Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Гущин, L_p -оценки некасательной максимальной функции для решений эллиптического уравнения второго порядка, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 1(), 53–69

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 07:17:33

УДК 517.956.223

 **L_p -ОЦЕНКИ НЕКАСАТЕЛЬНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ
ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО
ПОРЯДКА****А. К. Гуцин**Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mail: akg@mi.ras.ru

*Работа содержит обзор результатов, относящихся к изучению поведения вблизи границы решения задачи Дирихле с граничной функцией из L_p , $p > 1$, для эллиптического уравнения второго порядка, включающий новые утверждения и некоторые нерешённые задачи в этом направлении.***Ключевые слова:** эллиптическое уравнение, задача Дирихле, функциональное пространство.

Работа посвящена изложению ряда результатов автора, относящихся к изучению поведения вблизи границы решения задачи Дирихле с граничной функцией из L_p , $p > 1$, для эллиптического уравнения второго порядка. Основным аппаратом исследования является оценка нормы в L_p некасательной максимальной функции через L_p -норму его граничного значения, установленная при тех же условиях на коэффициенты уравнения, при которых известна однозначная разрешимость этой задачи; внутри рассматриваемой области коэффициенты предполагаются только измеримыми и ограниченными. Существенное внимание уделяется распространению на такие уравнения теоремы Карлесона, дающей условия на борелевскую меру, необходимые и достаточные для справедливости оценки норм в пространстве L_p по этой мере аналитических в круге функций через L_p -норму их граничных значений, см. [1] и [2]. Для гармонических функций такая теорема была доказана Хермандером, см. [3]. Обобщение теоремы Карлесона на решения эллиптического уравнения позволяет дать описание граничного поведения решения задачи Дирихле в терминах принадлежности специальному функциональному пространству. В «гильбертовом» случае $p = 2$ близкие результаты были получены в работах [4–6].

Будем рассматривать следующую задачу Дирихле для однородного эллиптического уравнения второго порядка в самосопряжённой форме без младших членов

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q} = u_0 \quad (2)$$

с граничной функцией u_0 из $L_p(\partial Q)$, $p > 1$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка $\mathbb{R}_n$, а $Q \subset \mathbb{R}_n$ — ограниченная область с гладкой границей ∂Q , $\partial Q \in C^1$. Ко-

Анатолий Константинович Гуцин (д.ф.-м.н., проф.), ведущий научный сотрудник, отдел математической физики.

эффиценты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in Q$, уравнения (1) являются измеримыми функциями, удовлетворяющими с некоторой положительной постоянной γ условию

$$\gamma \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} \quad (3)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n$, $|\xi| = 1$, и п.в. $x \in Q$.

Далее симметрическую матрицу $a_{ij}(x)$ будем для краткости обозначать через $A(x)$; постоянную γ из (3) будем называть постоянной эллиптичности.

1. Однозначная разрешимость задачи Дирихле. Прежде всего остановимся на вопросах постановки рассматриваемой задачи Дирихле и на результатах по её разрешимости. Хорошо известно, что понятие обобщённого решения из соболевского пространства $W_2^1(Q)$ задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка не является в полном смысле обобщением понятия классического решения: не любое классическое решение является обобщённым. Естественным обобщением этих понятий является предложенное в работе [7] определение решения из $W_{2,\text{loc}}^1$, в котором $u_0 \in L_2(\partial Q)$, а граничное значение понимается как предел в L_2 следов решения на «параллельных границе поверхностях». Разрешимость такой задачи и свойства её решений достаточно подробно изучены, см. [4–9]. В случае $u_0 \in L_p(\partial Q)$ с $p \neq 2$ обычно рассматривают, см. [10–13], решение из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$, что гарантирует принадлежность следов решения на лежащих внутри области гладких $(n-1)$ -мерных поверхностях пространству L_p и позволяет говорить о пределе в L_p на границе. Однако эта естественная постановка, как и постановка задачи в $W_p^1(Q)$, приводит к необходимости налагать дополнительные условия на данные задачи. Отметим, что задача Дирихле в $W_p^1(Q)$ достаточно полно изучена, см. по этому поводу работы [14, 15], в которых требовалась непрерывность коэффициентов уравнения. Напомним, что для разрешимости изучаемой задачи в пространстве $W_2^1(Q)$ никакие дополнительные условия не нужны. В случае негладкой границы граничное условие понимается как принадлежность разности решения и определённой в Q заданной функции из $W_2^1(Q)$ пространству $W_2^{\circ 1}(Q)$. Если граница гладкая, то $u_0 \in W_2^{1/2}(\partial Q)$.

Следуя [16, 17], под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле равенства обобщённых функций и принимающую граничное значение u_0 в следующем смысле: найдётся такое положительное число r_0 , что для граничной окрестности $V_{x^0} = B_{x^0}(r_0) \subset \partial Q$ произвольно взятой точки $x^0 \in \partial Q$ выполняется соотношение

$$\int_{V_{x^0}} |u(x + \delta \nu(x^0)) - u_0(x)|^p dS \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0; \quad (2')$$

здесь и далее $B_{x^0}(r) = \{x \in \mathbb{R}_n : |x| < r\}$ — n -мерный шар с центром в точке $x^0 \in \mathbb{R}_n$ радиуса $r > 0$, а $\nu(x^0)$ — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x^0 . Конечно, окрестность V_{x^0} должна быть такой, чтобы при достаточно малых $\delta > 0$ её сдвиг $\{x \in \mathbb{R}_n : x = x' + \delta \nu(x^0), x' \in V_{x^0}\}$ на расстояние δ вдоль нормали $\nu(x^0)$ лежал строго внутри области Q . Принадлежность решения пространству L_p на лежащих внутри Q гладких поверхностях следует

из свойств внутренней гладкости решения, например, из теоремы Де Джорджи—Нэша, см. [18–20].

Такая постановка задачи Дирихле позволяет не требовать дополнительные условия на коэффициенты уравнения внутри области. Если рассматривать решение из $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$, то без дополнительных условий на коэффициенты внутри области при $p < 2$ несправедливо утверждение о единственности решения (даже решения из $W_p^1(Q)$; не помогают и дополнительные условия гладкости коэффициентов на границе области), а при $p > 2$, как хорошо известно, решение из $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ не обязано принадлежать $W_{p,\text{loc}}^1(Q)$, а следовательно, нет теоремы существования. Подробное обсуждение этого вопроса и соответствующие примеры имеются в работе [17]. Итак, внутри области от коэффициентов уравнения не нужно требовать никаких дополнительных условий: на любом лежащем в Q компакте матрица A может быть произвольной (удовлетворяющей (3)). Но на границе области дополнительные условия приходится требовать даже в «гильбертовом» случае $p = 2$. Ослабление требований на принятие решением своего граничного значения приводит к необходимости условий гладкости границы области и коэффициентов уравнения на границе. Всюду далее мы будем предполагать, не оговаривая этого особо, что нормаль ν (внутренняя и единичная) непрерывна по Дини:

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad x \in \partial Q, \quad y \in \partial Q, \quad (4)$$

а коэффициенты уравнения непрерывны по Дини на границе:

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \partial Q, \quad y \in Q \quad (5)$$

(значения функций a_{ij} можно так изменить на множестве нулевой меры, чтобы для всех $x \in \partial Q$ и $y \in Q$ выполнялось неравенство (5)); $\omega(t)$, $t > 0$ — такая монотонная (принимаяющая положительные значения) функция, что интеграл от отношения $\omega(t)/t$ сходится в нуле.

При выполнении этих условий справедлива теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой задачи. Для $p = 2$ это утверждение было доказано в работе [4], а для произвольного показателя $p > 1$ — в [17].

ТЕОРЕМА 1 [17]. *Для любой граничной функций u_0 из $L_p(\partial Q)$ существует решение задачи Дирихле (1), (2). Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \sup_{\xi > 0} \left(\frac{1}{\xi} \int_{\{x \in Q: \xi < r(x) < 2\xi\}} |u|^p(x) dx \right) + \int_Q r(x) |u(x)|^{p-2} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \\ \leq \text{const} \cdot \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS \end{aligned} \quad (6)$$

с зависящей только от n , γ , Q , ω и p постоянной.

Здесь и далее $r(x)$ — расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q , а S — $(n - 1)$ -мерная мера Лебега на ∂Q .

Условия (4), (5), при которых доказана теорема 1, по-видимому можно ослабить. Но отказаться от них, как отмечалось выше, нельзя. В [4] приведён

пример, показывающий, что без дополнительных (к (3)) условий на коэффициенты уравнения нарушается утверждение о единственности решения при $p = 2$. Не помогает и более жёсткое в случае $p > 2$ условие (2'). Более точные достаточные для справедливости теоремы 1 условия на коэффициенты уравнения и границу области не известны. В частности, интересно было бы дать ответ на следующий вопрос: не сохраняется ли утверждение об однозначной разрешимости при условии непрерывности $A(x)$ на ∂Q ?

Из оценки (6) теоремы 1 немедленно следует оценка нормы решения в пространстве $L_p(Q)$. Несложно получается из неё и оценка нормы в L_p на лежащей в рассматриваемой области гладкой $(n - 1)$ -мерной поверхности, точнее см. [17]. Более тонкой оценке, которая является мощным инструментом исследования граничного поведения решения, посвящён следующий пункт работы.

2. Оценка некасательной максимальной функции. Возьмём произвольное положительное число a и произвольную точку $x^0 \in \partial Q$. Обозначим через $\Gamma(x^0) = \Gamma(x^0; a)$ лежащий в области Q открытый усеченный конус фиксированной высоты h_0 с вершиной в x^0 , ось которого направлена по внутренней нормали $\nu(x^0)$; в местной системе координат (в ортогональной системе координат, начало которой находится в точке x^0 , а ось x_n направлена по нормали $\nu(x_0)$), этот конус описывается неравенствами $0 < x_n < h_0$, $|x'| < ax_n$. Высоту $h_0 = h_0(a, Q)$ (она одинакова для всех $x^0 \in \partial Q$) выберем столь малой, чтобы границы конуса и области пересекались только по вершине x^0 . Пусть $M(x^0) = M(x^0; a) = \sup\{|u(x)| : x \in \Gamma(x^0; a)\}$ — некасательная (нетангенциальная) максимальная функция для решения u . Основным результатом этого пункта является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2 [21]. *Для любого $a > 0$ и любой граничной функции u_0 из $L_p(\partial Q)$ решение u задачи Дирихле (1), (2) удовлетворяет оценке*

$$\int_{\partial Q} M^p(x; a) dS \leq \text{const} \cdot \int_{\partial Q} |u_0(x)|^p dS, \quad (7)$$

постоянная в которой зависит от размерности пространства n , постоянной эллиптичности γ из (3), области Q , функции ω из (4), (5), показателя суммирования p и раствора конуса a .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из известных оценок решения внутри области (см., например, [22–24] или [17]) немедленно следует, что неравенство (7) остаётся справедливым, если к конусам $\Gamma(x^0)$, $x^0 \in \partial Q$, добавить произвольную компактно принадлежащую области Q подобласть Q' (например, множество точек области, отстоящих от границы на расстоянии большем, чем $h_0/2$).

Для гармонических функций некасательная максимальная функция и её связь с другими характеристиками граничного поведения (с интегралом площадей Лузина, с функцией Литтлвуда—Пэли и др.) детально изучены, см. [25–27]. В частности, известно и сформулированное утверждение, см., например, [27].

В силу принципа максимума оценку (7) достаточно доказать для решения с неотрицательным граничным значением u_0 . А так как при $p > 2$ функция $u^{p/2}$ является субрешением, то достаточно рассмотреть случай $1 < p \leq 2$. Кроме того, можно ограничиться рассмотрением решений задачи с гладкой

функцией u_0 ; справедливость теоремы в общем случае получается стандартным предельным переходом. При этом в силу замечания к теореме 2 можно ограничиться рассмотрением случая достаточно больших значений параметра a . С помощью покрытия прилегающей к границе части области достаточно малыми подобластями специального вида и распрямления соответствующих кусков границы доказательство теоремы 2 сводится к изучению свойств решения следующей задачи Дирихле.

Пусть a_0 — достаточно большое число, его выбор определяется размерностью пространства n , постоянной γ из (3), функцией ω и показателем суммируемости $p > 1$. Зафиксируем произвольно взятое число $a > a_0$. В усечённом конусе $\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}_n : |x'| < 1, 0 < x_n < (1 - |x'|)/a\}$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (1) со следующим граничным условием:

$$u(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, x_n > 0, \quad u(x', 0) = u_0(x'), \quad |x'| \leq 1; \quad (2'')$$

неотрицательную, непрерывно дифференцируемую функцию u_0 можно, кроме того, считать финитной: $\text{supp} u_0 \subset B'$, $B' = \{x' \in \mathbb{R}_{n-1} : |x'| < 1\}$. Следующая теорема, утверждающая справедливость в рассматриваемой ситуации оценки некасательной максимальной функции через аналог интеграла площадей Лузина, не только является основным элементом доказательства теоремы 2, но и представляет самостоятельный интерес. Для гармонических функций оценки нормы в пространстве $L_p(\partial Q)$ некасательной максимальной функции через норму в том же пространстве интеграла площадей (и более общие утверждения) хорошо известны, см. [25–27]. В работе [28] показано, что такие результаты допускают распространение на классические решения эллиптического уравнения с гладкими коэффициентами в области, граница которой представляется в виде разности выпуклых функций. Для случая $p = 2$ такая оценка была установлена и в рассматриваемой ситуации, см. [4].

В общем случае ($p \neq 2$) доказанная в [17] теорема о разрешимости дает оценку (через норму в $L_p(\partial Q)$ граничной функции u_0) нормы в $L_2(\partial Q)$ интеграла площадей функции $u^{p/2}$. Оценка нормы в $L_p(\partial Q)$ интеграла площадей самого решения неизвестна; неочевидна и конечность этой нормы. В связи с этим нам потребовалась оценка нормы в $L_p(\partial Q)$ некасательной максимальной функции через норму в $L_2(\partial Q)$ интеграла площадей функции $u^{p/2}$; отметим, что в рассматриваемом сейчас случае $p < 2$ функция $u^{p/2}$ не является субрешением.

Пусть $\Gamma_1(x')$, $x' \in B' \subset \mathbb{R}_{n-1}$ — пересечение конуса $\Gamma(x'; a) = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}_n : |y' - x'| < ay_n\}$ с областью Ω , $\Gamma_2(x') = \Gamma(x'; 2a) \cap \Omega$, $M(x') = \sup\{u(x) : x \in \Gamma_1(x')\}$, а $\mathcal{S}(x') = \left[\int_{\Gamma_2(x')} x_n^{2-n} |\nabla[u(x)]^{p/2}|^2 dx \right]^{1/2}$ — интеграл площадей функции $u^{p/2}$.

ТЕОРЕМА 3 [21]. Для решения задачи (1), (2'') справедлива оценка

$$\int_{B'} M_1^{p/2}(x') dx' \leq \text{const} \cdot \int_{B'} \mathcal{S}^2(x') dx',$$

постоянная в которой зависит только от n , γ , ω и p .

В следующем пункте мы докажем несложное следствие теоремы 2, утверждающее существование у решения рассматриваемой задачи некасательного

предела (предела по некасательному направлению) в почти всех точках границы.

3. Существование некасательного предела решения для п.в. точек границы. Естественным обобщением хорошо известной теоремы Фату, см. [29], является следующее утверждение: конечность почти всюду некасательной максимальной функции (некасательная ограниченность) для гармонической функции эквивалентна существованию п.в. некасательного предела, см. [25, 30, 31]. Из теоремы 2 вытекает справедливость такого типа (но существенно более слабого) утверждения и для решений рассматриваемой задачи. Напомним, что число A называется некасательным пределом функции u в точке $x^0 \in \partial Q$, если для любых положительных чисел ε и a найдётся такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, a)$, что для всех точек $x \in \Gamma(x^0; a)$, удовлетворяющих неравенству $|x - x^0| < \delta$, выполняется оценка $|u(x) - A| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u_0 \in L_p(\partial Q)$ с некоторым $p > 1$. Тогда для п.в. $x^0 \in \partial Q$ решение задачи (1), (2) имеет некасательный предел в x^0 и этот предел равен значению граничной функции u_0 в этой точке.

Доказательство. Пусть u_0 — произвольная функция из $L_p(\partial Q)$, а u — решение задачи (1), (2). Возьмём последовательность гладких функций $u_0^{(k)} \in C^1(\partial Q)$, $k = 1, 2, \dots$, сходящуюся в $L_p(\partial Q)$ к граничной функции u_0 . Выберем из неё подпоследовательность, сходящуюся (к u_0) п.в. на ∂Q ; сохраним за ней то же обозначение. Обозначим через $\{u^{(k)}\}$ последовательность решений рассматриваемой задачи Дирихле с граничными значениями $u_0^{(k)}$. Отметим, что решения $u^{(k)}$ непрерывны (и даже непрерывны по Гёльдеру) в $\bar{Q}$, см. [22, 23, 32]. Имеем

$$\|u_0 - u_0^{(k)}\|_{L_p(\partial Q)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

$$u_0(x^0) - u_0^{(k)}(x^0) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \text{ для п.в. } x^0 \text{ из } \partial Q$$

и в силу оценки (7) теоремы 2 для решения $u - u^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} \left[\sup\{|u(x) - u^{(k)}(x)| : x \in \Gamma(x^0; a)\} \right]^p dS &\leq \\ &\leq \text{const} \cdot \int_{\partial Q} |u_0(x) - u_0^{(k)}(x)|^p dS \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

для произвольного положительного a (конечно, постоянная в этом неравенстве зависит от a).

Возьмём произвольные положительные числа ε и a . Из стремящейся к нулю в $L_p(\partial Q)$ последовательности $\sup\{|u(x) - u^{(k)}(x)| : x \in \Gamma(x^0; a)\}$, $k = 1, 2, \dots$, выберем стремящуюся к нулю п.в. на ∂Q подпоследовательность; опять будем обозначать выбранную подпоследовательность так же, как и саму последовательность. По построению имеем, что для почти всех точек x^0 из ∂Q функциональная последовательность $u^{(k)}(x)$ сходится к функции $u(x)$ равномерно на конусе $\Gamma(x^0; a)$. Зафиксируем произвольно взятую точку x^0 из

множества полной меры, на котором имеется эта сходимость и $u_0^{(k)}$ сходится к u_0 . По числу ε выберем номер k_0 так, чтобы выполнялись неравенства $|u(x) - u^{(k_0)}(x)| < \varepsilon/3$ для всех $x \in \Gamma(x^0; a)$ и $|u_0(x^0) - u_0^{(k_0)}(x^0)| < \varepsilon/3$; зафиксируем эту функцию $u^{(k_0)}$. Число $\delta > 0$ выберем теперь по $\varepsilon/3$ из непрерывности функции $u_0^{(k_0)}$ в точке (x^0) . $\square$

Доказанная теорема о некасательной сходимости решения на границе представляет определённый интерес, но, как видно из сравнения с соответствующим результатом для гармонических функций, является довольно грубой. Кроме того, такого рода утверждения не имеют фундаментального значения для теории краевых задач для эллиптических уравнений. Дело в том, что в отличие от случая аналитических функций одного комплексного переменного в рассматриваемой ситуации условие сходимости п.в. на границе решения уравнения к заданному граничному значению не выделяет единственное решение.

Более существенным следствием теоремы 2 является аналог теоремы Карлесона об оценках в L_p по мерам решения задачи Дирихле. Этому вопросу будет посвящён следующий пункт работы.

4. Теорема карлесоновского типа для решений эллиптического уравнения второго порядка. Известные работы Л. Карлесона [1, 2], посвящённые проблеме интерполяции ограниченными аналитическими функциями одного комплексного переменного и доказательству теоремы о короне, основываются на следующей оценке аналитической в единичном круге $Q \subset \mathbb{C}$ функции.

Пусть неотрицательная борелевская мера μ (с носителем в $\bar{Q}$) удовлетворяет условию: существует такая постоянная C_μ , что для любой точки $z^0 \in \partial Q$ и любого положительного числа r выполняется неравенство

$$\mu(B_{z^0}(r)) \leq C_\mu r,$$

в котором $B_{z^0}(r)$ — круг с центром в точке z^0 радиуса r . Тогда для любой аналитической в Q функций u с граничным значением $u_0 = u|_{\partial Q}$ справедлива оценка

$$\iint_Q |u|^p d\mu \leq C \int_{\partial Q} |u_0|^p dS, \quad (8)$$

в которой $p > 0$, $C = C(p)C_\mu$, а $C(p)$ — положительная постоянная. Приведённое условие на меру является и необходимым для справедливости оценки (8) для всех аналитических в Q функций u .

В работе Л. Хермандера [3] аналогичный результат был доказан для гармонических функций в ограниченной области Q с дважды гладкой границей ($\partial Q \in C^2$). Для справедливости оценки (8) для всех гармонических в Q функций с граничным значением u_0 из $L_p(\partial Q)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы мера μ , $\text{supp } \mu \subset \bar{Q}$, удовлетворяла следующему условию: существует такая постоянная C_μ , что для любой точки $x^0 \in \partial Q$ и любого положительного числа r выполняется неравенство

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leq C_\mu r^{n-1}; \quad (9)$$

напомним, что $B_{x^0}(r)$ — шар в $\mathbb{R}_n$ с центром в точке x^0 радиуса r , $B_{x^0}(r) = \{x \in \mathbb{R}_n : |x - x^0| < r\}$.

Удовлетворяющие условию (9) борелевские меры принято называть мерами Карлесона, см., например, [33, 34]. Наименьшую из постоянных C_μ , с которыми выполняется (9), будем называть нормой меры Карлесона μ .

Целью настоящего пункта является аналогичное утверждение для решений задачи Дирихле (1), (2). Достаточно подробно в этом направлении исследован «гильбертов» случай $p = 2$. В работе автора [4] был установлен ослабленный вариант теоремы Карлесона. При выполнении условий (4) и (5), гарантирующих однозначную разрешимость рассматриваемой задачи, было доказано утверждение о достаточности для справедливости оценки (8) следующего более жёсткого условия на меру: существует такая постоянная C_μ , что для любых $x^0 \in \bar{Q}$ и $r > 0$ выполняется неравенство

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leq C_\mu r^{n-1}; \quad (9')$$

в отличие от (9) в этом условии требуется выполнение оценки меры не только для шаров с лежащими на границе центрами, но и для шаров с центрами внутри области. Отказаться в этом утверждении от условия (5) нельзя. Без него, как отмечалось выше, нельзя гарантировать единственность решения, и тем более справедливость оценки (8).

Этот результат позволил установить $(n - 1)$ -мерную непрерывность решения задачи Дирихле, доказать свойства, характеризующее поведение решения вблизи границы, и дать определение решения этой задачи (с $u_0 \in L_2(\partial Q)$), не требующее, как и определение классического решения, в своей постановке условий гладкости коэффициентов уравнения и границы области (условия (4), (5) нужны для теоремы об однозначной разрешимости), подробнее см. [4]. В частности, установлено следующее утверждение (напомним, что условия (4), (5), как и условие (3), мы договорились всегда считать выполненными).

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть u — решение задачи Дирихле (1), (2) с произвольной $u_0 \in L_2(\partial Q)$, λ — некоторое положительное число, S — мера Лебега на ∂Q , а $\Psi = \{\psi\}$ — семейство отображений ∂Q в $\bar{Q}$, каждое из которых удовлетворяет следующим условиям:

- a) полный прообраз любого борелевского множества является измеримым (по мере S);
- b) мера (S -мера) полного прообраза любого шара с центром в $\bar{Q}$ не превосходит произведения числа λ на радиус шара в степени $n - 1$.

Тогда

$$\int_{\partial Q} |u(\psi(x)) - u_0(x)|^p dS \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \int_{\partial Q} |\psi(x) - x| dS \rightarrow 0.$$

Обсуждаемый ослабленный вариант теоремы Карлесона ((9') $\Rightarrow$ (8)), как было доказано в работе В. Ж. Думаняна [35], справедлив и для решений общего эллиптического уравнения второго порядка при некоторых естественных ограничениях на рост коэффициентов при младших членах вблизи границы.

Теорема о достаточности для справедливости оценки (8) при $p = 2$ более слабого условия (9) была доказана в совместной с В. П. Михайловым работе [5], посвящённой исследованию разрешимости нелокальных задач, в которых значения решения в граничных точках выражаются через его значения

во внутренних точках области. Использование этого утверждения позволило предложить новый подход к исследованию разрешимости нелокальных задач и существенно расширить класс поддающихся изучению задач, см. также [36–39]. Более простое утверждение о необходимости условия (9) в случае $p = 2$ приведено в [6].

В общем случае $p > 1$ обсуждаемый аналог теоремы Карлесона

$$(8) \iff (9)$$

справедлив при те же, что и в случае $p = 2$, условиях (4), (5). Доказательство этого утверждения опубликовано в работе [40]. Отметим, что условие справедливости для решений задачи Дирихле с $u_0 \in L_p(\partial Q)$ оценки (8) не зависит не только от показателя суммируемости p , но и от выбора эллиптического оператора; от постоянной эллиптичности γ и функции ω из (4), (5) зависит только постоянная в этой оценке. В частности, эту теорему можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы оценка (8) была справедлива для всех решений задачи Дирихле (1), (2) с $u_0 \in L_p(\partial Q)$, необходимо и достаточно, чтобы она была справедлива (с той же мерой μ) для всех гармонических функций с граничными значениями из $L_2(\partial Q)$.*

5. Следствия из теоремы 5. Введём на множестве непрерывных в замыкании $\bar{Q}$ области Q функций норму

$$\|v\|_p = \sup_{\mu} \left(\frac{1}{\|\mu\|} \int_{\bar{Q}} |v(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}; \quad (10)$$

здесь $\|\mu\|$ — норма меры Карлесона μ (наименьшая из постоянных, с которыми выполнено (9)), а точная верхняя грань берется по всем отличным от нулевой мерам Карлесона. Пополнение этого пространства будем обозначать через $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$. Легко видеть, что норма (10) не меньше, чем норма в пространстве $C_{n-1,p}(\bar{Q})$, см. [4]. Тем самым введённое пространство лежит в пространстве $(n-1)$ -мерно непрерывных функций $C_{n-1,p}(\bar{Q})$ и, тем более, в $L_p(Q)$. Кроме того, из сходимости во введённом пространстве, как нетрудно проверить, следует равномерная сходимость на любом лежащем в Q компакте и сходимости в $L_p(\partial Q)$. Далее элементы пространства $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ будем интерпретировать как определённые на $\bar{Q}$ непрерывные внутри области функции, сужения которых на границу суммируемы с p -ой степенью. При этом будем отождествлять, не оговаривая этого особо, функции, значения которых совпадают внутри области и п.в. на границе (по мере Лебега на ∂Q).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что функция $v : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, если существует сходящаяся к ней по норме (10) последовательность непрерывных в $\bar{Q}$ функций.

Конечно, при этом предполагается, что функция v интегрируема с p -ой степенью по любой мере Карлесона. Из определения 1 немедленно следует, что для любой меры Карлесона μ пространство $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ вкладывается в $L_p(\bar{Q}; \mu)$; предел в $L_p(\bar{Q}; \mu)$ сходящейся к функции v по норме (10) последовательности непрерывных функций (элемент $L_p(\bar{Q}; \mu)$) будем называть следом функции v на мере μ .

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой $u_0 \in L_p(\partial Q)$ решение задачи (1), (2) принадлежит пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$.

Отметим, что из последнего утверждения вытекает, что множество следов на ∂Q (на мере S) всех функций из $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ совпадает с $L_p(\partial Q)$.

Можно дать и другие, эквивалентные приведённому определению рассматриваемого пространства. Прежде всего заметим, что определение нормы в этом пространстве не меняется, если ограничиться единичными мерами Карлесона: $\mu(\mathbb{R}_n) = 1$. Пусть μ и ν — две единичные меры. Возьмём такую меру ϕ в $\mathbb{R}_{2n}$, что её проекция на пространство первых n переменных совпадает с μ , а проекция на пространство последних n переменных совпадает с ν :

$$\phi(G \times \mathbb{R}_n) = \mu(G), \quad \phi(\mathbb{R}_n \times G) = \nu(G) \text{ для всех борелевских множеств } G \subset \mathbb{R}_n;$$

меру ϕ будем называть мерой, соединяющей меры μ и ν . Конечно, $\text{supp} \phi \subset \bar{Q} \times \bar{Q}$ и $\phi(\mathbb{R}_{2n}) = 1$. Заметим, что для любых рассматриваемых мер существует соединяющая их мера; например, их произведение. Если же каждая из мер μ и ν сосредоточена в точке (их носители являются точками), то произведение этих мер является единственной соединяющей их мерой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $v : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что для любых мер Карлесона μ и ν и для любой соединяющей их меры ϕ , удовлетворяющей неравенству

$$\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta, \quad (11)$$

выполняется оценка

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\nu\|} \iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x, y) < \varepsilon. \quad (12)$$

Возьмём произвольное положительное число ρ и обозначим через $Q_\rho(x)$, $x \in \bar{Q}$, пересечение области Q с шаром $B_x(\rho)$, а через $m(Q_\rho(x))$ — меру Лебега (n -мерную) этого пересечения. Отметим, что в силу гладкости границы области для всех $\rho > 0$ и всех $x \in \bar{Q}$ справедливо неравенство $m(Q_\rho(x)) \geq c(n)\rho^n$ с зависящей только от n положительной постоянной $c(n)$. Обозначим, кроме того,

$$v_\rho(x) = \frac{1}{m(Q_\rho(x))} \int_{Q_\rho(x)} v(y) dy.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $v : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, если $\|v - v_\rho\|_p \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 6. Определения 1, 2 и 3 эквивалентны.

Доказательство. Пусть функция $v \in C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ в смысле определения 1, $\{v_k\}$ — последовательность непрерывных в замыкании области Q функций, сходящаяся к v в норме (10). Возьмём произвольные положительное число ε , единичные меры Карлесона μ, ν и соединяющую их меру ϕ , удовлетворяющую условию (11). Отметим, что

$$2 = \mu(\mathbb{R}_n) + \nu(\mathbb{R}_n) \leq [\|\mu\| + \|\nu\|] R_0^{n-1},$$

где R_0 — радиус шара с лежащим на ∂Q центром, содержащего замыкание области Q .

По $\varepsilon_1 = \varepsilon/2^{2p}$ найдём такой номер k , что

$$\|v - v_k\|_p^p < \varepsilon_1; \quad (13)$$

зафиксируем этот номер. Обозначим $M = \max\{\|v_k\|_{C(\bar{Q})}, 1\}$. Выберем теперь такое число $\sigma > 0$, что из $|x - y| < \sigma$ (конечно, $x \in \bar{Q}$ и $y \in \bar{Q}$) следует неравенство $|v_k(x) - v_k(y)| < \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon/R_0^{n-1})^{1/p}$. Тогда

$$\iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}_{2n} : |x-y| < \sigma\}} |v_k(x) - v_k(y)|^p d\phi(x, y) < \varepsilon_2^p. \quad (14)$$

По выбранному уже числу σ возьмём $\delta = \sigma \varepsilon_2^p / (2^p M^p)$. Тогда из (11) следует, что

$$\phi(\{(x, y) \in \mathbb{R}_{2n} : |x - y| \geq \sigma\}) < \frac{\delta}{\sigma} = \frac{\varepsilon_2^p}{2^p M^p},$$

и следовательно,

$$\iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}_{2n} : |x-y| \geq \sigma\}} |v_k(x) - v_k(y)|^p d\phi(x, y) < (2M)^p \frac{\varepsilon_2^p}{2^p M^p} = \varepsilon_2^p.$$

Объединяя последнее неравенство и (14), получаем

$$\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v_k(x) - v_k(y)|^p d\phi(x, y) < 2\varepsilon_2^p. \quad (15)$$

Из (13) и (15) имеем

$$\begin{aligned} \left(\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x, y) \right)^{1/p} &\leq \left(\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v_k(x)|^p d\phi(x, y) \right)^{1/p} + \\ &+ \left(\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v_k(x) - v_k(y)|^p d\phi(x, y) \right)^{1/p} + \left(\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v_k(y) - v(y)|^p d\phi(x, y) \right)^{1/p} < \\ &< \varepsilon_1^{1/p} (\|\mu\|^{1/p} + \|v\|^{1/p}) + 2^{1/p} \varepsilon_2 \leq \\ &\leq 2\varepsilon_1^{1/p} (\|\mu\| + \|v\|)^{1/p} + 2^{1/p} \varepsilon_2 (R_0^{n-1} (\|\mu\| + \|v\|)/2)^{1/p} \leq \\ &\leq (\|\mu\| + \|v\|)^{1/p} \varepsilon^{1/p}, \end{aligned}$$

что и даёт доказываемую оценку (12).

Таким образом, мы доказали, что если функция v принадлежит пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ в смысле определения 1, то она принадлежит этому пространству и в смысле определения 2. Докажем теперь, что если $v \in C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ в смысле определения 2, то $\|v - v_\rho\|_p \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ (то есть выполнено и требование определения 3).

Возьмём произвольную единичную меру Карлесона μ . Определим меры v и ϕ следующими равенствами:

$$v(G) = \int_{\bar{Q}} \frac{m(G \cap Q_\rho(x))}{m(Q_\rho(x))} d\mu(x) \text{ для всех (борелевских) множеств } G \subset \mathbb{R}_n$$

и

$$\phi(D) = \iint_D \frac{\chi_{\{(x,y) \in \bar{Q} \times \bar{Q}: |x-y| < \rho\}}(x,y)}{m(Q_\rho(x))} dy d\mu(x), \quad D \subset \mathbb{R}_{2n};$$

здесь χ_E — характеристическая функция множества E .

Нетрудно проверить, что $v(\mathbb{R}_n) = 1$, а мера ϕ соединяет меры μ и v . Покажем, что мера v является мерой Карлесона и её норма удовлетворяет оценке

$$\|v\| \leq C\|\mu\|, \quad (16)$$

постоянная $C = C(n, Q)$ в которой зависит только от n и Q . Действительно, возьмём произвольные $r > 0$ и $x^0 \in \partial Q$. Рассмотрим v -меру шара $B_{x^0}(r)$:

$$v(B_{x^0}(r)) = \int_{B_{x^0}(r+\rho)} \frac{m(Q_\rho(x) \cap B_{x^0}(r))}{m(Q_\rho(x))} d\mu(x) \leq C(n, Q) \frac{\min\{\rho^n, r^n\}}{\rho^n} \mu(B_{x^0}(r+\rho)).$$

Откуда, если $\rho \leq r$, получаем

$$v(B_{x^0}(r)) \leq C(n, Q) \|\mu\| (\rho + r)^{n-1} \leq C(n, Q) 2^{n-1} r^{n-1}.$$

Если же $r < \rho$, то

$$v(B_{x^0}(r)) \leq C(n, Q) \frac{r^n}{\rho^n} \|\mu\| (2\rho)^{n-1} \leq C(n, Q) 2^{n-1} r^{n-1}.$$

Таким образом, неравенство (16) доказано. Учитывая эту оценку и очевидное неравенство

$$\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |x - y| d\phi(x, y) < \rho,$$

из определения 2 получаем, что если $v \in C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\mathbb{R}_n} \left| v(x) - \frac{1}{m(Q_\rho(x))} \int_{Q_\rho(x)} v(y) dy \right|^p d\mu(x) &\leq \\ &\leq \frac{C(n, Q)}{\|\mu\| + \|v\|} \iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x, y) < C(n, Q)\varepsilon, \end{aligned}$$

как только $\rho < \delta$. Отсюда следует сходимостъ v_ρ к v и в $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$, поскольку постоянная в последней оценке не зависит от μ . Так как при выполнении определения 3, очевидно, выполняется и определение 1, теорема доказана. $\square$

Если в определении 2 ограничиться мерами, каждая из которых сосредоточена в точке (каждая в своей), лежащей внутри области, то получим не только непрерывность функций из рассматриваемого пространства (что уже отмечалось выше), но и характеристику неравномерности непрерывности вблизи границы. Из неё будет следовать оценка возможного роста этих функций при приближении к границе.

Пусть μ — мера, сосредоточенная в точке $x^0 \in Q$, а v — мера, сосредоточенная в точке $y^0 \in Q$:

$$\int_{\bar{Q}} g(x) d\mu(x) = g(x^0), \quad \int_{\bar{Q}} g(x) dv(x) = g(y^0) \text{ для всех } g \in C(\bar{Q}).$$

Легко вычисляются нормы этих мер:

$$\|\mu\| = \frac{1}{r^{n-1}(x^0)}, \quad \|v\| = \frac{1}{r^{n-1}(y^0)};$$

напомним, что $r(x) = \text{dist}\{x, \partial Q\}$. В этом случае соединяющая их мера ϕ единственна — произведение соединяемых мер. Условие (11) принимает вид

$$|x^0 - y^0| = \iint_{\mathbb{R}_{2n}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta.$$

Следующее из этого условия неравенство (12) даёт

$$\frac{1}{2} r^{n-1}(x, y) |v(x^0) - v(y^0)| \leq \frac{1}{\|\mu\| + \|v\|} \iint_{\mathbb{R}_{2n}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x, y) < \varepsilon,$$

здесь $r(x, y) = \min\{r(x), r(y)\}$. Из полученного свойства, в частности, немедленно вытекает справедливость следующей оценки для каждой функции v из $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$:

$$|v(x)| \leq \frac{\text{const}}{r^{n-1}(x)}.$$

В заключение отметим ещё следствие из теорем 5 и 6, аналогичное утверждению пункта 4, но более точно характеризующее принятие решением задачи Дирихле своего граничного значения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть u — решение задачи Дирихле (1), (2) с произвольной $u_0 \in L_p(\partial Q)$, λ — некоторое положительное число, а $\Psi = \{\psi\}$ — семейство отображений ∂Q в $\bar{Q}$, каждое из которых удовлетворяет следующим условиям:

- a) полный прообраз любого борелевского множества является измеримым (по мере S);
- b) мера (S -мера) полного прообраза любого шара с лежащим на ∂Q центром не превосходит произведения числа λ на радиус шара в степени $n - 1$.

Тогда

$$\int_{\partial Q} |u(\psi(x)) - u_0(x)|^p dS \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \int_{\partial Q} |\psi(x) - x| dS \rightarrow 0.$$

Доказательство последнего утверждения немедленно вытекает из принадлежности решения пространству $C_{n-1,p}(\bar{Q}; \partial Q)$ и второго определения, если взять в качестве меры μ нормированную $(n - 1)$ -мерную меру Лебега на границе, а в качестве ϕ — меру, сосредоточенную на графике отображения ψ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00178-а) и гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-2928.2012.1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *L. Carleson*, "An interpolation problem for bounded analytic functions" // *Amer. J. Math.*, 1958. Vol. 80, no. 4. Pp. 921–930.
2. *L. Carleson*, "Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem" // *Ann. of Math.*, 1962. Vol. 76, no. 3. Pp. 547–559.
3. *L. Hormander*, " L^p -estimates for (pluri-) subharmonic functions" // *Math. scand.*, 1967. Vol. 20. Pp. 65–78.
4. А. К. Гуцин, "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка" // *Матем. сб.*, 1988. Т. 137(179), № 1(9). С. 19–64; англ. пер.: А. К. *Gushchin*, "On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation" // *Math. USSR-Sb.*, 1990. Vol. 65, no. 1. Pp. 19–66.
5. А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, "О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка" // *Матем. сб.*, 1994. Т. 185, № 1. С. 121–160; англ. пер.: А. К. *Gushchin*, V. P. *Mikhailov*, "On solvability of nonlocal problems for a second-order elliptic equation" // *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995. Vol. 81, no. 1. Pp. 101–136.
6. А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, "Внутренние оценки обобщенных решений эллиптического уравнения второго порядка" // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия*, 2008. № 8/1(67). С. 76–94. [А. К. *Gushchin*, V. P. *Mikhailov*, "Internal estimates of general solutions of second order elliptic equation" // *Vestn. SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya*, 2008. no. 8/1(67). Pp. 76–94].
7. В. П. Михайлов, "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка" // *Дифференц. уравнения*, 1976. Т. 12, № 10. С. 1877–1891. [V. P. *Mikhailov*, "The Dirichlet problem for a second order elliptic equation" // *Differents. Uravneniya*, 1976. Vol. 12, no. 10. Pp. 1877–1891].
8. А. К. Гуцин, "О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка" // *Сиб. матем. журн.*, 2005. Т. 46, № 5. С. 1036–1052; англ. пер.: А. К. *Gushchin*, "On the interior smoothness of solutions to second-order elliptic equations" // *Siberian Math. J.*, 2005. Vol. 46, no. 5. Pp. 826–840.
9. А. К. Гуцин, "Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гёльдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка" // *ТМФ*, 2008. Т. 157, № 3. С. 345–363; англ. пер.: А. К. *Gushchin*, "A strengthening of the interior Hölder continuity property for solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation" // *Theoret. and Math. Phys.*, 2008. Vol. 157, no. 3. Pp. 1655–1670.
10. А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, "О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптических уравнений" // *Матем. сб.*, 1979. Т. 108(150), № 1. С. 3–21; англ. пер.: А. К. *Gushchin*, V. P. *Mikhailov*, "On boundary values in L_p , $p > 1$, of solutions of elliptic equations" // *Math. USSR-Sb.*, 1980. Vol. 36, no. 1. Pp. 1–19.
11. А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, "О граничных значениях решений эллиптических уравнений" / В сб.: *Обобщённые функции и их применения в математической физике*: Тр. междунар. конференции. М.: ВЦ АН СССР, 1981. С. 189–205. [А. К. *Gushchin*, V. P. *Mikhailov*, "On boundary values of solutions of elliptic equations" / In: *Generalized functions and their applications in mathematical physics*: Proceedings of the International Conference. Moscow, 1981. Pp. 189–205].
12. И. М. Петрушко, "О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей" // *Матем. сб.*, 1983. Т. 120(162), № 4. С. 569–588; англ. пер.: I. M. *Petrushko*, "On boundary values in L_p , $p > 1$, of solutions of elliptic equations in domains with a Lyapunov boundary" // *Math. USSR-Sb.*, 1984. Vol. 48, no. 2. Pp. 565–585.
13. Ю. А. Михайлов, "О граничных значениях в L_p , $p > 1$, решений эллиптического уравнения второго порядка" // *Дифференц. уравнения*, 1983. Т. 19, № 2. С. 318–337. [Yu. A. *Mikhailov*, "Boundary values in L_p , $p > 1$, of solutions of a second-order linear elliptic equation" // *Differents. Uravneniya*, 1983. Vol. 19, no. 2. Pp. 318–337].

14. Ю. А. Алхуттов, В. А. Кондратьев, “Разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в выпуклой области” // *Дифференц. уравнения*, 1992. Т. 28, №5. С. 806–817; англ. пер.: Yu. A. Alkhutov, V. A. Kondrat’ev, “Solvability of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations in a convex domain” // *Differ. Equ.*, 1992. Vol. 28, no. 5. Pp. 650–662.
15. Ю. А. Алхуттов, “ L_p -оценки решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка” // *Матем. сб.*, 1998. Т. 189, №1. С. 3–20; англ. пер.: Yu. A. Alkhutov, “ L_p -estimates of the solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations” // *Sb. Math.*, 1998. Vol. 189, no. 1. Pp. 1–17.
16. А. К. Гуцин, “О разрешимости задачи Дирихле с граничной функцией из L_p для эллиптического уравнения второго порядка” // *Докл. Акад. наук*, 2011. Т. 437, №5. С. 583–586; англ. пер.: A. K. Gushchin, “On the solvability of the Dirichlet problem with a boundary function from L_p for a second-order elliptic equation” // *Dokl. Math.*, 2011. Vol. 83, no. 2. Pp. 219–221.
17. А. К. Гуцин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p ” // *Матем. сб.*, 2012. Т. 203, №1. С. 3–30; англ. пер.: A. K. Gushchin, “The Dirichlet problem for a second-order elliptic equation with an L_p boundary function” // *Sb. Math.*, 2012. Vol. 203, no. 1. Pp. 1–27.
18. E. De Giorgi, “Sulla differenziabilità e l’analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari” // *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 1957. Vol. 3, no. 3. Pp. 25–43.
19. J. Nash, “Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations” // *Amer. J. Math.*, 1958. Vol. 80, no. 4. Pp. 931–954.
20. J. Moser, “A new proof of De Giorgi’s theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations” // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960. Vol. 13, no. 3. Pp. 457–468.
21. А. К. Гуцин, “Оценки некасательной максимальной функции решений эллиптического уравнения второго порядка” // *Докл. Акад. наук*, 2012. Т. 446, №5. С. 487–489; англ. пер.: A. K. Gushchin, “Estimates of the nontangential maximal function for solutions of a second-order elliptic equation” // *Dokl. Math.*, 2012. Vol. 86, no. 2. Pp. 667–669.
22. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралъцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с. [O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva, Linear and quasilinear equations of elliptic type. Moscow: Nauka, 1973. 576 pp.]
23. D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer Verlag, 1983. 529 pp.; русск. пер.: Д. Гилбарг, Н. Трудингер, Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
24. В. П. Михайлов, А. К. Гуцин, “Дополнительные главы курса «Уравнения математической физики»” / Лекц. курсы НОЦ, Т. 7. М.: МИАН, 2007. С. 3–144. [V. P. Mikhailov, A. K. Gushchin, “Additional chapters of course “Equations of Mathematical Physics”” / Lekts. Kursy NOC, 7. Moscow: Steklov Math. Inst., RAS, 2007. Pp. 3–144].
25. E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions / Princeton Mathematical Series. Vol. 30. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970. xiv+290 pp.; русск. пер.: И. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 344 с.
26. D. L. Burkholder, R. F. Gundy, “Distribution function inequalities for the area integral”, Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, VI // *Studia Math.*, 1972. Vol. 44. Pp. 527–544.
27. B. E. J. Dahlberg, “Weighted norm inequalities for the Lusin area integral and the nontangential maximal functions for functions harmonic in a Lipschitz domain” // *Studia Math.*, 1980. Т. 67, №3. С. 297–314.

28. В. Ю. Шелепов, “О граничных свойствах решений эллиптических уравнений в многомерных областях, представимых с помощью разности выпуклых функций” // *Матем. сб.*, 1987. Т. 133(175), № 4(8). С. 446–468; англ. пер.: V. Yu. Shelepov, “On boundary properties of solutions of elliptic equations in multidimensional domains representable by means of the difference of convex functions” // *Math. USSR-Sb.*, 1988. Vol. 61, no. 2. Pp. 437–460.
29. H. Fatou, “Séries trigonometriques et séries de Taylor” // *Acta Math.*, 1906. Vol. 30, no. 1. Pp. 335–400.
30. И. И. Привалов, Интеграл Коши. Саратов, 1919. 96 с. [I. I. Privalov, The Cauchy Integral. Saratov, 1919. 96 pp.]
31. E. M. Stein, G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces / Princeton Mathematical Series. Vol. 32. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1971. x+297 pp.; русск. пер.: И. Стейн, Г. Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
32. В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, “Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка” / В сб.: *Дифференциальные уравнения с частными производными – 3* / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, Т. 32. М.: ВИНТИ, 1988. С. 99–215. [V. A. Kondratiev, E. M. Landis, “Qualitative theory of second order linear partial differential equations” / In: *Partial differential equations – 3* / Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 32. Moscow: VINITI, 1988. Pp. 99–215].
33. Н. К. Никольский, Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980. 384 с. [N. K. Nikol'skiy, Lectures on the shift operator. Moscow: Nauka, 1980. 384 pp.]
34. J. B. Garnett, Bounded analytic functions / Pure and Applied Mathematics. Vol. 96. New York, London: Academic Press, Inc., 1981. xvi+467 pp.; русск. пер.: Дж. Гарнет, Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.
35. В. Ж. Думанян, “О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка” // *Матем. сб.*, 2011. Т. 202, № 7. С. 75–94; англ. пер.: V. Zh. Dumanyan, “Solvability of the Dirichlet problem for a general second-order elliptic equation” // *Sb. Math.*, 2011. Vol. 202, no. 7. Pp. 1001–1020.
36. А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, “О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения” // *Матем. сб.*, 1995. Т. 186, № 2. С. 37–58; англ. пер.: A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov, “On the continuity of the solutions of a class of non-local problems for an elliptic equation” // *Sb. Math.*, 1995. Vol. 186, no. 2. Pp. 197–219.
37. А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, “Об однозначной разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения” // *Докл. Акад. наук*, 1996. Т. 351, № 1. С. 7–8. [A. K. Gushchin, V. P. Mikhailov, “On the unique solvability of nonlocal problems for an elliptic equation” // *Dokl. Akad. Nauk*, 1996. Vol. 351, no. 1. Pp. 7–8].
38. А. К. Гуцин, “Условие полной непрерывности операторов, возникающих в нелокальных задачах для эллиптических уравнений” // *Докл. Акад. наук*, 2000. Т. 373, № 2. С. 161–163; англ. пер.: A. K. Gushchin, “A condition for the complete continuity of operators arising in nonlocal problems for elliptic equations” // *Dokl. Math.*, 2000. Vol. 62, no. 1. Pp. 32–34.
39. А. К. Гуцин, “Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений” // *Матем. сб.*, 2002. Т. 193, № 5. С. 17–36; англ. пер.: A. K. Gushchin, “A condition for the compactness of operators in a certain class and its application to the analysis of the solubility of non-local problems for elliptic equations” // *Sb. Math.*, 2002. Vol. 193, no. 5. Pp. 649–668.

40. А. К. Гушчин, “ L_p -оценки решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка” // *ТМФ*, 2013. Т. 174, № 2. С. 243–255; англ. пер.: А. К. Gushchin, “ L_p -estimates for solutions of second-order elliptic equation Dirichlet problem” // *Theoret. and Math. Phys.*, 2013. Vol. 174, no. 2. Pp. 209–219.

Поступила в редакцию 13/XI/2012;
в окончательном варианте — 19/I/2013.

MSC: 35D05; 35J25, 35B30, 35R05, 35B45

L_p -ESTIMATES OF THE NONTANGENTIAL MAXIMAL FUNCTION FOR A SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATION SOLUTIONS

A. K. Gushchin

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mail: akg@mi.ras.ru

The work contains the survey of results related to the study of near the boundary behavior of the solution of the Dirichlet problem with the boundary function in L_p , $p > 1$ for a second-order elliptic equation. There are new statements and some unsolved problems in this direction.

Key words: *elliptic equation, Dirichlet problem, function space.*

Original article submitted 13/XI/2012;
revision submitted 19/I/2013.