Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. И. Старовойтов, Д. М. Савицкий, Циклическое нагружение трёхслойных стержней в температурном поле, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 2(), 147–155

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:15:54

УДК 539.3

ЦИКЛИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТРЁХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ
В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Э. И. Старовойтов, Д. М. Савицкий

Белорусский государственный университет транспорта,
Беларусь, 246653, Гомель, ул. Кирова, 34.

E-mail: edstar@mail.by

Рассмотрено деформирование физически нелинейного трёхслойного стержня при циклическом нагружении в температурном поле. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Предложена методика решения соответствующих краевых задач. Получены аналитические решения задач термоупругости и термоупругопластичности при прямом и обратном нагружениях. Проведён численный анализ решений.

Ключевые слова: циклическое деформирование, термоупругопластичность, трёхслойный стержень.

Введение. Слоистые элементы конструкций нашли широкое применение в авиа-, ракето-, приборостроении и строительстве, поэтому разработка методик решения соответствующих краевых задач является актуальной проблемой. Исследованию напряжённо-деформированного состояния неоднородных элементов конструкций посвящены многие публикации, в том числе [1–4]. В рамках теории малых упругопластических деформаций [5] в монографии [6] рассмотрено циклическое деформирование однородных элементов конструкций.

1. Постановка краевой задачи при прямом нагружении. Рассмотрим трёхслойный стержень с жёстким заполнителем (рис. 1). Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью заполнителя. Принимаем, что в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в жёстком несжимаемом по толщине заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$, через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя. На торцах предполагается наличие жёстких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, на границах слоев — склейки. Температурное поле T_k в k -том слое рассматриваемого стержня считаем известным.

С помощью введённых гипотез продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через три искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw,_{,x} & (c \leq z \leq c + h_1), \\ u^{(3)} &= u + z\psi - zw,_{,x} & (-c \leq z \leq c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw,_{,x} & (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

Рис. 1

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций следуют из соотношений Коши и выражений (1), напряжения — из закона Гука. Внутренние силы и моменты вводятся соотношениями

$$N = \sum_{k=1}^3 N^{(k)}, \quad M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)}, \quad H = c(N^{(1)} - N^{(2)}) + M^{(3)}, \quad Q = Q^{(3)}, \quad (2)$$

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz,$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ — компоненты тензора напряжений, b_0 — ширина сечения стержня, интегралы берутся по толщине h_k каждого из слоёв.

Пусть на рассматриваемый стержень, наружные несущие слои которого выполнены из упругопластического материала, а несжимаемый по толщине заполнитель — нелинейно-упругий, действует распределенная силовая нагрузка $p'(x)$, $q'(x)$, при этом соответствующие траектории нагружения относятся к классу простых [5]. Один штрих сверху здесь и в дальнейшем обозначает нагружение из естественного состояния. Для связи напряжений и деформаций используются соотношения термопластичности в форме [2]:

$$\begin{aligned} s'_{xx}{}^{(k)} &= 2G_k(T_k) f'^{(k)}(\varepsilon'_u{}^{(k)}, T_k) e'_{xx}{}^{(k)}, \\ \sigma'^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon'^{(k)} - \alpha_k T_k) \quad (k = 1, 2; \quad i, j = x, y, z), \end{aligned} \quad (3)$$

где $s'_{xx}{}^{(k)}$, $e'_{xx}{}^{(k)}$ — девиаторные, $\sigma'^{(k)}$, $\varepsilon'^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k — термозависимые модули сдвига и объёмного деформирования; α_k — коэффициент линейного температурного расширения; $f'^{(k)}$ — функция пластичности Ильюшина при нагружении из естественного состояния

$$f'^{(k)}(\varepsilon'_u{}^{(k)}, T_k) = \begin{cases} 1, & \varepsilon'_u{}^{(k)} \leq \varepsilon'_y{}^{(k)}(T_k), \\ 1 - \omega'^{(k)}(\varepsilon'_u{}^{(k)}, T_k), & \varepsilon'_u{}^{(k)} > \varepsilon'_y{}^{(k)}(T_k), \end{cases}$$

$\varepsilon'_u{}^{(k)}$ — интенсивность деформаций, $\varepsilon'_y{}^{(k)}$ — деформационный предел текучести материала, $\varepsilon'_s{}^{(3)}$ — предел физической нелинейности материала заполнителя.

Выделим в напряжениях (3) упругие (индекс «e») и неупругие (индекс « ω ») слагаемые:

$$\sigma'_{xx}(k) = \sigma'_{xx}(k)e - \sigma'_{xx}(k)\omega, \quad \sigma'_{xz}(3) = \sigma'_{xz}(3)e - \sigma'_{xz}(3)\omega,$$

где

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx}(k)e &= 2G_k e'_{xx}(k) + 3K_k(\varepsilon'_{xx}(k) - \alpha_k T_k), & \sigma'_{xx}(k)\omega &= 2G_k e'_{xx}(k)\omega'_{xx}(k), \\ \sigma'_{xz}(k)\omega &= 2G_3 e'_{xz}(3)\omega'_{xz}(3), & \sigma'_{xz}(3)\omega &= 2G_3 e'_{xz}(3)\omega'_{xz}(3). \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (2), получим

$$N'^{(k)} = N'^{(k)e} - N'^{(k)\omega}, \quad M'^{(k)} = M'^{(k)e} - M'^{(k)\omega}, \quad Q'^{(3)} = Q'^{(3)e} - Q'^{(3)\omega}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} N'^{(k)e} &= b_0 \int \sigma'_{xx}(k)e dz, \quad N'^{(k)\omega} = b_0 \int_{h_k} \sigma'_{xx}(k)\omega dz, \quad M'^{(k)e} = b_0 \int_{h_k} \sigma'_{xx}(k)e z dz, \\ M'^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma'_{xx}(k)\omega z dz, \quad Q'^{(3)e} = b_0 \int_{-c}^c \sigma'_{xz}(3)e dz, \quad Q'^{(3)\omega} = b_0 \int_{-c}^c \sigma'_{xz}(3)\omega dz. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия трёхслойного стержня получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа

$$\delta A = \delta W, \quad (5)$$

где

$$\delta A = b_0 \int_0^l (p' \delta u + q' \delta w) dx$$

— вариация работы внешней поверхностной нагрузки.

Вариация работы сил упругости учитывает работу касательных напряжений в заполнителе:

$$\delta W = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma'_{xx}(k) \delta \varepsilon'_{xx}(k) dz + 2 \int_{h_3} \sigma'_{xz}(3) \delta \varepsilon'_{xz}(3) dz \right] dx. \quad (6)$$

С помощью соотношений (1) вариации деформаций в (6) выражаются через вариации независимых перемещений δu , $\delta \psi$ и δw . Подставив полученные выражения в уравнение (5) и приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим в итоге систему дифференциальных уравнений равновесия трёхслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u'_{,xx} + a_6 \psi'_{,xx} - a_7 w'_{,xxx} &= -p' + p'_\omega, \\ a_6 u'_{,xx} + a_2 \psi'_{,xx} - a_3 w'_{,xxx} - a_5 \psi' &= h'_\omega \\ a_7 u'_{,xxx} + a_3 \psi'_{,xxx} - a_4 w'_{,xxxx} &= -q' + q'_\omega, \end{aligned} \quad (7)$$

где для коэффициентов имеем

$$a_1 = K_1 + h_1 + K_2 + h_2 + 2K_3 + c, \quad a_2 = c^2 \left[K_1 + h_1 + K_2 + h_2 + \frac{2}{3} K_3 + c \right],$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= c \left[K_1 + h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right], \\
 a_4 &= K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3, \\
 a_5 &= 2G_3 c, \quad a_6 = c[K_1 + h_1 - K_2^+ h_2], \\
 a_7 &= K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right), \quad K_{k+} = K_k + \frac{4}{3} G_k.
 \end{aligned}$$

Величины p'_ω , h'_ω , q'_ω учитывают физическую нелинейность материалов слоёв и вычисляются по формулам, следующим из (4) и (5):

$$\begin{aligned}
 p'_\omega &= \frac{1}{b_0} N'_{,x}{}^\omega, \quad h'_\omega = \frac{1}{b_0} (H'_{,x}{}^\omega - Q'^\omega), \quad q'_\omega = \frac{1}{b_0} M'_{,xx}{}^\omega, \\
 N'^\omega &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} dz, \quad M'^\omega = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} z dz, \\
 Q'^\omega &= 2b_0 G_3 \int_{-c}^c \omega'_3 \psi' dz.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Система дифференциальных уравнений (7) нелинейная, поэтому для решения необходимо использовать приближённые методы, например, метод «упругих» решений Ильюшина. Предположим, что в (7), (8) содержится малый параметр, например, все $\omega_k < 1$. Тогда возможен метод итераций, при котором для любого n -ного приближения система уравнений (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 a_1 u'_{,xx}{}^{(n)} + a_6 \psi'_{,xx}{}^{(n)} - a_7 w'_{,xxx}{}^{(n)} &= -p' + p'^{(n-1)}, \\
 a_6 u'_{,xx}{}^{(n)} + a_2 \psi'_{,xx}{}^{(n)} - a_3 w'_{,xxx}{}^{(n)} - a_5 \psi'^{(n)} &= h'^{(n-1)}, \\
 a_7 u'_{,xxx}{}^{(n)} + a_3 \psi'_{,xxx}{}^{(n)} - a_4 w'_{,xxxx}{}^{(n)} &= -q' + q'^{(n-1)}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Величины $p'^{(n-1)}$, $h'^{(n-1)}$, $q'^{(n-1)}$, соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ($n = 1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название дополнительных «внешних» нагрузок. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоёв:

$$\begin{aligned}
 p'^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} N'^{\omega(n-1)}, \quad h'^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} (H'^{\omega(n-1)} - Q'^{\omega(n-1)}), \quad q'^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} M'^{\omega(n-1)}, \\
 N'^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 N'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega'^{(k)} (\varepsilon'_u{}^{(k)(n-1)}) \varepsilon'_{xx}{}^{(k)(n-1)} dz, \\
 M'^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega'^{(k)} (\varepsilon'_u{}^{(k)(n-1)}) \varepsilon'_{xx}{}^{(k)(n-1)} z dz, \\
 H'^{\omega(n-1)} &= c(N'^{(1)\omega(n-1)} - N'^{(2)\omega(n-1)}) + M'^{(3)\omega(n-1)} \\
 Q'^{\omega(n-1)} &= 2b_0 \int_{-c}^c G_3 \omega'^{(3)} (\varepsilon'_u{}^{(3)(n-1)}) \psi'^{(n-1)} dz.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче термоупругости с

дополнительными «внешними» нагрузками (10). Решение системы (9) можно выписать в следующем рекуррентном виде:

$$\begin{aligned}
 \psi'^{(n)}(x) &= C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \\
 &\quad + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g'^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g'^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\
 u'^{(n)}(x) &= \gamma_3 \psi'^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[-a_4 L_2^{-1}(p' - p_\omega'^{(n-1)}) + \right. \\
 &\quad \left. + a_7 L_3^{-1}(q' - q_\omega'^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\
 w'^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi'^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1}(p' - p_\omega'^{(n-1)}) + \right. \\
 &\quad \left. + a_1 L_4^{-1}(q' - q_\omega'^{(n-1)}) + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)} x^3 \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)},
 \end{aligned} \tag{11}$$

где L_1^{-1} , L_2^{-1} , L_3^{-1} , L_4^{-1} — линейные интегральные операторы,

$$\begin{aligned}
 L_1^{-1}(g) &\equiv \int g dx, \\
 g'^{(n)}(x) &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_\omega'^{(n-1)} + \gamma_2 (p' - p_\omega'^{(n-1)}) + \gamma_1 \left(\int (q' - q_\omega'^{(n-1)}) dx + C_1^{(n)} \right), \\
 \beta^2 &= \frac{a_1 a_5 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2} > 0, \quad \gamma_1 = \frac{a_1 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_2 = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \\
 \gamma_3 &= \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\alpha_2}, \quad \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2 \neq 0, \quad \alpha_1 = a_1 a_3 - a_6 a_7, \\
 \alpha_2 &= a_1 a_4 - a_7^2, \quad \alpha_3 = a_1 a_2 - a_6^2.
 \end{aligned}$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$, ..., $C_8^{(n)}$ на каждом шаге приближения следуют из условий закрепления стержня. В случае жёсткой заделки левого конца стержня при свободном правом торце граничные условия следующие:

$$x = 0 : w' = w',_x = u' = \psi' = 0, \quad x = l : M' = M',_x = N' = \psi' = 0.$$

2. Повторное термосиловое нагружение. Пусть начиная с момента t_1 осуществляется мгновенная разгрузка и повторное нагружение усилиями обратного знака p'' , q'' , изменяющимися по тому же закону, что и при нагружении из естественного состояния. Эти усилия создадут в стержне поле перемещений u'' , ψ'' , w'' , деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}''^{(k)}$, $e_{\alpha\beta}''^{(k)}$, $\varepsilon''^{(k)}$ и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}''^{(k)}$, $s_{\alpha\beta}''^{(k)}$, $\sigma''^{(k)}$. При этом будем предполагать, что за время разгрузки и последующего переменного нагружения температура во всех точках тела остается неизменной, совпадающей с полем температуры к моменту начала разгрузки, т. е. $T_1(z) = T(z, t_1)$ и модули упругости приняли фиксированные значения $G_k(z) \equiv G_k(T_1(z))$, $K_k(z) \equiv K_k(T_1(z))$, причём соответствующие траектории нагружения по-прежнему относятся к классу простых.

Введём для всех характеристик напряжённо-деформированного состояния и нагрузки разности, в которых величины с одним штрихом — напряжения, деформации и перемещения в стержне перед разгрузкой, двумя штрихами помечены аналогичные параметры в процессе второго полупериода:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}^{(k)*} &= \sigma'_{\alpha\beta}{}^{(k)} - \sigma''_{\alpha\beta}{}^{(k)}, & s_{\alpha\beta}^{(k)*} &= s'_{\alpha\beta}{}^{(k)} - s''_{\alpha\beta}{}^{(k)}, & \sigma^{(k)*} &= \sigma'{}^{(k)} - \sigma''{}^{(k)}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)*} &= \varepsilon'_{\alpha\beta}{}^{(k)} - \varepsilon''_{\alpha\beta}{}^{(k)}, & e_{\alpha\beta}^{(k)*} &= e'_{\alpha\beta}{}^{(k)} - e''_{\alpha\beta}{}^{(k)}, & \varepsilon^{(k)*} &= \varepsilon'{}^{(k)} - \varepsilon''{}^{(k)}, \\ u^* &= u' - u'', & \psi^* &= \psi' - \psi'', & w^* &= w' - w'', \\ q^* &= q' - q'', & p^* &= p' - p''.\end{aligned}\tag{12}$$

Для величин в (12), отмеченных звёздочкой, примем физические уравнения состояния типа (3):

$$s_{xx}^{(k)*} = 2G_k(T_k)f^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)e_{xx}^{(k)*}, \quad \sigma^{(k)*} = 3K_1^{(k)}\varepsilon^{(k)*} \quad (k = 1, 2, 3).\tag{13}$$

Соответствующие универсальные функции нелинейности в несущих слоях полагаем выраженными через функции пластичности при нагружении из естественного состояния:

$$\begin{aligned}f^{(k)*} &\equiv f'^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)*}, \varepsilon_y^{(k)*}, T_1, a_m^*), \\ f^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)}, T_1) &= \begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_y^{(k)*}, \\ 1 - \omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, T_1), & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_y^{(k)*}, \end{cases} \\ \omega^{(k)*} &= \omega'^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)*}, \varepsilon_y^{(k)*}, T_1, A_{1k}^*, \alpha_{1k}^*),\end{aligned}$$

где A_{1k}^* , α_{1k}^* — экспериментальные параметры материала k -того слоя, входящие в соответствующую аппроксимационную формулу.

Физическая нелинейность заполнителя на втором полупериоде в силу отсутствия в нём остаточных деформаций по-прежнему описывается соотношениями (3).

Компоненты напряжений и деформаций со звёздочками, используя физические соотношения (13), представим в виде

$$\sigma_x^{(k)*} = \sigma_x^{(k)e*} - \sigma_x^{(k)\omega*}, \quad \sigma_{xz}^{(3)*} = \sigma_{xz}^{(3)e*} - \sigma_{xz}^{(3)\omega*},\tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(k)e*} &= 2G_k e_x^{(k)*} + 3K_k \varepsilon^{(k)*}, & \sigma_x^{(k)\omega*} &= 2G_k e_x^{(k)*} \omega^{(k)*}, \\ \sigma_{xz}^{(3)e*} &= 2G_3 e_{xz}^{(3)*}, & \sigma_{xz}^{(3)\omega*} &= 2G_3 e_{xz}^{(3)*} \omega^{(3)*}.\end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с величинами типа внутренних усилий (2), итерационные уравнения (9) для величин со звёздочками записываем в виде

$$\begin{aligned}a_1 u_{,xx}^{(n)*} + a_6 \psi_{,xx}^{(n)*} - a_7 w_{,xxx}^{(n)*} &= -p^* + p_\omega^{(n-1)*}, \\ a_6 u_{,xx}^{(n)*} + a_2 \psi_{,xx}^{(n)*} - a_3 w_{,xxx}^{(n)*} - a_5 \psi^{(n)*} &= h_\omega^{(n-1)*}, \\ a_7 u_{,xxx}^{(n)*} + a_3 \psi_{,xxx}^{(n)*} - a_4 w_{,xxxx}^{(n)*} &= -q^* + q_\omega^{(n-1)*}.\end{aligned}\tag{15}$$

Рис. 2

Рис. 3

Уравнения равновесия для величин со звёздочками в (15) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (9) и отличается только отсутствием температурных слагаемых в (14). Поэтому аналитическое решение (15) будет иметь рекуррентный вид типа (11).

Перемещения в процессе второго полуцикла получим из соотношений (12):

$$u''(x) = u'(x) - u^*(x), \quad \psi''(x) = \psi'(x) - \psi^*(x), \quad w''(x) = w'(x) - w^*(x),$$

где величины с одним штрихом — напряжения, деформации и перемещения перед разгрузкой.

Числовые результаты получены для трёхслойного стержня, слои которого выполнены из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Для описания зависимости параметров упругости несущих слоёв от температуры принимаются известные соотношения [2, 3].

Здесь и далее параметры слоёв: $h_1 = h_2 = 0,03$, $c = 0,09$; интенсивность распределённой нагрузки $q = -0,75$ МПа, $p = 0$. Температура принята одинаковой во всех слоях стержня. Численные результаты продемонстрировали практическую сходимость метода итераций. За искомое решение принято восьмое приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %.

На рис. 2 показаны перемещения в трёхслойном упругопластическом стержне (а — прогиб, б — относительный сдвиг в заполнителе): 1 — упругие изотермические ($T_1 = 293$ К), 2 — упругие термосиловые ($T_2 = 343$ К), 3 — упругопластические изотермические ($T_1 = 293$ К), 4 — упругопластические термосиловые ($T_3 = 343$ К) перемещения. Здесь учёт физической нелинейности материалов слоёв повышает упругие расчётные перемещения на 20 %, при нагревании на 50 К — на 22 %.

На рис. 3 кривые с одним штрихом соответствуют нагружению из естественного состояния, с двумя штрихами — повторный изгиб знакопеременной нагрузкой: 1 — перемещения упругого стержня, 2 — изотермическая упругопластичность, 3 — термоупругопластический изгиб ($T = 343$ К).

Прогиб и сдвиг при повторном нагружении уменьшаются на 3–4 %, как при «холодной», так и при «горячей» пластичности, что объясняется циклическим упрочнением материала.

Выводы. Таким образом, предложенная методика позволяет исследовать напряжённо-деформированное состояние трёхслойного физически нелинейного стержня при повторном знакопеременном нагружении в температурном поле. При этом решение новой краевой задачи строится по известному решению соответствующей задачи о нагружении из естественного состояния. Следует подчеркнуть, что приведённые решения справедливы только в области малых упругопластических деформаций при простых нагружениях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Механика трёхслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. М.: Физматлит, 2011. 560 с. [Yu. M. Pleskachevskiy, E. I. Starovoytov, D. V. Leonenko, Mechanics of three-layer beams and plates connected with the elastic foundation. Moscow: Fizmatlit, 2011. 560 pp.]
2. E. I. Starovoytov, F. B. Naghiyev, Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity, and Viscoelasticity. Toronto, New Jersey, Canada, USA: Apple Academic Press, 2012. 346 pp.
3. А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, «Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм» // *Экологический вестник науч-*

- ных центров ЧЭС, 2004. № 1. С. 45–52. [A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, “Vibrations of three-layer beams under the action of local loads of different forms” // *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov ChES*, 2004. no. 1. Pp. 45–52].
4. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., “Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation” // *Mech. Solids*, 2011. Vol. 46, no. 2. Pp. 291–298.
 5. А. А. Ильюшин, Пластичность. Ч. 1. Уругопластические деформации. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с. [A. A. Ilyushin, Plasticity, Part 1: Elastic-Plastic Deformations. Moscow: Gostechizdat, 1948. 376 pp.]
 6. В. В. Москвитин, Циклическое нагружение элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с. [V. V. Moskvitin, Cyclic Loading of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1981. 344 pp.]

Поступила в редакцию 23/X/2012;
в окончательном варианте — 17/IV/2013.

MSC: 74C05; 74K10

CYCLIC LOADING OF THREE-LAYER BEAM IN A TEMPERATURE FIELD

E. I. Starovoitov, D. M. Savitskiy

Belarusian State University of Transport,
34, Kirova st., Gomel, 246653, Belarus.

E-mail: edstar@mail.by

The deformation of three-layer elastoplastic beam under the cyclic loading in a temperature field is considered. For the description of kinematics of asymmetrical on the package thickness beam the hypotheses of broken normal are accepted. The method of solving the corresponding boundary-value problems is given. The analytical solutions of thermoelasticity and thermo-elasto-plasticity problems under the direct and reverse loading are received. The numeric analysis is conducted.

Key words: cyclic deformation, thermo-elasto-plasticity, three-layer beam.

Original article submitted 23/X/2012;
revision submitted 17/IV/2013.