Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. К. Юлдашев, А. И. Середкина, Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 3(), 46–55

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:04:16

УДК 517.956.47

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Т. К. Юлдашев, А. И. Середкина

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнева,
Россия, 660014, Красноярск, пр. газеты имени «Красноярский рабочий», 31.

E-mails: tursunbay@rambler.ru, anytik888@yandex.ru

*Предлагается методика изучения обратной задачи для некоторых классов квазилинейных уравнений в частных производных высокого порядка. Доказывается теорема о существовании и единственности решения данной обратной задачи.***Ключевые слова:** обратная задача, квазилинейное уравнение в частных производных, суперпозиция дифференциальных операторов, метод характеристик, существование и единственность решения.

1. Постановка задачи. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков.

Локальная теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, основанная на понятиях производной по направлению и характеристик, начала формироваться еще в XVIII веке. Характеристики замечательны тем, что выражения в левой части уравнений в частных производных первого порядка представляют собой производную неизвестной функции по направлению вдоль характеристики. Это позволяет, перейдя к новой переменной, представить уравнение в частных производных первого порядка как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристики.

Основная идея, на которой основан развиваемый в статье подход, состоит в том, что выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методы решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В области $D \equiv D_T \times \mathbb{R}$ рассматривается нелинейное уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n L_0[u(t, x)] = f(t, x, \vartheta(t)) \quad (1)$$

с начальными

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^i u(t, x)}{\partial t^i} \Big|_{t=0} = \varphi_{i+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, 2n}, \quad (2)$$

Турсун Камалдинович Юлдашев (к.ф.-м.н., доц.), докторант, доцент, каф. высшей математики. Анна Игоревна Середкина, магистрант, инженер, каф. высшей математики.

и дополнительными

$$\int_0^t P(t, s)u(s, x)ds \Big|_{x=x_0} = \psi(t), \quad t \in D_T, \quad (3)$$

$$\vartheta(t) \Big|_{t=0} = \varphi_0 = \text{const} \quad (4)$$

условиями, где

$$L_0[u(t, x)] \equiv u_t + au_x, \quad a = a\left(t, x, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds\right);$$

$\psi(0) = 0$; $u(t, x)$ и $\vartheta(t)$ — неизвестные функции; $f(t, x, \vartheta) \in C(D \times D_T)$; $P(t, s) \in C(D_T^2)$; $a(t, x, u) \in C^{2n, 2n}(D \times \mathbb{R})$; $K(t, x) \in C(D)$; $\varphi_i(x) \in C^{2n+2}(\mathbb{R})$, $i = \overline{1, 2n+1}$; $\psi(t) \in C(D_T)$; $D_T \equiv [0, T]$, $0 < T < \infty$; n — произвольное натуральное число.

Изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиографию многих публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, можно найти в [1–3]. В настоящей работе изучается обратная задача, где восстанавливаемая функция $\vartheta(t)$ нелинейно входит в уравнение. При решении обратной задачи (1)–(4) относительно восстанавливаемой функции получается нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода, которое с помощью неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению второго рода. Задание условия (4) при преобразовании обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода и определяет значение неизвестной функции в начальной точке $t = 0$, т. е. $\vartheta(0) = \varphi_0$. Обратные задачи для квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка ранее рассматривались в работах [4, 5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением обратной задачи (1)–(4) называется пара непрерывных функций $\{u(t, x) \in C^{2n+1, 2n+1}(D), \vartheta(t) \in C(D_T)\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(4).

2. Задача Коши (1), (2). Левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n L_0[u] = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^n L_0[u] = L_2^n \left[L_1^n [L_0[u]] \right],$$

где

$$L_2 \left[L_1^n [L_0[u]] \right] \equiv (L_1^n [L_0[u]])_t - (L_1^n [L_0[u]])_x, \quad L_1 [L_0[u]] \equiv (L_0[u])_t + (L_0[u])_x.$$

Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$L_2^n \left[L_1^n [L_0[u]] \right] = f(t, x, \vartheta(t)). \quad (5)$$

Из (5) видно, что уравнение (1) имеет одну однократную характеристику:

$$x - \int_0^t a\left(s, x, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y)u(\theta, y)dyd\theta\right)ds = C_1;$$

две n -кратные характеристики:

$$x - t = C_2, \quad x + t = C_3,$$

где C_i — произвольные постоянные, $i = 1, 2, 3$.

Тогда, интегрируя уравнения (5) n раз вдоль линии третьей характеристики, получаем

$$L_2^{n-1} [L_1^n [L_0[u]]] = \Phi_1(x+t) + \int_0^t f(s, x, \vartheta(s)) ds, \quad (6)$$

$$L_2^{n-2} [L_1^n [L_0[u]]] = \Phi_2(x+t) + \Phi_1(x+t)t + \int_0^t (t-s) f(s, x, \vartheta(s)) ds, \quad (7)$$

$\vdots$

$$L_1^n [L_0[u]] = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x+t) \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s, x, \vartheta(s)) ds, \quad (8)$$

где $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ — произвольные непрерывные функции, которые подлежат дальнейшему определению.

Из (6) в силу начального условия (2) имеем $\Phi_1(x) = \varphi_{2n+1}$. Так как вдоль третьей характеристики ($x+t = C_3$)

$$\begin{aligned} \frac{dL_1^n [L_0[u]]}{dt} &= \frac{\partial L_1^n [L_0[u]]}{\partial t} + \frac{\partial L_1^n [L_0[u]]}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \left(L_1^n [L_0[u]] \right)_t - \left(L_1^n [L_0[u]] \right)_x, \\ &\vdots \\ \frac{d^n L_1^n [L_0[u]]}{dt^n} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right)^n L_1^n [L_0[u]], \end{aligned} \quad (9)$$

в силу условия (2) из (7) и (8) имеем

$$\Phi_2(x) = \varphi_{2n}(x), \dots, \Phi_n(x) = \varphi_{n+2}(x).$$

Тогда уравнение (8) приобретает следующий вид интегро-дифференциального уравнения:

$$L_1^n [L_0[u]] = \sum_{i=1}^n \varphi_{n+i+1}(x+t) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s, x, \vartheta(s)) ds. \quad (10)$$

Аналогично, интегрируя уравнения (10) n раз вдоль второй характеристики, получаем

$$\begin{aligned} L_1^{n-1} [L_0[u]] &= \Phi_{n+2}(x-t) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_{n+j+1}(x+s) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds + \\ &\quad + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} f(s, x, \vartheta(s)) ds, \end{aligned} \quad (11)$$

$$L_1^{n-2}[L_0[u]] = \Phi_{n+3}(x-t) + \Phi_{n+2}(x-t)t + \\ + \sum_{j=1}^n \int_0^t (t-s) \varphi_{n+j+1}(x+s) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!} f(s, x, \vartheta(s)) ds, \quad (12)$$

$$\vdots$$

$$L_0[u] = \sum_{i=n+1}^{2n} \Phi_{i+1}(x-t) \frac{t^{2n-i}}{(2n-i)!} + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n+j+1}(x+s) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds + \\ + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s, x, \vartheta(s)) ds, \quad (13)$$

где $\Phi_i(x)$, $i = \overline{n+1, 2n}$ — произвольные непрерывные функции, которые подлежат дальнейшему определению.

Из (11) в силу начального условия (2) имеем $\Phi_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(x)$.

Вдоль третьей характеристики справедливо (9). А вдоль второй характеристики имеем

$$\frac{dL_0[u]}{dt} = \frac{\partial L_0[u]}{\partial t} + \frac{\partial L_0[u]}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \left(L_0[u] \right)_t + \left(L_0[u] \right)_x, \\ \vdots \\ \frac{d^n L_0[u]}{dt^n} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^n L_0[u]. \quad (14)$$

Тогда в силу (2) из (12) и (13) получаем

$$\Phi_{n+2}(x) = \varphi_n(x), \dots, \Phi_{2n}(x) = \varphi_2(x).$$

Отсюда имеем следующее квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$L_0[u] = \sum_{i=1}^n \varphi_{i+1}(x-t) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n+j+1}(x+s) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds + \\ + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s, x, \vartheta(s)) ds. \quad (15)$$

Интегрируя (15) один раз вдоль линии первой характеристики, с учётом начального условия (2) получаем нелинейное интегральное уравнение Вольтерра (см. [4, 5]):

$$u(t, x) \equiv \Theta_1(t, x; u, \vartheta) = \varphi_1 \left(x - \int_0^t a(s, x, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta) ds \right) + \\ + \sum_{i=1}^n \varphi_{i+1}(x-t) \frac{t^i}{i!} + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n+j+1}(x+s) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!} f(s, x, \vartheta(s)) ds, \quad (16)$$

где x играет роль параметра.

Функция

$$\varphi_1 \left(x - \int_0^t a \left(s, x, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) ds \right)$$

является первым интегралом уравнения $u_t + au_x = 0$ и она постоянна вдоль решения этого уравнения. Производные этой функции вдоль первой характеристики равны нулю и сама функция удовлетворяет данному уравнению.

В (16) также отметим, что функции $\varphi_2(x-t), \varphi_3(x-t), \dots, \varphi_{n+1}(x-t)$ являются первыми интегралами уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^n u(t, x) = 0$ и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Производные этих функций вдоль второй характеристики равны нулю и сами эти функции удовлетворяют данному уравнению.

А функции $\varphi_{n+2}(x+t), \varphi_{n+3}(x+t), \dots, \varphi_{2n+1}(x+t)$ являются первыми интегралами уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n u(t, x) = 0$$

и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Вдоль третьей характеристики эти функции удовлетворяют данному уравнению.

Исходя из этих соображений покажем, что интегральное уравнение (16) удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (1). Путём $(2n+1)$ -кратного дифференцирования из (16) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^{2n+1}u(t, x)}{dt^{2n+1}} = f(t, x, \vartheta(t)), \quad (17)$$

где x играет роль параметра.

Так как вдоль третьей характеристики справедливо (9), а вдоль второй характеристики — (14), имеем

$$\frac{d^{2n+1}u(t, x)}{dt^{2n+1}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^n L_0[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n (u_t + au_x).$$

Отсюда заключаем, что из обыкновенного дифференциального уравнения (17) следует дифференциальное уравнение в частных производных (1).

3. Уравнение для восстанавливаемой функции. Используя условие (4), из (16) получаем

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \alpha(t) \varphi_1 \left(x_0 - \int_0^t a \left(s, x_0, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) ds \right) + \\ & + \int_0^t P(t, s) \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{i+1}(x_0 - t) \frac{s^i}{i!} + \sum_{j=1}^n \varphi_{n+j+1}(x_0 + t) \frac{s^{n+j}}{(n+j)!} \right) ds + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t P(t, s) \frac{(t-s)^{2n+1}}{(2n+1)!} f(s, x_0, \vartheta(s)) ds, \quad \alpha(t) = \int_0^t P(t, s) ds$$

или

$$\int_0^t h(t, s, \vartheta(s)) ds = g(t) - \alpha(t) \varphi_1 \left(x_0 - \int_0^t a \left(s, x_0, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) ds \right), \quad (18)$$

где

$$h(t, s, \vartheta(s)) = P(t, s) \frac{(t-s)^{2n+1}}{(2n+1)!} f(s, x_0, \vartheta(s)),$$

$$g(t) = \psi(t) - \int_0^t P(t, s) \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{i+1}(x_0 - t) \frac{s^i}{i!} + \sum_{j=1}^n \varphi_{n+j+1}(x_0 + t) \frac{s^{n+j}}{(n+j)!} \right) ds.$$

Относительно восстанавливаемой функции $\vartheta(t)$ уравнение (18) является нелинейным интегральным уравнением Вольтерра первого рода. Его с помощью классических методов невозможно свести к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, к которому мы могли бы применять метод последовательных приближений. Уравнение (18) запишем в виде [6]

$$\begin{aligned} \vartheta(t) + \int_0^t G(s) \vartheta(s) ds &= \vartheta(t) + g(t) - \\ &- \alpha(t) \varphi_1 \left(x_0 - \int_0^t a \left(s, x_0, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) ds \right) + \\ &+ \int_0^t \left[G(s) \vartheta(s) - h(t, s, \vartheta(s)) \right] ds, \end{aligned} \quad (19)$$

где $0 < G(t)$ — произвольная функция такая, что

$$\exp \left\{ - \int_0^t G(s) ds \right\} \ll 1.$$

Применяя к (19) метод резольвенты ядра $[-G(s)]$, получаем

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= \vartheta(t) + g(t) - \alpha(t) \varphi_1 \left(x_0 - \int_0^t a \left(s, x_0, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) ds \right) + \\ &+ \int_0^t \left[G(s) \vartheta(s) - h(t, s, \vartheta(s)) \right] ds - \int_0^t G(s) \exp \left\{ - \mu(t, s) \right\} \left\{ \vartheta(s) + g(s) - \right. \\ &- \alpha(s) \varphi_1 \left(x_0 - \int_0^s a \left(\theta, x_0, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, y) u(\xi, y) dy d\xi \right) d\theta \right) + \\ &\left. + \int_0^s \left[G(\theta) \vartheta(\theta) - h(s, \theta, \vartheta(\theta)) \right] d\theta \right\} ds, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\mu(t, s) = \int_s^t G(\theta) d\theta, \quad \mu(t, 0) = \mu(t).$$

После несложных преобразований из (20) имеем

$$\begin{aligned} \vartheta(t) \equiv \Theta_2(t; u, \vartheta) = & \left\{ \vartheta(t) + g(t) - \right. \\ & - \alpha(t) \varphi_1 \left(x_0 - \int_0^t a \left(s, x_0, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) ds \right) + \\ & + \int_0^t \left[G(s) \vartheta(s) - h(t, s, \vartheta(s)) \right] ds \Big\} \exp \left\{ -\mu(t) \right\} + \\ & + \int_0^t G(s) \exp \left\{ -\mu(t, s) \right\} \left\{ g(t) - g(s) + \vartheta(t) - \vartheta(s) - \right. \\ & - \alpha(t) \varphi_1 \left(x_0 - \int_0^t a \left(s, x_0, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) ds \right) + \\ & + \alpha(s) \varphi_1 \left(x_0 - \int_0^s a \left(\theta, x_0, \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, y) u(\xi, y) dy d\xi \right) d\theta \right) + \\ & \left. + \int_0^t \left[G(s) \vartheta(s) - h(t, s, \vartheta(s)) \right] ds - \int_0^s \left[G(\theta) \vartheta(\theta) - h(s, \theta, \vartheta(\theta)) \right] d\theta \right\} ds. \quad (21) \end{aligned}$$

Уравнение (18) при начальном условии (4) эквивалентно уравнению (21).

4. Разрешимость обратной задачи (1)–(4). Итак, мы получаем, что разрешимость обратной задачи (1)–(4) эквивалентна разрешимости следующей системы нелинейных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} u(t, x) \equiv \Theta_1(t, x; u, \vartheta), \\ \vartheta(t) \equiv \Theta_2(t; u, \vartheta), \end{cases} \quad (22)$$

где x играет роль параметра.

Для произвольной непрерывной в области D функции $h(t, x)$ норму вводим следующим образом:

$$\|h(t, x)\| = \max_{(t, x) \in D} |h(t, x)|,$$

где x играет роль параметра. Аналогично вводится норма для функции одной переменной.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $|\varphi_i(x)| \leq M_i, 0 < \sum_{i=1}^{2n+1} M_i \frac{T^i}{i!} \leq \Delta_0 < \infty;$
- 2) $f(t, x, \vartheta) \in \text{Bnd}(M_0(t)) \cap \text{Lip}\{L_0(t)|_{\vartheta}\};$
- 3) $0 < \int_0^T \frac{(T-s)^{2n}}{(2n)!} M_0(s) ds \leq \Delta_1 < \infty;$

- 4) $0 < \int_0^T \frac{(T-s)^{2n}}{(2n)!} L_0(s) ds \leq \Delta_2 < \infty$;
 5) $\varphi_1(x) \in \text{Lip}\{L_1|_x\}$, $0 < L_1 < \infty$;
 6) $a(t, x, z) \in \text{Lip}\{L_2(t)|_z\}$,
 $0 < L_1 \int_0^T L_2(t) \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) dy ds dt \leq \Delta_3 < \infty$;
 7) $\rho < 1$, где $\rho = \max\{\beta_1; \beta_2\}$, $\beta_2 = \max\{\Delta_3; \|\alpha(t)\| \Delta_3 M_0\}$,
 $\beta_1 = \max\left\{\Delta_2; \left(1 + \int_0^T \|G(t)\| dt + \|P(t, s)\| \frac{T \Delta_2}{2n+1}\right) M_0\right\}$,
 $M_0 = \max_{t \in D_T} \left\{ \exp\{-\mu(t)\} + 2 \int_0^t G(s) \exp\{-\mu(t, s)\} ds \right\} \ll 1$.

Тогда обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение в области D .

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} u_0(t, x) = 0, & u_{k+1}(t, x) \equiv \Theta_1(t, x; u_k, \vartheta_k), \\ \vartheta_0(t) = 0, & \vartheta_{k+1}(t) \equiv \Theta_2(t; u_k, \vartheta_k), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

где x играет роль параметра. Тогда в силу условий теоремы из (23) получаем, что справедливы следующие оценки:

$$\|u_1(t, x) - u_0(t, x)\| \leq \sum_{i=1}^{2n+1} M_i \frac{t^i}{i!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!} M_0(s) ds \leq \Delta_0 + \Delta_1; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}(t, x) - u_k(t, x)\| &\leq \\ &\leq L_1 \int_0^t L_2(s) \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) \|u_k(\theta, y) - u_{k-1}(\theta, y)\| dy d\theta ds + \\ &\quad + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!} L_0(s) \|\vartheta_k(s) - \vartheta_{k-1}(s)\| ds \leq \\ &\leq \Delta_3 \|u_k(t, x) - u_{k-1}(t, x)\| + \Delta_2 \|\vartheta_k(t) - \vartheta_{k-1}(t)\|; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \|\vartheta_1(t) - \vartheta_0(t)\| &\leq \left(\|g(t)\| + \|\alpha(t)\| M_1 + \int_0^t \|h(t, s, 0, 0)\| ds \right) \left\{ \exp\{-\mu(t)\} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^t G(s) \exp\{-\mu(t, s)\} \left(\|g(t)\| + \|\alpha(t)\| M_1 + \int_0^t \|h(t, s, 0, 0)\| ds \right) ds \right\} \leq \\ &\leq \left(\|g(t)\| + \|\alpha(t)\| M_1 + \int_0^T \|h(T, s, 0, 0)\| ds \right) M_0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$M_0 = \max_{t \in D_T} \left\{ \exp\{-\mu(t)\} + 2 \int_0^t G(s) \exp\{-\mu(t, s)\} ds \right\} \ll 1;$$

$$\begin{aligned}
& \|\vartheta_{k+1}(t) - \vartheta_k(t)\| \leq \\
& \leq \|\alpha(t)\| M_0 L_1 \int_0^t L_2(s) \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) \|u_k(\theta, y) - u_{k-1}(\theta, y)\| dy d\theta ds + \\
& + \left\{ 1 + \int_0^t \|G(s)\| ds + \int_0^T \|P(t, s)\| \frac{(T-s)^{2n+1}}{(2n+1)!} L_0(s) ds \right\} M_0 \|\vartheta_k(t) - \vartheta_{k-1}(t)\| \leq \\
& \leq \|\alpha(t)\| \Delta_3 \|u_k(t, x) - u_{k-1}(t, x)\| + \\
& + \left\{ 1 + \int_0^T \|G(t)\| dt + \|P(t, s)\| \frac{T \Delta_2}{2n+1} \right\} M_0 \|\vartheta_k(t) - \vartheta_{k-1}(t)\|. \quad (27)
\end{aligned}$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \max \left\{ \Delta_2; \left(1 + \int_0^T \|G(t)\| dt + \|P(t, s)\| \frac{T \Delta_2}{2n+1} \right) M_0 \right\}, \\
\beta_2 &= \max \{ \Delta_3; \|\alpha(t)\| \Delta_3 M_0 \}, \quad \rho = \max \{ \beta_1; \beta_2 \}.
\end{aligned}$$

Тогда из (25) и (27) имеем

$$\|U_{k+1}(t, x) - U_k(t, x)\| \leq \rho \|U_k(t, x) - U_{k-1}(t, x)\|, \quad (28)$$

где $\|U_k(t, x) - U_{k-1}(t, x)\| \equiv \|u_k(t, x) - u_{k-1}(t, x)\| + \|\vartheta_k(t) - \vartheta_{k-1}(t)\|$.

Из оценок (24), (26) и (28) следует, что операторы в правой части системы (22) являются сжимающими. Следовательно, обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение в области D . $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А. М. Денисов, Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 285 с. [A. M. Denisov, Introduction to the theory of inverse problem. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1994. 285 pp.]
2. В. Г. Романов, Обратные задачи для математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с. [V. G. Romanov, Inverse problem for mathematical physics. Moscow: Nauka, 1984. 264 pp.]
3. М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев, Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1999. 330 с. [M. M. Lavrent'ev, L. Ya. Savel'ev, Linear operators and ill-posed problems. Moscow: Nauka, 1999. 330 pp.]
4. Т. К. Юлдашев, “Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка” // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2012. № 2. С. 56–62. [T. K. Yuldashev, “On the inverse problem for the quasilinear partial differential equation of the first order” // *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2012. no. 2. Pp. 56–62].
5. Т. К. Юлдашев, “Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка” // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика*, 2012. Т. 6, № 11(270). С. 35–41. [T. K. Yuldashev, “On the inverse problem for a system of quasi-linear partial differential equations of the first order” // *Vestn. YuUrGU. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2012. Vol. 6, no. 11(270). Pp. 35–41].
6. Т. К. Юлдашев, “Неявное эволюционное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с нелинейным интегральным отклонением” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 2(19). С. 38–44. [T. K. Yuldashev, “Nonexplicit evolution Volterra integral equation of the first kind with nonlinear integral delay” // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. no. 2(19). Pp. 38–44].

Поступила в редакцию 06/XI/2012;
в окончательном варианте — 14/III/2013.

MSC: 35K70, 35R30

INVERSE PROBLEM FOR QUAZILINEAR PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER

T. K. Yuldashev, A. I. Seredkina

M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University,
31, pr. "Krasnoyarski Rabochiy", Krasnoyarsk, 660014, Russia.

E-mails: tursunbay@rambler.ru, anytik888@yandex.ru

A method of studying an inverse problem for the some classes of quasilinear partial integro-differential equation of the higher order is proposed. A theorem on the existence and uniqueness of the solution of this problem is proved.

Key words: *inverse problem, quasilinear equation, superposition of differential operator, characteristics method, existence and uniqueness of the solution.*

Original article submitted 06/XI/2012;
revision submitted 14/III/2013.

Tursun K. Yuldashev (Ph.D. Phys. & Math.), Doctoral Candidate, Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics. *Ann I. Seredkina*, Graduate Student, Engineer, Dept. of Higher Mathematics.