $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}$ приводит в условиях $R_x = n + 1$ к системе $n + mR_{1x} + 1$ уравнений (114) с $n + mR_{1x} + 1$ неизвестными $\Delta_i^0, x_{j_p}^0$ и $\varepsilon_{\min}^{(n)}$, а при $\varepsilon_0 \geq \bar{\varepsilon}$ на основании (77) получаем для $R_y = n + 1$ систему $n + rR_{1y} + 1$ уравнений (113) с $n + rR_{1y} + 1$ неизвестными $\Delta_i^0, y_{v_g}^0$ и $I_1(\Delta^0)$.

Для задачи (1), (2) с гладкой целевой функцией $I(\Delta)$ при выполнении всех допущений теоремы 1, включая условие $R_x \geq 2$, утверждение (8) этой теоремы аналогичным образом определяет при $R_x = n$ систему $n + mR_{1x}$ уравнений (114) с $n + mR_{1x}$ неизвестными Δ_i^0 и $x_{j_p}^0$ для заданного значения $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(n)}$.

Таким образом, при выполнении всех условий теорем 1 и 2 число $R_x + R_y$ точек x_j^0 и y_v^0 , либо только R_x или R_y оказывается всегда достаточным для замыкания систем соотношений (113), (114) относительно всех искомых параметров.

4.2. В условиях (112) при $R_x + R_y = n_1 < n + 1$, когда заведомо $R_x = 1$ или $R_y = 1$, в качестве дополнительных уравнений, замыкающих систему соотношений (113), (114) для решения задачи (69), (2) при $\varepsilon_{\min}^{(n)} < \varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}$, можно рассматривать общее необходимое условие экстремума с нетривиальными нормированными множителями Лагранжа $\lambda_{0v} \geq 0$, $\lambda_j \geq 0$, которое в соответствии с допущением (72) принимает следующий вид [1,2]:

$$\sum_{v=1}^{R_y} \lambda_{0v} \frac{\partial F_0(y_v^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} + \sum_{j=1}^{R_x} \lambda_j \frac{\partial F(x_j^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (115)$$

$$\sum_{v=1}^{R_y} \lambda_{0v} + \sum_{j=1}^{R_x} \lambda_j = 1. \quad (116)$$

Тогда равенства (113)-(116) образуют в условиях (112) систему $n_1 + H_1 + n + 1$ соотношений, замкнутую относительно всех $n_1 + H_1 + n + 1$ неизвестных, в качестве которых в данном случае выступают n искомых параметров Δ_i^0 , $i = \overline{1, n}$; H_1 координат всех точек $y_{v_g}^0$ и $x_{j_p}^0$ экстремума $F_0(y, \Delta^0)$ и $F(x, \Delta^0)$ на L_r и Ω_m ; n_1 множителей Лагранжа λ_{0v} , $v = \overline{1, R_y}$; λ_j , $j = \overline{1, R_x}$ и минимакс $I_1(\Delta^0)$.

Если $n_1 = n$, то достаточно дополнить (113)-(114) равенством нулю определителя системы (115):

$$\det \left[\frac{\partial F_0(y_v^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i}; \frac{\partial F(x_j^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} \right] = 0; \quad (117)$$

$$v = \overline{1, R_y}; \quad j = \overline{1, R_x}; \quad R_x + R_y = n_1 = n; \quad i = \overline{1, n},$$

понижая тем самым размерность систем уравнений путем исключения множителей Лагранжа из числа промежуточных неизвестных.

Аналогичным образом, если в задаче (69), (2) не выполняется требование (74) и для заданного $\varepsilon_0 \geq \bar{\varepsilon}$ имеем $R_y = 1$, то соответствующую замкнутую относительно $n + r + 1$ неизвестных Δ_i^0 , r координат точки y_1^0 и $I_1(\Delta^0)$ систему соотношений для наиболее простого случая, когда единственной точкой максимума y_1^0 является точка экстремума $F_0(y, \Delta^0)$, образуют $r + 1$ равенств (113) и n соотношений

$$\frac{\partial F_0(y_1^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (118)$$

к которым редуцируются в этом случае условия (115).

Точно так же, если $R_x = 1$ в задаче (69), (2) при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)}$ или в задаче (1), (2) при $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_{\min}^{(n)}$, то определяющая замкнутая система уравнений формируется из $m + 1$ равенств (114) и n соотношений вида (118) в единственной точке x_1^0 экстремума $F(x, \Delta^0)$:

$$\frac{\partial F(x_1^0, \Delta^0)}{\partial \Delta_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

4.3. Описанный альтернативный метод решения ЗПО базируется на процедуре редукции соотношений (113)-(114) к соответствующей трансцендентной системе уравнений. Подобная процедура, вообще говоря, невыполнима априори однозначным образом при отсутствии дополнительной информации о характеристиках функций $F_0(y, \Delta^0)$ и $F(x, \Delta^0)$. Этим, по-

видимому, и объясняется тот факт, что альтернансный метод (в форме так называемого "выравнивания максимумов" [15]) используется, как правило, лишь на заключительном этапе вычислительного процесса, когда за счет предварительного получения достаточно хорошего приближения к искомому решению численными методами оказывается известной конфигурация распределения функций $F_0(y, \Delta^0)$ и $F(x, \Delta^0)$ на $L_r \ni y$ и $\Omega_m \ni x$ [15,21].

Принципиально иная ситуация складывается во многих прикладных ЗПО, знание предметной области которых часто позволяет априори получить содержательную информацию о конфигурации распределений $F_0(y, \Delta^0)$ и $F(x, \Delta^0)$ на множествах $L_r \ni y$ и $\Omega_m \ni x$, по крайней мере, для некоторых характерных значений ε_0 в (2). Для последующего перехода к заданным величинам ε_0 во многих случаях может быть использована устанавливаемая теоремой 3 непрерывность зависимостей $\Delta^0(\varepsilon_0)$.

Отмеченные обстоятельства значительно упрощают процедуру редукции исходной задачи к решению соответствующих систем уравнений, которые приобретают ясный содержательный смысл применительно к каждой конкретной ситуации. В связи со сказанным подобный естественный путь построения вычислительной процедуры часто оказывается предпочтительным именно применительно к прикладным задачам конкретного физического или инженерного содержания, тем более, что соответствующий предметный анализ обычно позволяет найти достаточно хорошие начальные приближения для последующего эффективного решения расчетных систем уравнений стандартными методами. В работах [17, 30, 31] приводится большое число примеров, иллюстрирующих возможность применения описываемого метода решения ЗПО применительно к широкому кругу задач параметрической оптимизации нестационарных процессов тепло- и массопереноса и структурно-параметрического синтеза оптимальных систем автоматического управления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пиеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1969.
2. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
3. *Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Vol. 215. Semi-Infinite Programming and Application, A.V. Fiacco and K.O. Kortanek, Eds. New York: Springer-Verlag, 1983.*
4. *Полак Э., Мейни Д.К., Стилмер Д.М.* Применение методов полубесконечной оптимизации для синтеза систем автоматического управления: Обзор // ТИЭЭР. 1984. Т.72. №12, С. 132-152.
5. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
6. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Наука, 1966.
7. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
8. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций Л.: ЛГУ, 1977.
9. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения. М.: Наука, 1978.
10. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
11. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.
12. *Чебышев П.Л.* Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций: Избр. тр. М.: АН СССР, 1955. С. 462-578.
13. *Бернштейн С.Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
14. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наукова думка, 1969.
15. *Малоземов В.Н.* О выравнивании максимумов // Журн. вычислит. математ. и мат. физики. 1976. Т. 16. №3. С. 781-784.
16. *Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. Киев: Вища школа, 1983.
17. *Рапопорт Э.Я.* Альтернансные свойства оптимальных решений и вычислительные алгоритмы в задачах полубесконечной оптимизации управляемых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. №4. С. 84-95.
18. *Малоземов В.Н., Певный А.Б.* Альтернансные свойства решений нелинейных минимаксных задач // Докл. АН СССР. 1973. Т.212. №1. С.37-39.
19. *Даугавет В.А., Малоземов В.Н.* Альтернансные свойства решений нелинейных минимаксных задач с невыпуклыми ограничениями // Докл. АН СССР. 1975. Т.225. №2, С.253-255.
20. *Даугавет В.А.* Альтернансные свойства решений нелинейных минимаксных задач с нелинейными ограничениями // Журн. вычислит. математ. и мат. физики. 1976. Т.16. №3. С.784-788.
21. *Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач / под ред. В.Ф.Демьянова и В.Н.Малоземова. Л.: ЛГУ, 1977.*
22. *Рапопорт Э.Я.* Чебышевские приближения в задачах параметрической оптимизации управляемых процессов. I. Необходимые условия оптимальности и вычислительные алгоритмы // А и Т. 1992. №2. С.60-67.
23. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
24. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
25. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
26. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

27. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. шк., 1982.
28. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
29. Рапопорт Э.Я. Чебышевские приближения в задачах параметрической оптимизации управляемых процессов. II. Альтернативные свойства оптимальных решений // А и Т. 1992. №3. С.59-64.
30. Рапопорт Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgia, 1993.
31. Рапопорт Э.Я. Параметрическая оптимизация систем автоматического управления по равномерно-частотным критериям // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. "Технические науки". 1998. Вып.5. С.13-27.