Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Репин, С. К. Кумыкова, Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 4(), 17–25

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:22:48

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.6+517.968.23

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О. А. Репин^{1,2}, С. К. Кумыкова³¹ Самарский государственный экономический университет, 443090, Россия, Самара, ул. Советской Армии, 141.² Самарский государственный технический университет, 443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.³ Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, 360004, Россия, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mails: matstat@mail.ru, bsk@rect.kbsu.ru

Исследована однозначная разрешимость внутреннекраевой задачи с операторами Сайго для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. При ограничениях неравенственного типа на известные функции и различных порядках операторов обобщённого дробного интегро-дифференцирования доказана теорема единственности. Существование решения задачи эквивалентно редукции к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: краевая задача, гипергеометрическая функция Гаусса, операторы дробного порядка, уравнение Фредгольма.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $m = \text{const} > 0$, в конечной области Ω , ограниченной отрезками AA_0 , BB_0 , A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно, и характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, $J \equiv AB$ — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

ЗАДАЧА. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(\Omega_1) \cap C_{x,y}^{(2,2)}(\Omega_2)$, $u_x \in C(\overline{\Omega_1})$, являющуюся решением уравнения (1) при $y \neq 0$, удовлетворяющую условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

Олег Александрович Репин (д.ф.-м.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики¹; профессор, каф. прикладной математики и информатики². Светлана Каншубиевна Кумыкова (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. теории функций и функционального анализа.

$$a(x) \left(I_{0+}^{\alpha_1, \beta_1, \eta_1} \delta(t) u[\theta_0(t)] \right) (x) + b(x) \left(I_{1-}^{\alpha_2, \beta_2, \eta_2} \omega(t) u[\theta_1(t)] \right) (x) + c(x) u(x, 0) + d(x) u_y(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in J, \quad (3)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \eta_i$ ($i = 1, 2$) — вещественные числа, $\theta_0(x), \theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in J$, с характеристиками AC, BC соответственно; $\varphi_i(y)$ ($i = 1, 2, 3$), $a(x), b(x), c(x), d(x), g(x), \delta(x), \omega(x)$ — заданные функции, такие, что $\varphi_i(y) \in \mathbb{C}(\overline{J})$, $a(x), b(x), c(x), d(x), g(x) \in \mathbb{C}^1(\overline{J}) \cap \mathbb{C}^3(J)$, причём $a(x), b(x), c(x), d(x)$ одновременно в ноль не обращаются; $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ — операторы обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$, введённые в [1] (см. также [2, с. 326–327], [3, с. 14]) и имеющие при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha + \beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt, & \alpha > 0; \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f\right)(x), & \alpha < 0, n = [-\alpha] + 1, \end{cases} \quad (4)$$

$$(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\left(\alpha + \beta, -\eta; \alpha; \frac{t-x}{1-x}\right) f(t) dt, & \alpha > 0; \\ \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{1-}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f\right)(x), & \alpha < 0, n = [-\alpha] + 1. \end{cases}$$

Для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в работах [4, 5] исследовались нелокальные задачи, в которых краевые условия содержали операторы дробного дифференцирования. Данная работа обобщает полученные ранее результаты и является продолжением этих исследований.

2. Единственность решения.

ТЕОРЕМА. В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)–(3), если

$$\frac{a(1)}{E_1(1)} + \frac{b(0)}{E_1(0)} \geq 0, \quad (5)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\beta, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \eta_1 = \eta_2 = 2\beta - 1, \quad \delta(x) = \omega(x) = 1, \quad \beta = m/(2m + 4) \quad (6)$$

и выполняются условия

$$E_1(x) = \gamma_1(a(x) + b(x)) + c(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (7)$$

$$\left(\frac{a(x)}{E_1(x)}\right)' \leq 0, \quad \left(\frac{b(x)}{E_1(x)}\right)' \geq 0, \quad \frac{d(x)}{E_1(x)} \geq 0 \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (8)$$

либо

$$\frac{a(1)}{E_2(1)} \geq 0, \quad \frac{b(0)}{E_2(0)} \geq 0, \quad (9)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta - 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \eta_1 = \eta_2 = 1 - 2\beta, \quad \delta(x) = x^{2\beta-1}, \quad \omega(x) = (1-x)^{2\beta-1}, \quad (10)$$

$$E_2(x) = \gamma_2(a(x) + b(x)) - d(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (11)$$

$$a(x)(1-x)^{1-2\beta} + b(x)x^{1-2\beta} + \Gamma(2\beta)(x(1-x))^{1-2\beta}d(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (12)$$

$$\left(\frac{a(x)}{E_2(x)}\right)' \leq 0, \quad \left(\frac{b(x)}{E_2(x)}\right)' \geq 0, \quad \frac{c(x)}{E_2(x)} \geq 0 \quad \forall x \in \overline{J}, \quad (13)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}.$$

Доказательство. Пусть $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$.

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$, будем иметь функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое на $\overline{J}$ из области Ω_1 :

$$\nu(x) = \tau'''(x).$$

Рассмотрим интеграл

$$J^* = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = \int_0^1 \tau(x)\tau'''(x)dx = \int_0^1 \tau(x)d(\tau''(x)).$$

Интегрируя последнее с учётом однородных граничных условий (2), получим

$$2J^* = -(\tau'(1))^2 \leq 0. \quad (14)$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы $J^* \geq 0$. Действительно, решение задачи Коши в области Ω_2 имеет вид [7, с. 152]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right)t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}dt + \\ & + \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} y \int_0^1 \nu\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}(2t-1)\right)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (15) и (4), получим

$$u[\theta_0(x)] = \gamma_1(I_{0+}^{\beta, 0, \beta-1}\tau(t))(x) - \gamma_2(I_{0+}^{1-\beta, 2\beta-1, \beta-1}\nu(t))(x),$$

$$u[\theta_1(x)] = \gamma_1(I_{1-}^{\beta, 0, \beta-1}\tau(t))(x) - \gamma_2(I_{1-}^{1-\beta, 2\beta-1, \beta-1}\nu(t))(x).$$

Пусть выполняются условия (5)–(8) теоремы.

Подставляя $u[\theta_0(x)]$ и $u[\theta_1(x)]$ в условие (3) и опираясь на полугрупповые свойства обобщенных операторов [2, с. 327]

$$\begin{aligned} (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta}(I_{0+}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta}f)(t))(x) &= (I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta}f)(x), \quad \gamma > 0, \\ (I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta}(I_{1-}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta}f)(t))(x) &= (I_{1-}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta}f)(x), \quad \gamma > 0, \end{aligned}$$

после некоторых преобразований получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое на $\bar{J}$ из гиперболической части Ω_2 смешанной области Ω :

$$\tau(x) = a_1(x)(I_{0+}^{1-2\beta}\nu)(x) + b_1(x)(I_{1-}^{1-2\beta}\nu)(x) + c_1(x)\nu(x) + g_1(x), \quad (16)$$

где $(I_{0+}^{1-2\beta}\nu)(x)$ и $(I_{1-}^{1-2\beta}\nu)(x)$ — дробные интегралы в смысле Римана—Лиувилля [2, с. 42],

$$a_1(x) = \gamma_2 \frac{a(x)}{E_1(x)}, \quad b_1(x) = \gamma_2 \frac{b(x)}{E_1(x)}, \quad c_1(x) = -\frac{d(x)}{E_1(x)}, \quad g_1(x) = \frac{g(x)}{E_1(x)}.$$

При $g(x) = 0$, используя методику, восходящую к Ф. Трикоми [8, с. 385] и применённую в работах [5, 6], будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi \beta} J^* &= \frac{\pi}{\sin \pi \beta} \int_0^1 c_1(x) \nu^2(x) dx - \\ &- \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \int_0^1 a'_1(x) \left(\left(\int_0^x \nu(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^x \nu(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right) dx + \\ &+ \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \int_0^1 b'_1(x) \left(\left(\int_x^1 \nu(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_x^1 \nu(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right) dx + \\ &+ (a_1(1) + b_1(0)) \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \times \\ &\times \left(\left(\int_0^1 \nu(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^1 \nu(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right). \quad (17) \end{aligned}$$

При выполнении условий (5)–(8) теоремы $a'_1(x) \leq 0$, $b'_1(x) \geq 0$, $c_1(x) \geq 0$, $a_1(1) + b_1(0) \geq 0$ и, следовательно, $J^* \geq 0$.

Пусть теперь выполняются условия (9)–(13) теоремы.

Покажем, что и в этом случае $J^* \geq 0$.

Аналогичными вычислениями можно показать, что функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое из области Ω_2 на J , имеет вид

$$\nu(x) = a_2(x)(D_{0+}^{1-2\beta}\tau)(x) + b_2(x)(D_{1-}^{1-2\beta}\tau)(x) + c_2(x)\tau(x) + g_2(x), \quad (18)$$

где

$$a_2(x) = \gamma_1 \frac{a(x)}{E_2(x)}, \quad b_2(x) = \gamma_1 \frac{b(x)}{E_2(x)}, \quad c_2(x) = \frac{c(x)}{E_2(x)}, \quad g_2(x) = \frac{g(x)}{E_2(x)},$$

$D_{0+}^{1-2\beta}$ и $D_{1-}^{1-2\beta}$ — операторы дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля [2, с. 43].

Аналогично [6], в результате ряда преобразований получим

$$\frac{1}{\pi} \Gamma^2(2\beta) \sin 2\pi\beta \cos \pi\beta J^* = \frac{1}{\pi} \Gamma^2(2\beta) \sin 2\pi\beta \cos \pi\beta \int_0^1 c_2(x) \tau^2(x) dx -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \int_0^1 a'_2(x) \left(\left(\int_0^x \tau_1(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^x \tau_1(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \int_0^1 b'_2(x) \left(\left(\int_x^1 \tau_2(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_x^1 \tau_2(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right) dx + \\
 & + \frac{1}{2} a_2(1) \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \left(\left(\int_0^1 \tau_1(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^1 \tau_1(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right) + \\
 & + \frac{1}{2} b_2(0) \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \left(\left(\int_0^1 \tau_2(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^1 \tau_2(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right), \quad (19)
 \end{aligned}$$

где

$$\tau_1(x) = \frac{\sin 2\pi\beta}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t) dt}{(x-t)^{1-2\beta}}, \quad \tau_2(x) = -\frac{\sin 2\pi\beta}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\tau(t) dt}{(t-x)^{1-2\beta}}.$$

При выполнении условий (9)–(13) теоремы $J^* \geq 0$. Отсюда с учётом (14) заключаем, что $J^* = 0$.

Поскольку слагаемые справа в соотношениях (17) и (19) неотрицательны, они также равны нулю. В частности,

$$\int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \left(\int_0^1 \nu(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 = 0, \quad \int_0^\infty t^{2\beta-1} dt \left(\int_0^1 \nu(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 = 0.$$

Так как $t^{2\beta-1} \geq 0$,

$$\int_0^1 \nu(\xi) \cos t\xi d\xi = 0, \quad \int_0^1 \nu(\xi) \sin t\xi d\xi = 0$$

для всех $t \in (0, \infty)$, в частности при $t = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. При этих значениях t функции $\sin t\xi$ и $\cos t\xi$ образуют полную ортогональную систему функций в $\mathbb{L}^2$. Следовательно, $\nu(\xi) = 0$ почти всюду, а так как $\nu(x)$ непрерывна по условию, $\nu(x) = 0$ всюду.

При $g_1(x) = 0$ подставим в (16) $\nu(x) = 0$ и получим $\tau(x) = 0$. Отсюда $u(x, y) \equiv 0$ в Ω_2 как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в Ω_1 — как решение однородной задачи (1), (2), $u(x, 0) = 0$.

В случае соотношения (19) аргументация доказательства тождества $u(x, y) \equiv 0$ аналогична. $\square$

3. Существование решения. Воспользуемся соотношением $\tau'''(x) = \nu(x)$, принесённым из области Ω_1 на линию AB . Проинтегрируем его трижды от 0 до x . Получим

$$\tau(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^2}{2} \nu(\xi) d\xi + \tau''(0) \frac{x^2}{2} + \tau'(0)x + \tau(0).$$

Из граничных условий (2) следует, что

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(1) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) = \varphi_3(0).$$

Поэтому

$$\tau(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi)^2 \nu(\xi) d\xi - \frac{x^2}{2} \int_0^1 (1 - \xi)^2 \nu(\xi) d\xi + \\ + \varphi_2(0)x^2 + (x - x^2)\varphi_3(0) + (1 - x^2)\varphi_1(0). \quad (20)$$

Пусть выполняются условия (5)–(8) теоремы. Исключим $\tau(x)$ из (16) и (20). После простых преобразований получим

$$c_1(x)\nu(x) + \int_0^1 \frac{K_1(x, \xi)\nu(\xi)}{|x - \xi|^{2\beta}} d\xi = f_1(x), \quad (21)$$

где

$$K_1(x, \xi) = \begin{cases} \frac{a_1(x)}{\Gamma(1 - 2\beta)} - \frac{1}{2}(x - \xi)^{2+2\beta} + \frac{x^2}{2}(1 - \xi)^2(x - \xi)^{2\beta}, & \xi \leq x, \\ \frac{b_1(x)}{\Gamma(1 - 2\beta)} + \frac{x^2}{2}(1 - \xi)^2(\xi - x)^{2\beta}, & \xi \geq x, \end{cases}$$

$$f_1(x) = -g_1(x) + \varphi_2(0)x^2 + (x - x^2)\varphi_3(0) + (1 - x^2)\varphi_1(0).$$

При $c_1(x) \neq 0$ или, что то же самое, $d(x) \neq 0$ уравнение (21) есть уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре, правая часть которого $f_1(x) \in \mathbb{C}^1(\bar{J}) \cap \mathbb{C}^2(J)$.

Безусловная разрешимость уравнения (21) в требуемом классе функций следует из единственности решения задачи.

Докажем теперь существование решения задачи (1)–(3) при выполнении условий (9)–(13) теоремы. Для этого исключим $\tau(x)$ из (18) и (20). После довольно громоздких вычислений имеем

$$\nu(x) + \int_0^1 K_2(x, t)\nu(t)dt = f_2(x), \quad (22)$$

где

$$K_2(x, t) = \begin{cases} K_3(x, t), & x \geq t, \\ K_4(x, t), & x \leq t, \end{cases}$$

$$K_3(x, t) = \Psi(x, t) - \left(\frac{a_2(x)}{\Gamma(3 + 2\beta)}(x - t)^{1+2\beta} + \frac{1}{2}c_2(x)(x - t)^2 + \right. \\ \left. + \frac{b_2(x)}{\Gamma(2 + 2\beta)}(1 - x)^{1+2\beta}(x - t) + \frac{b_2(x)(1 - x)^{2+2\beta}}{(1 + \beta)\Gamma(1 + 2\beta)} \right),$$

$$K_4(x, t) = \Psi(x, t) + \frac{b_2(x)}{2\Gamma(1 + 2\beta)}(1 - x)^{2\beta}(1 - t)^2 F\left(-2\beta, 1; 3; \frac{1 - t}{1 - x}\right),$$

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{a_2(x)}{\Gamma(2 + 2\beta)} - \frac{b_2(x)(1 + 2\beta)}{\Gamma(2\beta)}(1 - x)^{2\beta-1} + \right. \\ \left. + \frac{b_2(x)(1 - x)^{2\beta}}{\Gamma(2\beta)} - \frac{1}{2}c_2(x)x^2 \right)(1 - t)^2 + \frac{b_2(x)}{2\beta\Gamma(2\beta)}(1 - x)^{2\beta}(1 - t),$$

$$f_2(x) = g_2(x) + \frac{a_2(x)}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \left((\varphi_2(0) - \varphi_3(0) - \varphi_1(0)) \xi^2 + \xi \varphi_3(0) \right) \frac{d\xi}{(x - \xi)^{1-2\beta}} -$$

$$- \frac{b_2(x)}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_x^1 \left((\varphi_2(0) - \varphi_3(0) - \varphi_1(0)) \xi^2 + \xi \varphi_3(0) + \varphi_1(0) \right) \frac{d\xi}{(x - \xi)^{1-2\beta}}.$$

Исследуем гладкость $f_2(x)$ правой части уравнения (22). Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d\xi}{(x - \xi)^{1-2\beta}} &= x^{2\beta-1}, \quad \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{dx}{(\xi - x)^{1-2\beta}} = (1 - x)^{2\beta-1}, \\ \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi d\xi}{(x - \xi)^{1-2\beta}} &= (1 - 2\beta) B(2, 2\beta) x^{2\beta}, \\ \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\xi d\xi}{(\xi - x)^{1-2\beta}} &= \frac{1}{2\beta} (1 - x)^{2\beta} - (1 - x)^{2\beta-1}, \\ \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi^2 d\xi}{(x - \xi)^{1-2\beta}} &= (2 + 2\beta) B(3, 2\beta) x^{1+2\beta}, \\ \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(\xi - x)^{1-2\beta}} &= 2(1 - x)^{2\beta} - (4\beta + 1)(1 - x)^{2\beta-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, правая часть уравнения (22)

$$f_2(x) = [x(1 - x)]^{2\beta-1} f_2^*(x),$$

где $f_2^*(x) \in \mathbb{C}(\bar{J}) \cap \mathbb{C}^2(J)$.

Итак, уравнение (22) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K_2(x, t) \in \mathbb{C}[0,1) \cap \mathbb{C}^1(0,1)$, причём при $x = 1$ оно может обращаться в бесконечность порядка $1 - 2\beta$.

Уравнение (22) безусловно разрешимо в требуемом классе функций на основании теоремы единственности.

Зная $\nu(x)$, можно определить из (16), (20) $\tau(x) = u(x, 0)$.

Для определения решения $u(x, y)$ уравнения (1) при $y > 0$ решается задача (1), (2), $u(x, 0) = \tau(x)$. Решение этой задачи даётся с помощью формулы [9, с. 133–135]

$$\begin{aligned} \pi u(x, y) &= \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_3(\eta) d\eta - \\ &- \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 1, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta + \int_0^1 G(x, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) &= V(x, y; \xi, \eta) - W(x, y; \xi, \eta), \\ V(x, y; \xi, \eta) &= \begin{cases} (y - \eta)^{-1/3} f((x - \xi)(y - \eta)^{-1/3}), & y > \eta, \\ 0, & y \leq \eta, \end{cases} \\ W(x, y; \xi, \eta) &= \begin{cases} (y - \eta)^{-1/3} \varphi((x - \xi)(y - \eta)^{-1/3}), & y > \eta, \\ 0, & y \leq \eta, \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{\pi\sqrt{t}}{3\sqrt{3}} \left(I_{1/3} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2} \right) + I_{-1/3} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2} \right) \right),$$

$$\varphi(t) = \frac{\pi\sqrt{t}}{3} \left(I_{1/3} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2} \right) - I_{-1/3} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2} \right) \right),$$

$I_\nu(z)$ — функции Бесселя, $f(t)$, $\varphi(t)$ — функции Эйри [10, с. 196; с. 264].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // *Math. Rep. Kyushu Univ.*, 1977/78. Vol. 11, no. 2. Pp. 135–143.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
3. Репин О. А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Изд-во Саратов. ун-та, Самарский филиал, 1992. 164 с. [Repin O. A. Boundary value problems with shift for equations of hyperbolic and mixed type. Samara: Izd-vo Saratovskogo Universiteta, Samarskiy Filial, 1992. 164 pp.]
4. Елеев В. А., Кумыкова С. К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, 2010. № 5(37), Часть 2. С. 5–14. [Eleev V. A., Kumukova S. K. The inner boundary value problem for mixed-type equation of third order with multiple characteristics // *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN*, 2010. no. 5(37), Part 2. Pp. 5–14].
5. Репин О. А., Кумыкова С. К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 4(25). С. 25–36. [Repin O. A., Kumukova S. K. Nonlocal problem for a equation of mixed type of third order with generalized operators of fractional integro-differentiation of arbitrary order // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 4(25). Pp. 25–36].
6. Репин О. А., Кумыкова С. К. Об одной краевой задаче со сдвигом для уравнения смешанного типа в неограниченной области // *Дифференц. уравнения*, 2012. Т. 48, № 8. С. 1140–1149; англ. пер.: Repin O. A., Kumukova S. K. On a boundary value problem with shift for an equation of mixed type in an unbounded domain // *Diff. Equ.*. Vol. 48, no. 8. Pp. 1127–1136.
7. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с. [Smirnov M. M. Equations of mixed type. Moscow: Nauka, 1970. 295 pp.]
8. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Иностр. лит., 1957. 443 с. [Tricomi F. Lectures on partial differential equations. Moscow: Inostr. Lit., 1957. 443 pp.]
9. Джуроев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 239 с. [Dzhuraev T. D. Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types. Tashkent: Fan, 1979. 239 pp.]
10. Справочник по специальным функциям / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 831 с. [Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / eds. M. Abramowitz, I. Stegun. Moscow: Nauka, 1979. 831 pp.]

Поступила в редакцию 17/X/2012;
в окончательном варианте — 16/XI/2012.

MSC: 35M12; 26A33, 33C05

PROBLEM WITH SHIFT FOR THE THIRD-ORDER EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

O. A. Repin^{1,2}, *S. K. Kumykova*³

¹ Samara State Economic University,
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russia.

² Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

³ Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, Russia, 360004.

E-mails: matstat@mail.ru, bsk@rect.kbsu.ru

The unique solvability of boundary value problem with Saigo operators for the third-order equation with multiple characteristics was investigated. The uniqueness theorem with constraints of inequality type on the known functions and different orders of generalized fractional integro-differentiation was proved. The existence of solution is equivalently reduced to the solvability of Fredholm integral equation of the second kind.

Key words: boundary value problem, Gauss hypergeometric function, operators of fractional order, Fredholm equation.

Original article submitted 17/X/2012;
revision submitted 16/XI/2012.

Oleg A. Repin (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept of Mathematical Statistics and Econometrics¹; Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science².
Svetlana K. Kumykova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Functions Theory and Functional Analysis.