Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Осипов, Моделирование шероховатой поверхности методом суперпозиции относительных опорных кривых, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 168–174

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:26:20

МОДЕЛИРОВАНИЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ СУПЕРПОЗИЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ОПОРНЫХ КРИВЫХ

Приводятся теоретические основы моделирования шероховатой поверхности, если известны относительные опорные характеристики отдельных вершин. Дается пример использования расчетных формул. Предлагается измененная методика расчета параметров шероховатой поверхности на основе метода профилографирования.

Анализ большого числа работ показывает, что наиболее важными характеристиками фрикционного контакта поверхностей деталей машин, определяющими контактную прочность, жесткость, термо- и электросопротивление и формирующими силы трения и износа, являются сближение и фактическая площадь касания. Для определения указанных характеристик разработан математический аппарат [1-3]. Параметры аппроксимации кривой относительной опорной поверхности b_s и n_s и геометрические параметры шероховатой поверхности, входящие в теоретические формулы, определяют методом профилографирования.

Пусть шероховатая поверхность образована одинаковыми по форме неровностями, распределение материала в которых описывается функцией относительной опорной площади $t_s = b_s e^{n_s}$. Пусть также распределение вершин по высоте поверхностного слоя подчиняется степенному закону, тогда расстояние ϵ до вершины будет определяться как $e = b_1(p-1)^{n_1}$, где p – порядковый номер вершины ($p \in \mathbb{Z}$). Параметры аппроксимации данного уравнения имеют следующий физический смысл: v_1 – характеризует форму образующей, по которой распределены вершины шероховатой поверхности; b_1 есть выступание самой верхней неровности над следующей. Будем рассматривать распределение материала по высоте поверхностного слоя до глубины ϵ_h , в котором расположено n неровностей, а вершина $n+1$ неровности заглублена относительно самой выступающей неровности на величину ϵ_h . Кроме того, будем учитывать, что $v_s \in [0; 2]$. При описании шероховатой поверхности воспользуемся тем фактом, что ни в одном сечении неровности, а, следовательно, и относительные опорные кривые не пересекаются. Тогда суммарная кривая t_s будет определяться суммой кривых t_{sp} отдельных вершин без их взаимного пересечения. Если начинать суммировать с кривой наиболее выступающей вершины, не понадобится корректировка суммарной кривой вследствие изменения глубины $R_{\max}$.

Воспользуемся тем фактом, что координата центра тяжести фигуры, ограниченной степенной кривой, зависит только от показателя степени, что нетрудно доказать, воспользовавшись методом интегрирования:

$$x_{kp} = \frac{n+1}{n+2} e_h. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что при увеличении (уменьшении) параметра v увеличивается (уменьшается) значение координаты центра тяжести.

Для зерна p имеем при принятых допущениях

$$x_p = \frac{n_{s_p} + 1}{n_{s_p} + 2} (e_h - e_p) + e_p = \frac{n_{s_p} + 1}{n_{s_p} + 2} e_h + \frac{e_p}{n_{s_p} + 2} = x_{kp} + \frac{e_p}{n_{s_p} + 2}, \quad (2)$$

$$S_p = \frac{b_{s_p}}{n_{s_p} + 1} (e_h - e_p)^{n_{s_p} + 1}. \quad (3)$$

Учитывая, что $\epsilon_h = b_1 n^{v_1}$, получим для суммарной кривой

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_p \cdot S_p}{\sum S_p} = \frac{\sum_{p=1}^n \left(x_{kp} + \frac{e_h (p-1)^{n_1}}{n_{s_p} + 2} \right) \cdot \frac{b_{s_p}}{n_{s_p} + 1} \left(e_h - \frac{e_h}{n^{n_1}} (p-1)^{n_1} \right)^{n_{s_p} + 1}}{\sum_{p=1}^n \frac{b_{s_p}}{n_{s_p} + 1} \left(e_h - \frac{e_h}{n^{n_1}} (p-1)^{n_1} \right)^{n_{s_p} + 1}}; \\ S_c &= \sum_{p=1}^n \frac{b_{s_p}}{n_{s_p} + 1} \left(e_h - \frac{e_h}{n^{n_1}} (p-1)^{n_1} \right)^{n_{s_p} + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Формула (4) сложна для анализа. Предположим, что поверхность образована одинаковыми по форме и размерам неровностями. Приведем параметры b_{s_p} неровностей к среднему для площади, приходящейся на одну неровность в сечении $\varepsilon=1$. Необходимо отметить, что принимая параметр b_s постоянным, мы констатируем, что все изменения параметров, связанные с изменением количества неровностей в исследуемом слое, зависят от изменения площади контакта: увеличение площади контакта ведет к росту числа неровностей и наоборот. Увеличивая (уменьшая) количество неровностей без изменения площади контакта, необходимо увеличивать (уменьшать) параметр b_s , так как на единичную неровность будет приходиться меньшая (большая) площадь. Тогда даже при условии случайного расположения неровностей на поверхности можно говорить о равенстве параметров b_{s_p} и v_{s_p} . Преобразуем формулы (4), учитывая это обстоятельство:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_p \cdot S_p}{\sum S_p} = \frac{\sum_{p=1}^n \left(x_{kp} + \frac{e_h (p-1)^{n_1}}{n_s + 2} \right) \cdot \frac{b_s}{n_s + 1} \left(e_h - \frac{e_h}{n^{n_1}} (p-1)^{n_1} \right)^{(n_s+1)}}{\sum_{p=1}^n \frac{b_s}{n_s + 1} \left(e_h - \frac{e_h}{n^{n_1}} (p-1)^{n_1} \right)^{(n_s+1)}} = \\ &= x_{kp} + \frac{e_h}{n^{n_1} (n_s + 2)} \cdot \frac{\sum_{p=1}^n (p-1)^{n_1} \cdot (n^{n_1} - (p-1)^{n_1})^{(n_s+1)}}{\sum_{p=1}^n (n^{n_1} - (p-1)^{n_1})^{(n_s+1)}}; \\ S_c &= \frac{b_s}{n_s + 1} \cdot \frac{e_h^{(n_s+1)}}{n^{n_1(n_s+1)}} \cdot \sum_{p=1}^n (n^{n_1} - (p-1)^{n_1})^{(n_s+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Анализ формул (5) показывает, что значение координаты центра тяжести суммарной кривой всегда больше, чем у исходной, следовательно, больше будет и параметр v_s , т.е. разновысотность неровностей в большей или меньшей степени способствует разреженности образованной ими поверхности. При одном и том же законе распределения неровностей значение относительной опорной площади будет зависеть от параметров b_s и v_s , т.е. от формы и размеров неровностей. Если параметр $b_1 = 0$, т.е. разновысотность вершин неровностей отсутствует, то параметр v суммарной кривой будет равен аналогичному параметру кривой неровности. Еще одной интересной особенностью формул (5) является постоянство значений при $p = 1$:

$$x_c = x_{kp}, S_c = \frac{b_s}{n_s + 1} \cdot \frac{e_h^{(n_s+1)}}{n^{n_1(n_s+1)}} = S_{kp}. \quad (6)$$

Упростим выражение для координаты центра тяжести в формуле (5), для чего определим, имеется ли предел у выражения, зависящего от n во втором слагаемом, т.е. можно ли с достаточной вероятностью предположить истинность равенства:

$$P_s = \frac{1}{n^{n_1}} \cdot \frac{\sum_{p=1}^n (p-1)^{n_1} \cdot (n^{n_1} - (p-1)^{n_1})^{(n_s+1)}}{\sum_{p=1}^n (n^{n_1} - (p-1)^{n_1})^{(n_s+1)}}. \quad (7)$$

Раскроем скобки, внесем свободные множители под знак суммы и сменим последовательность суммирования:

$$P_S = \frac{\sum_{p=1}^n \left[(p-1)^{n_1} \cdot \sum_{k=0}^{n_S+1} (-1)^k \cdot B_k^{n_S+1} \cdot n^{n_1(n_S+1-k)} \cdot (p-1)^{n_1 k} \right]}{\sum_{p=1}^n \left[n^{n_1} \cdot \sum_{k=0}^{n_S+1} (-1)^k \cdot B_k^{n_S+1} \cdot n^{n_1(n_S+1-k)} \cdot (p-1)^{n_1 k} \right]} = \frac{\sum_{p=1}^n \sum_{k=0}^{n_S+1} (-1)^k \cdot B_k^{n_S+1} \cdot n^{n_1(n_S+1-k)} \cdot (p-1)^{n_1(k+1)}}{\sum_{p=1}^n \sum_{k=0}^{n_S+1} (-1)^k \cdot B_k^{n_S+1} \cdot n^{n_1(n_S+2-k)} \cdot (p-1)^{n_1 k}} = \frac{\sum_{k=0}^{n_S+1} \sum_{p=1}^n (-1)^k \cdot B_k^{n_S+1} \cdot n^{n_1(n_S+1-k)} \cdot (p-1)^{n_1(k+1)}}{\sum_{k=0}^{n_S+1} \sum_{p=1}^n (-1)^k \cdot B_k^{n_S+1} \cdot n^{n_1(n_S+2-k)} \cdot (p-1)^{n_1 k}}, \quad (8)$$

где $B_k^{n_S+1}$ - биномиальный коэффициент. При $n \rightarrow \infty$ предел P_S имеет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для его вычислений применим правило Лопиталья. Предварительно, однако, рассмотрим ряд $\sum_{p=1}^n (-1)^k \cdot B_k^{n_S+1} \cdot n^{n_1(n_S+1-k)} \cdot (p-1)^{n_1(k+1)}$, который нетрудно привести к ряду

$$a_k \sum_{p=1}^n (p-1)^m, \quad (9)$$

где $a_k = (-1)^k \cdot B_k^{n_S+1} \cdot n^{n_1(n_S+1-k)}$, а $m = n_1 \cdot (k+1)$.

Сумма ряда (10) может быть представлена в следующем виде [4]:

$$a_k \sum_{p=1}^n (p-1)^m = \frac{a_k}{m+1} \sum_{i=0}^m B_i^{m+1} \cdot B_i \cdot n^{m-i+1} = \frac{(-1)^k \cdot B_k^{n_S+1}}{n_1 \cdot (k+1) + 1} \cdot \sum_{i=0}^{n_1(k+1)} B_i^{n_1(k+1)+1} \cdot B_i \cdot n^{n_1(n_S+2)+1-i}, \quad (10)$$

где B_i - число Бернулли. Аналогично может быть представлен и ряд в знаменателе формулы (8). Тогда предел P_S можно будет определить, применив правило Лопиталья к отношению вида

$$P_S = \frac{\sum_{k=0}^{n_S+1} \left[\frac{(-1)^k \cdot B_k^{n_S+1}}{n_1 \cdot (k+1) + 1} \cdot \sum_{i=0}^{n_1(k+1)} B_i^{n_1(k+1)+1} \cdot B_i \cdot n^{n_1(n_S+2)+1-i} \right]}{\sum_{k=0}^{n_S+1} \left[\frac{(-1)^k \cdot B_k^{n_S+1}}{n_1 k + 1} \cdot \sum_{i=0}^{n_1 k} B_i^{n_1 k + 1} \cdot B_i \cdot n^{n_1(n_S+2)+1-i} \right]}. \quad (11)$$

Применив правило Лопиталья $n_1(n_S+2)+1$ раз для слагаемого с таким же показателем степени, для которого $i=0$, а $B_0^{n_1(k+1)+1} = 1$ и $B_0 = 1$, получим

$$p_S = \lim_{n \rightarrow \infty} P_S = \frac{\sum_{k=0}^{n_S+1} \frac{(-1)^k \cdot B_k^{n_S+1}}{n_1 \cdot (k+1) + 1}}{\sum_{k=0}^{n_S+1} \frac{(-1)^k \cdot B_k^{n_S+1}}{n_1 k + 1}}. \quad (12)$$

Вынесем из числителя и знаменателя общий множитель $\frac{1}{n_1}$ и введем обозначение $a_1 = \frac{1}{n_1}$.

Тогда можно записать

$$p_S = \frac{\sum_{k=0}^{n_S+1} \frac{(-1)^k \cdot B_k^{n_S+1}}{k + (a_1 + 1)}}{\sum_{k=0}^{n_S+1} \frac{(-1)^k \cdot B_k^{n_S+1}}{k + a_1}}. \quad (13)$$

Используя известные соотношения [4], придем к следующему решению:

$$p_S = \frac{(n_S + 1)!}{\frac{(a_1 + 1)(a_1 + 1 + 1) \dots (a_1 + 1 + n_S + 1)}{(n_S + 1)!}} = \frac{a_1}{a_1 + n_S + 2} = \frac{1}{2n_1 + n_S + 1}. \quad (14)$$

Результаты расчета по формуле (14) приведены на рис. 1.

Р и с. 1. Зависимость значения P_s от формы (параметр v_s), расположения (параметр v_1) и количества n неровностей:
 1- $v_1=0,5$, $v_s=0$; 2- $v_1=0,5$, $v_s=0,5$; 3- $v_1=1$, $v_s=0$; 4- $v_1=1$, $v_s=0,5$; 5- $v_1=1$, $v_s=1$; 6- $v_1=2$, $v_s=0$; 7- $v_1=2$, $v_s=0,5$; 8- $v_1=2$, $v_s=1$

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Рассчитанная величина P_s при увеличении количества неровностей стремится к пределу, который рассчитывается по формуле (14), при этом показатели степени могут быть и нецелыми числами. Если площадь контакта велика, а, следовательно, велико и количество неровностей, что обычно бывает при контакте двух сопряженных тел, с погрешностью не более 10% можно принять $P_s = p_s$.

2. С увеличением параметров v_1 и v_s значение предела уменьшается. Учитывая, что функция $P_s(n)$ монотонно возрастает, можно говорить о том, что с возрастанием указанных параметров уменьшается и значение P_s . Это значит, что неровности, имеющие более вогнутую форму и расположенные с преимущественной концентрацией в глубине поверхностного слоя, формируют более разреженную поверхность, которая имеет меньшую несущую способность.

Дальнейшие исследования показали, что при значениях $v_1 \geq 1$ независимо от значений параметра v_s с погрешностью не более 10% можно принять

$$P_s(n) = p_s \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right), \quad (15)$$

где $n \geq 10$, причем с увеличением параметра v_1 количество неровностей n в этом ограничении уменьшается, а, следовательно, и повышается достоверность этой формулы для малых площадок контакта.

Определим параметры b_c и v_c суммарной кривой, для чего подставим в формулу (5) значение $x_{кр}$ из формулы (1): $x_c = e_h \cdot \left(\frac{n_s + 1 + P_s}{n_s + 2} \right)$. После этого, выражая из формулы (1) параметр v_c , получим

$$n_c = \frac{n_s + 2P_s}{1 - P_s}. \quad (16)$$

Из (16) следует, что параметр v_c суммарной кривой действительно больше (либо равен) параметру v_s исходной кривой и теоретически может быть равен $+\infty$. Однако более интересен тот факт, что значение параметра v_c не зависит от выбора глубины исследования e_h , а зависит от количества неровностей, расположенных в слое глубиной e_h . Интересно и следующее наблюдение:

ние. Будем учитывать, что $P_s \in [0; p_s]$. При $P_s = 0$ имеем $v_c = v_s$ (отсутствует разновысотность неровностей). В то же время при $P_s = p_s$ будем иметь

$$n_c = n_s + \frac{1}{n_1}. \quad (17)$$

Р и с. 2. Номограмма для определения возможных значений параметров v_s и v_1

Таким образом, параметр v_c не может возрастать бесконечно. Наоборот, при увеличении параметра v_1 пределы изменений сужаются. Из формулы (17) следует, что для варьирования параметром v_c необходимо либо управлять формой зерен (параметр v_s), либо применять способ, позволяющий располагать неровности ближе к поверхности (уменьшать параметр v_1). Небольшая номограмма для приближенного определения формы и закона распределения неровностей приведена на рис. 2.

Введя обозначение:

$$S_s = \frac{1}{n^{n_1(n_s+1)}} \cdot \sum_{p=1}^n (n^{n_1} - (p-1)^{n_1})^{(n_s+1)},$$

получим

$$b_c = b_s \cdot \frac{n_c + 1}{n_s + 1} \cdot \frac{e_h^{n_s - n_c}}{n} \cdot S_s. \quad (18)$$

Из (18) следует, что параметр b_c , как видно, зависит не только от количества неровностей в слое глубиной ϵ_h , но и от самой глубины ϵ_h . Используя выведенные предельные зависимости параметра v_c , для параметра b_c получим, что его значение изменяется от b_s до

$$b_c = b_s \cdot \frac{n_s n_1 + n_1 + 1}{n_1 (n_s + 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt[n_1]{e_h}} \cdot \frac{S_s}{n}. \quad (19)$$

Из формулы (19) следует, что параметр b_c может быть как меньше, так и больше параметра b_s , что зависит от выбора глубины исследования ϵ_h . Нетрудно заметить также, что с увеличением параметров v_s и v_1 параметр b_c уменьшается.

Анализируя выводы, сделанные по формулам (17) и (19), приходим к выводу, что параметры v_s и v_1 по разному влияют на параметры b_c и v_c . Если увеличение параметра v_s в конечном итоге приводит к уменьшению относительной опорной площади t_s , то влияние параметра v_1 не так однозначно.

При моделировании шероховатой поверхности трудно предположить, какое количество неровностей расположено на том или ином уровне. Гораздо легче указать число неровностей для относительного уровня $\epsilon_h = 1$, как теоретически, исходя из определенных расчетов, так и практически, подсчитав видимое количество неровностей. Тогда, считая количество неровностей функцией от ϵ , а параметры P_s , S_s — функциями от n , можем окончательно записать:

$$n_c(n') = \frac{n_s + 2P_s(n')}{1 - P_s(n')}; \quad b_c(n') = b_s \cdot \frac{n_s n_1 + n_1 + 1}{n_1 (n_s + 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt[n_1]{e_h}} \cdot \frac{S_s(n')}{n'}, \quad (20)$$

где $n' = n(1) \cdot \sqrt[n_1]{e_p}$.

Рассмотрим пример использования теоретических формул. Формулы (4) и (5) могут иметь вполне конкретное приложение. Из примечания к формуле (4) следует, что при суммировании сколь угодно большого количества тождественных кривых параметры суммарной кривой не изменятся, если не изменится базовая площадь в расчете на одну вершину (в противном случае потребуется лишь скорректировать параметр b). Пользуясь формулами (5), можно получить среднестатистические значения параметров аппроксимации неровностей шероховатой поверхности. Однако формирование шероховатой поверхности из неровностей разнообразной формы представляется довольно трудной задачей из-за многообразия вариантов. Данная задача значи-

тельно упрощается, если предварительно определить среднестатистические значения параметров аппроксимации тела, с помощью которого моделируются неровности. Рассмотрим возможное решение.

Расположим тело на поверхности в различных положениях. Величина максимального заглубления в данном случае не зависит от количества неровностей; все они будут расположены на номинальной поверхности, следовательно, формулы (5) будут приведены к виду

$$x_c = \frac{\sum x_p \cdot S_p}{\sum S_p} = \frac{\sum_{p=1}^n \frac{b_p}{n_p + 2} e_h^{n_p+2}}{\sum_{p=1}^n \frac{b_p}{n_p + 1} e_h^{n_p+1}}, S_c = \sum_{p=1}^n \frac{b_p}{n_p + 1} e_h^{n_p+1}. \quad (21)$$

Рассмотрим для примера моделирование неровности кубом со стороной a . Относительное внедрение будем отсчитывать по оси z . Куб может располагаться гранью параллельно номинальной поверхности (6 положений с $v_s = 0$), ребром параллельно номинальной поверхности (12 положений с $v_s = 1$) и вершиной (8 положений с $v_s = 2$) (рис. 3). Для определения параметра b_s необходимо определить площадь S_0 и глубину максимального сечения (максимальную высоту неровности профиля) $R_{\max}$ для каждой ориентации. Для первого случая базовая площадь одинакова для всех сечений и равна $S_{0_1} = a^2$. Для случая ориентации ребром (базовая площадь равна площади диагонального сечения, а максимальная глубина – половине диагонали грани)

$$S_{0_2} = \sqrt{2}a^2; R_{\max_2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Для случая ориентации вершиной (базовая площадь определяется в сечении, перпендикулярном диагонали куба, с помощью анализа производной, а максимальная глубина равна половине диагонали куба)

$$S_{0_3} = 1,3a^2; R_{\max_3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Если бы рассматривались возможные положения куба отдельно, то параметр b_s для всех сечений равнялся бы 1. Приведем сечения к одному с наибольшей базовой площадью.

При смене базовой площади будем иметь $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b_3 = \frac{1,3}{\sqrt{2}}$. При смене максимальной высоты

неровности профиля будем иметь $b_3 = \frac{1,3}{\sqrt{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}a} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Р и с. 3. Варианты ориентации куба относительно номинальной поверхности

Поскольку все кривые приведены к одной базовой площади, а при суммировании кривых она возрастет в $r_{\max}$ раз, параметры b_s необходимо уменьшить в $r_{\max}$ раз. Тогда для суммирования кривых до уровня, например $\epsilon_h = 0,1$, будем иметь $n_s = 0,085$, $b_s = 0,25$. Для суммирования кривых до уровня $\epsilon_h = 1$ получим $n_s = 0,6218$, $b_s = 0,74$.

Результаты расчетов показывают, что значительная погрешность (свыше 15%) возникает только в начале интервала. Однако, чем больше интервал, тем больше этот порог в относительных единицах. Так, например, для первого расчета он составляет 1% от длины интервала, во

втором случае – 10%. Это говорит о том, что уровень относительного внедрения ϵ_h для суммирования кривых необходимо выбирать исходя из данных конкретной задачи.

Моделирование на ЭВМ, исследование профилограмм обработанных поверхностей, сравнение с результатами других исследователей показали, что используемая методика определения параметров шероховатой поверхности имеет ряд недостатков. Например, параметр $n_s \neq 2$, соответствующий для неровности-эллипса, как предполагается в работе [2], зависит от глубины исследования e . Уменьшение экспериментального значения параметра n_c с уменьшением высоты профиля при предположении одинаковой формы неровностей [3] указывает на зависимость формы профиля от формы и размеров измерительной иглы. Имея в виду ограничения (14) и (17), приближение n_c к 1 для полированных поверхностей предполагает форму неровности – параллелепипед.

Проведенные в данной работе исследования позволяют предложить оригинальную методику на основе профилографирования, которая включает следующие этапы:

- 1) запись профилограмм не под углом к следам обработки, а параллельно и перпендикулярно им (профилограф-профилометр);
- 2) корректировка профилограмм с учетом радиуса закругления вершины измерительной иглы (с использованием ЭВМ);
- 3) выделение отдельных неровностей и определение параметров b_p и n_p аппроксимации кривой относительного опорного профиля единичной неровности в каждом сечении;
- 4) определение r_{non} и r_{np} с учетом глубины исследования;
- 5) вычисление параметров b_c и n_c шероховатой поверхности по формулам (3) ($n_s = n_{non} + n_{np}$, $b_s = b_{non} \Phi_{np}$);
- 6) определение сближения поверхностей.

Результаты исследований профилограмм обработанных поверхностей по данной методике показывают, что, например, форма поперечного сечения стружки с увеличением точности обработки должна изменяться от треугольной к эллиптической. Это влияет на увеличение составляющих силы и мощности резания. Важным результатом данной теоретической работы является также то, что с помощью метода суперпозиции опорных кривых можно описать поверхность детали из композиционного материала, рабочую поверхность абразивного инструмента, не опираясь на теорию вероятности и теорию больших чисел.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крагельский И.В. Трение и износ. М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
2. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. Рыжов Э.В. Контактная жесткость деталей машин. М.: Машиностроение, 1966. 352 с.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.