Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Овчинников, К алгоритмам динамического программирования оптимальных процессов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 3(), 215–218

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:59:57

Информатика

УДК 519.7

К АЛГОРИТМАМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ*В. Г. Овчинников*Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: ovchinnikov42@mail.ru

Формулируется задача дискретного оптимального управления, имеющая m последовательно применяемых функций цели. В этой задаче оптимальный процесс, называемый также m -оптимальным, разыскивается как пара функций, определяемых на конечном множестве шагов, при связях, с помощью которых одна функция однозначно определяет другую, при ограничениях этих функций включением " $\subset$ " их значений в конечные множественные значения функций, составляющих известную пару. Построением ограничиваемой этой парой сверху по включениям " $\subset$ " неубывающей последовательности на основе характеристики разрешимости задачи дается единообразное представление множеств, которые образуют k -оптимальные процессы в случаях k не больше m .

Ключевые слова: дискретное оптимальное управление, последовательно применяемые критерии, динамическое программирование, алгоритмы.

1. Хорошо известно, что метод динамического программирования основывается на использовании информации о решениях вспомогательных подзадач, и необходимость использования такой информации может послужить препятствием к применению метода, так как требует дополнительной памяти и, возможно, мощных процессоров. Кроме того, легко строится пример, когда для хранения указанной информации требуется память в размере большем, чем количество адресов самого современного процессора.

Эффективные алгоритмы динамического программирования оптимальных по одному критерию процессов даны в [1, 2], причем предложенные в [2] алгоритмы W_O , R_O основаны на использовании лишь не исключенных алгоритмом O [2] вспомогательных подзадач и поэтому требуют меньше дополнительной памяти, чем алгоритмы [1].

В настоящей статье, продолжающей исследования [2], алгоритмам W_O , R_O дается развитие в случаях нескольких последовательно применяемых функций цели в виде процедуры $W_O^p(Y, V)$ и алгоритма $R_O^m(\varphi, \psi)$ для обобщающей задачу [2] следующей задачи дискретного оптимального управления (задачи A^m).

Задача A^m . Даны: $m \in \mathbb{N}$; множества A, B ; множество шагов T ($1 < \|T\| < \infty$) со строгим порядком $<$, подмножеством $T_0 = \{i \in T \mid \emptyset = \{j \in T \mid j < i\}\} (\neq T)$ начальных шагов и определением $\pi(i)$ как единственного шага в $\{j \in T \mid (j < i) \wedge (\emptyset = \{g \in T \mid j < g < i\})\}$ — подмножество шагов, которые непосредственно предшествуют шагу i ($\forall i \in T \setminus T_0$); имеющие множественные значения функции $X: T \rightarrow \mathcal{B}(A)$ ($\mathcal{B}(A) = \{C \mid C \subset A\}$), $U: (T \setminus T_0) \times A \rightarrow \mathcal{B}(B)$, удовлетворяющие неравенствам $0 < \|X(i)\| < \infty$ ($\forall i \in T$), $\|U(i, \alpha)\| < \infty$ ($\forall i \in T \setminus T_0$) ($\forall \alpha \in A$); функции цели $f^k: (T \setminus T_0) \times A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ ($\forall k \in \{1, \dots, m\}$) и связей $s: (T \setminus T_0) \times A \times B \rightarrow A$;

Валерий Гаврилович Овчинников, старший преподаватель, каф. разработки нефтяных и газовых месторождений.

множество D , которое образуют процессы, т. е. пары (x, u) функций $x : T \rightarrow A$, $u : T \rightarrow B$ со значениями $x_i (\forall i \in T)$, $u_i (\forall i \in T)$ при ограничениях $x_i = u_i (\forall i \in T_0)$, $x_i = s(i, x_{\pi(i)}, u_i) (\forall i \in T \setminus T_0)$, $x_i \in X(i) (\forall i \in T)$, $u_i \in U(i, x_{\pi(i)}) (\forall i \in T \setminus T_0)$.

Требуется найти называемую (m) -оптимальным процессом пару $(x^*, u^*) \in D^m$, если $D^0 = D$,

$$D^k = \left\{ (x, u) \in D^{k-1} \mid \sum_{i \in T \setminus T_0} f^k(i, x_{\pi(i)}, u_i) \leq \sum_{i \in T \setminus T_0} f^k(i, y_{\pi(i)}, v_i) (\forall (y, v) \in D^{k-1}) \right\} (\forall k \in \{1, \dots, m\}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда $m = 1 = \|T_0\|$, задача A^m формулируется как задача A в [2].

2. В общем случае наряду с терминами [2] будут использоваться следующие обозначения и термины: $\tau(i) = \{j \in T \setminus T_0 \mid \pi(j) = i\} (\forall i \in T)$, $M = \{i \in T \mid \tau(i) = \emptyset\}$, $h(i) = \|\{j \in T \mid j \prec i\}\| (\forall i \in T)$, $h(T) = \max_{i \in T} h(i)$, $T_k = \{i \in T \mid h(i) = k\} (\forall k \in \{1, \dots, h(T)\})$; пара (Y, V) называется подходящей, если ее составляют функции $Y : T \rightarrow \beta(A)$, $V : \{(i, \alpha) \mid i \in T \setminus T_0, \alpha \in Y(\pi(i))\} \rightarrow \beta(B)$, когда $Y(i) \neq \emptyset (\forall i \in T)$; для каждой подходящей пары (Y, V) множество $F(Y, V)$ образуют пары (x, u) функций $x : T \rightarrow A$, $u : T \rightarrow B$ со значениями $x_i (\forall i \in T)$, $u_i (\forall i \in T)$ при ограничениях $x_i = u_i (\forall i \in T_0)$, $x_i = s(i, x_{\pi(i)}, u_i) (\forall i \in T \setminus T_0)$, $x_i \in Y(i) (\forall i \in T)$, $u_i \in V(i, x_{\pi(i)}) (\forall i \in T \setminus T_0)$; пара (Y, V) называется s -согласованной, когда она является подходящей и выполнены условия $\emptyset \neq V(i, \alpha) = \{\beta \in V(i, \alpha) \mid s(i, \alpha, \beta) \in Y(i)\} (\forall \alpha \in Y(\pi(i))) (\forall i \in T \setminus T_0)$.

3. Следующее утверждение даёт характеристику разрешимости задачи A^m .

ТЕОРЕМА 1. Оптимальный процесс в задаче A^m существует, если и только если определяемая из равенств $X^0(i) = \{\alpha \in X(i) \mid \emptyset \neq \{\beta \in U(j, \alpha) \mid s(j, \alpha, \beta) \in X^0(j)\} (\forall j \in \tau(i))\} (\forall i \in T \setminus M)$, $X^0(i) = X(i) (\forall i \in M)$ функция $X^0 : T \rightarrow \beta(A)$ удовлетворяет условиям $X^0(i) \neq \emptyset (\forall i \in T)$.

При этих условиях указанная функция $X^0 : T \rightarrow \beta(A)$ и определяемая при помощи равенств $U^0(i, \alpha) = \{\beta \in U(i, \alpha) \mid s(i, \alpha, \beta) \in X^0(i)\} (\forall \alpha \in X^0(\pi(i))) (\forall i \in T \setminus T_0)$ функция $U^0 : \{(i, \alpha) \mid i \in T \setminus T_0, \alpha \in X^0(\pi(i))\} \rightarrow \beta(B)$ составляют s -согласованную пару (X^0, U^0) , удовлетворяющую равенству $D^0 = F(X^0, U^0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В указанном замечании 1 случае с помощью теоремы 1 получается теорема 3 [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В общем случае указанная теоремой 1 функция $X^0 : T \rightarrow \beta(A)$ определяется тремя способами: (а) при помощи алгоритма, получаемого из алгоритма O [2] заменой S_{h-1} на T_{h-1} ; (б) при помощи равенств $X^0(i) = \{\alpha \in X(i) \mid B(i, \alpha) < \infty\} (\forall i \in T)$, если в них значения $B(i, \alpha) (\forall \alpha \in X(i)) (\forall i \in T)$ определяются алгоритмом, получаемым из алгоритма W [2] заменой S_{h-1} на T_{h-1} и функции f на одну из функций $f^k (\forall k \in \{1, \dots, m\})$; (в) при помощи равенств $X^0(i) = \{\alpha \in X(i) \mid B(i, \alpha) = 0\} (\forall i \in T)$, где значения $B(i, \alpha) (\forall \alpha \in X(i)) (\forall i \in T)$ находит следующий алгоритм (алгоритм W).

АЛГОРИТМ W . Этот алгоритм использует значения функции $f^0 : (T \setminus T_0) \times A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, определяемые из условий: $f^0(i, \alpha, \beta) = 0$ в случае $(\alpha \in X(\pi(i))) \wedge (\beta \in U(i, \alpha) \wedge (s(i, \alpha, \beta) \in X(i)))$ либо $f^0(i, \alpha, \beta) = 1$ в иных случаях $(\forall i \in T \setminus T_0) (\forall \alpha \in A) (\forall \beta \in B)$.

Шаг 0. Положить $B(i, \alpha) = 0 (\forall \alpha \in Y(i)) (\forall i \in M)$, $h = h(T)$, $\mu = 1$.

Шаг μ . Если $\mu = h(T) + 1$, остановиться. Иначе аналогично алгоритму W [2] положить $B(i, \alpha) = 1$ в случае $(\exists j \in \tau(i)) (\emptyset = \{\beta \in U(j, \alpha) | s(j, \alpha, \beta) \in X(j)\})$, либо положить

$$B(i, \alpha) = \sum_{j \in \tau(i)} \min_{\beta \in \{\beta \in U(j, \alpha) | s(j, \alpha, \beta) \in X(j)\}} (f^0(j, \alpha, \beta) + B(j, s(j, \alpha, \beta)))$$

в иных случаях $(\forall \alpha \in X(i)) (\forall i \in T_{h-1} \setminus M)$, заменить h на $h - 1$, μ на $\mu + 1$ и идти на Шаг μ .

Далее предполагается, что оптимальный процесс в задаче A^m существует, пара (X^0, U^0) составлена, как указано в теореме 1 и, следовательно, $D^0 = F(X^0, U^0)$.

4. Следующее утверждение указывает способ получения для множеств D^k $(\forall k \in \{1, \dots, m\})$ аналогичных $D^0 = F(X^0, U^0)$ равенств, на которых основывается динамическое программирование для задачи A^m .

ТЕОРЕМА 2. В порядке увеличения k при помощи обращений $(X^k, U^k) = W_O^k(X^{k-1}, U^{k-1})$ к следующей процедуре (процедуре $W_O^p(Y, V)$) получают s -согласованные пары (X^k, U^k) , удовлетворяющие равенствам $D^k = F(X^k, U^k)$ $(\forall k \in \{1, \dots, m\})$.

ПРОЦЕДУРА $W_O^p(Y, V)$. В этой процедуре аргументами являются номер $p \in \{1, \dots, m\}$ и s -согласованная пара (Y, V) .

Шаг 0. Положить $B(i, \alpha) = 0$ $(\forall \alpha \in Y(i)) (\forall i \in M)$, $h = h(T)$, $\mu = 1$.

Шаг μ . Если $\mu = h(T) + 1$, идти на Завершение процедуры. Иначе аналогично алгоритму W_O [2] положить

$$B(i, \alpha) = \sum_{j \in \tau(i)} \min_{\beta \in V(j, \alpha)} (f^p(j, \alpha, \beta) + B(j, s(j, \alpha, \beta))) \quad (\forall \alpha \in Y(i)) (\forall i \in T_{h-1} \setminus M),$$

заменить h на $h - 1$, μ на $\mu + 1$ и идти на Шаг μ .

Завершение процедуры. Обозначить $W_O^p(Y, V)$ пару (Y^1, V^1) , где функции Y^1 , V^1 задаются равенствами $Y^1(i) = \{\alpha^1 \in Y(i) \mid B(i, \alpha^1) = \min_{\alpha \in Y(i)} B(i, \alpha)\}$ $(\forall i \in T_0)$,

$$Y^1(i) = Y(i) \quad (\forall i \in T \setminus T_0),$$

$$\begin{aligned} V^1(i, \alpha) &= \{\beta^1 \in V(i, \alpha) \mid f^p(i, \alpha, \beta^1) + B(i, s(i, \alpha, \beta^1)) = \\ &= \min_{\beta \in V(i, \alpha)} (f^p(i, \alpha, \beta) + B(i, s(i, \alpha, \beta)))\} \quad (\forall \alpha \in Y^1(\pi(i))) \quad (\forall i \in T \setminus T_0). \end{aligned}$$

5. Следующее утверждение даёт обоснование динамическому программированию для задачи A^m .

ТЕОРЕМА 3. При любой паре (φ, ψ) функций (выбора элементов из подмножеств) $\varphi : (\beta(A) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow A$, $\psi : (\beta(B) \setminus \{\emptyset\}) \rightarrow B$ следующий алгоритм (алгоритм $R_O^m(\varphi, \psi)$), используя полученную по теореме 2 пару (X^m, U^m) , находит значения $x_i (\forall i \in T)$, $u_i (\forall i \in T)$ функций $x : T \rightarrow A$, $u : T \rightarrow B$, составляющих оптимальный процесс в задаче A^m .

АЛГОРИТМ $R_O^m(\varphi, \psi)$.

Шаг 0. Положить $u_i = \varphi(X^m(i)) (\forall i \in T_0)$, $\mu = 1$.

Шаг μ . Если $\mu = h(T) + 1$, остановиться. Иначе положить $u_i = \psi(U^m(i, x_{\pi(i)}))$ $(\forall i \in T_\mu)$, $x_i = s(i, x_{\pi(i)}, u_i) (\forall i \in T_\mu)$, заменить μ на $\mu + 1$ и идти на Шаг μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В указанном замечании 1 случае из теоремы 3 получается теорема 4 [2] и алгоритм $R_O^m(\varphi, \psi)$ формулируется как алгоритм R_O [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хачатуров В. Р., Веселовский В. Е., Злотов А. В., Калдябаев С. У., Калиев Е. Ж., Коваленко А. Г., Монтлевич В. М., Сигал И. Х., Хачатуров Р. В. Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности. М.: Наука, 2000. 353 с. [Khachaturov V. R., Veselovskiy V. E., Zlotov A. V., Kaldybaev S. U., Kaliev E. Zh., Kovalenko A. G., Montlevich V. M., Sigal I. Kh., Khachaturov R. V. Combinatorial methods and algorithms for solving discrete optimization problems of large dimension. Moscow: Nauka, 2000. 353 pp.]
2. Овчинников В. Г. Алгоритмы динамического программирования оптимальных и близких к ним процессов / В сб.: *Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием* (29–31 мая 2008 г.). Часть 4: Информационные технологии в математическом моделировании / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2008. С. 107–112. [Ovchinnikov V. G. Algorithms of dynamic programming for optimal and similar processes / In: *Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation* (29–31 May 2008). Part 4 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: Samara State Technical Univ., 2008. Pp. 107–112].

Поступила в редакцию 04/VII/2012;
в окончательном варианте — 15/VIII/2012.

MSC: 90C27; 90C10, 90C39

ON THE ALGORITHMS OF DYNAMIC PROGRAMMING FOR OPTIMAL PROCESSES

V. G. Ovchinnikov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: ovchinnikov42@mail.ru

The problem of discrete optimal control which has m consistently applied objective functions is formulated. In this problem the optimal process, also called m -optimal, is sought as a pair of functions defined on a finite set of steps at the links by which one function is uniquely defines the other, with the constraints of these functions with inclusion “ $\in$ ” of their values in the final multiple values of the functions of the known pair. A uniform representation of sets, forming the k -optimal processes for k not greater than m , is given with construction of nondecreasing sequence, upper limited by this pair by the “ $\subset$ ” inclusions, on the basis of characterization of solvability of the problem.

Key words: *discrete optimal control, consistently applied criteria, dynamic programming, algorithms.*

Original article submitted 04/VII/2012;
revision submitted 15/VIII/2012.