Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Максимова, О задаче Коши для системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу с нильпотентным матричным коэффициентом, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 3(), 184–187

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:33:36

УДК 517.956.3

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ С НИЛЬПОТЕНТНЫМ МАТРИЧНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

*Е. А. Максимова*Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.E-mail: katyuha_mak@mail.ru

Методом Римана получено решение задачи Коши для системы уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу с нильпотентным матричным коэффициентом степени m . Сформулирована теорема корректности решения задачи Коши по Адамару.

Ключевые слова: метод Римана, задача Коши, система уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу, нильпотентная матрица.

Рассматривается система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{2G}{y} \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\top$, G — действительная $(n \times n)$ -нильпотентная матрица [1] степени m , $2 \leq m \leq n$.

ЗАДАЧА КОШИ. Найти вектор-функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, где $D = \{(x, y) : 0 < -y < x < y + 1\}$;
- 2) $U(x, y)$ удовлетворяет системе (1);
- 3) выполняются начальные условия

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1]; \quad \lim_{y \rightarrow -0} K(y) \frac{\partial U}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in (0, 1), \quad (2)$$

где $\tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x), \dots, \tau_n(x))^\top$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x))^\top$, $K(y) = (-y)^{2G}$.

В характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ область D переходит в область $H = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$, матричное уравнение (1) редуцируется к системе уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу специального вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{G}{\eta - \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (3)$$

а начальные условия (2) принимают вид

$$U(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad \xi \in [0, 1]; \quad \lim_{\eta \rightarrow \xi + 0} K\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = \nu(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \quad (4)$$

Екатерина Алексеевна Максимова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Известно [1], что для любой нильпотентной матрицы G существует матрица перехода Q к жорданову базису такая, что

$$Q^{-1}GQ = J,$$

где J — жорданова форма матрицы G . Матрица J состоит из r клеток размером H_{l_k} ($l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$):

$$J = \begin{pmatrix} H_{l_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_{l_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_{l_r} \end{pmatrix}, \quad H_{l_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После преобразования $Q^{-1}GQ = J$ система уравнений (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{J}{\eta - \xi} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (5)$$

где $W = Q^{-1}U$. Условия Коши (4) для системы (5) преобразуются к виду

$$W(\xi, \xi) = Q^{-1}\tau(\xi), \quad \xi \in [0, 1],$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi + 0} \tilde{K} \left(\frac{\xi - \eta}{2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) = Q^{-1}\nu(\xi), \quad \xi \in (0, 1),$$

где $\tilde{K} = (-y)^{2J}$.

В работе [2] для системы (5) построена матрица Римана

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = f(J) = V^J {}_2F_1 \left(\begin{matrix} J, J \\ 1 \end{matrix}; \sigma \right),$$

где $\sigma = -(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)(\xi - \eta_0)^{-1}(\xi_0 - \eta)^{-1}$, $V = (\eta - \xi)^2(\eta - \xi_0)^{-1}(\eta_0 - \xi)^{-1}$.

Если $W(\xi, \eta)$ является решением системы уравнением (5), то, используя свойства её матрицы Римана $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ и векторный аналог тождества Грина [4], получаем, что

$$W(\xi_0, \eta_0) = \sum_{k=1}^n I(J, w_k) e_k, \quad (6)$$

где $e_k = (e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kn})^\top$, $e_{ki} = 0$, $i \neq k$, $e_{kk} = 1$; w_k — компоненты вектора W ;

$$\begin{aligned} I(J, w_k) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} f(J) w_k \Big|_{\substack{\xi = \eta_0 - \varepsilon \\ \eta = \eta_0}} + \frac{1}{2} f(J) w_k \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = \xi_0 + \varepsilon}} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} f(J) \left[\frac{\partial w_k}{\partial \eta} - \frac{\partial w_k}{\partial \xi} \right]_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi - \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left(\frac{\partial f(J)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(J)}{\partial \xi} + \frac{4f(J)J}{\xi - \eta} \right) w_k \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi \right). \quad (7) \end{aligned}$$

Известно [1], что если J — жорданова форма матрицы с одним собственным значением λ , то функция $I(J, w_k)$ может быть записана в виде блочно-диагональной матрицы:

$$I(J, w_k) = \text{diag} \{ I(H_{l_1}, w_k), \dots, I(H_{l_j}, w_k), \dots, I(H_{l_r}, w_k) \}.$$

Здесь

$$I(H_{l_j}, w_k) = \begin{pmatrix} I(\lambda, w_k) & \frac{I'_\lambda(\lambda, w_k)}{1!} & \vdots & \frac{I_\lambda^{(l_j-1)}(\lambda, w_k)}{(l_j-1)!} \\ 0 & I(\lambda, w_k) & \vdots & \frac{I_\lambda^{(l_j-2)}(\lambda, w_k)}{(l_j-2)!} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & I(\lambda, w_k) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

а функция $I(\lambda, w_k)$ записывается в виде (7) после формальной замены J на λ .

После подстановки (8) в (6) имеем

$$W(\xi_0, \eta_0) = EI(\lambda, W) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{J^k}{k!} I_\lambda^{(k)}(\lambda, W). \quad (9)$$

Выполняя в выражении (9) замену $W = Q^{-1}U$, получим¹

$$\begin{aligned} U(\xi_0, \eta_0) &= EI(\lambda, U) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{QJ^kQ^{-1}}{k!} I_\lambda^{(k)}(\lambda, U) = \\ &= EI(\lambda, U) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(G - \lambda E)^k}{k!} I_\lambda^{(k)}(\lambda, U). \end{aligned} \quad (10)$$

После подстановки $\lambda = 0$ в (10) получим

$$U(\xi_0, \eta_0) = EI(0, U) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{G^k}{k!} I_\lambda^{(k)}(0, U).$$

Воспользовавшись выражениями для $I(\lambda, U)$, полученными в [3] для случая $\lambda \in (-1/2, 0]$, найдём

$$\begin{aligned} I(0, U) &= \frac{1}{\eta_0 - \xi_0} \left(\int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi) (\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) d\xi \right) - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) d\xi, \\ I^{(k)}(0, U) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(K_1^{(j)}(1) (\eta_0 - \xi_0)^{-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \left(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \right)^{k-j} d\xi - \right. \\ &\quad - \frac{(-1)^j}{2} K_2^{(j)}(0) (\eta_0 - \xi_0)^{-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau'(\xi) \left(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \right)^{k-j} (\eta_0 + \xi_0 - 2\xi) d\xi - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} K_2^{(j)}(0) \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) [\varphi(\xi)]^0 \left(\ln \frac{\varphi(\xi)}{(\eta_0 - \xi_0)^2} \right)^{k-j} d\xi \right), \end{aligned}$$

где $K_1^{(j)}(1) = 2j\Phi_{j-1}(0) - \Phi_j(0)$, $K_2^{(j)}(0) = \Phi_j(0)$. Здесь $\Phi_j(\lambda)$ определяются рекуррентно:

$$\Phi_1(\lambda) = \psi(1 - 2\lambda) - \psi(1 - \lambda), \quad \Phi_n(\lambda) = \Phi_{n-1}(\lambda)\Phi_1(\lambda) + \Phi'_{n-1}(\lambda),$$

где $\psi(\lambda)$ — дигамма-функция [5].

¹Этот же результат может быть получен с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестера [1].

Используя выражения для $U(\xi_0, \eta_0)$, можно записать решение $U(x, y)$ задачи Коши (1), (2) в области D .

ТЕОРЕМА. Если функции $\tau(x) \in C^3[0, 1]$ и $\nu(x) \in C^2(0, 1)$, то задача Коши (1), (2) в области D корректна по Адамару.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Lankaster P.* Theory of Matrices. New York, London: Academic Press, 1969. 316 pp.; русск. пер.: Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982. 280 с.
2. Андреев А.А. Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа / В сб.: *Дифференц. уравнения*. Вып. 16: Сб. науч. тр. пед. ин-тов РСФСР. Рязан. гос. пед. ин-т, 1980. С. 9–14. [Andreev A. A. On a class of systems of differential equations of hyperbolic type / In: *Partial differential equations*. Issue 16. Ryazan: Ryazan. Gos. Ped. Inst., 1980. Pp. 9–14].
3. Максимова Е.А. О задаче Коши для n -мерной системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу на плоскости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1(26). С. 21–30. [Maksimova E. A. On Cauchy Problem for system of n Euler–Poisson–Darboux equations in the plane // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 1(26). Pp. 21–30].
4. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1966. 203 с.; англ. пер.: Bitsadze A. V. Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 1964. 160 pp.
5. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. New York: Dover, 1972. 824 pp.; русск. пер.: Справочник по специальным функциям / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

Поступила в редакцию 13/VI/2012;
в окончательном варианте — 13/VIII/2012.

MSC: 35L45

ON CAUCHY PROBLEM FOR EULER–POISSON–DARBOUX SYSTEM WITH NILPOTENT MATRIX COEFFICIENT

Maksimova E. A.

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.
E-mail: kattyha_mak@mail.ru

The solution of Cauchy problem for the system of Euler–Poisson–Darboux equations with nilpotent matrix coefficient of power m is obtained by the Riemann method. The Hadamard well-posedness theorem for the Cauchy problem solution is formulated.

Key words: Riemann method, Cauchy problem, Euler–Poisson–Darboux system, nilpotent matrix.

Original article submitted 13/VI/2012;
revision submitted 13/VIII/2012.