Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Немировский, Н. А. Фёдорова, Исследование рациональных структур криволинейного армирования в полярной системе координат, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 1(), 233–244

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:03:07

УДК 519.876:620.22–419.8

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ СТРУКТУР КРИВОЛИНЕЙНОГО АРМИРОВАНИЯ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Ю. В. Немировский¹, Н. А. Фёдорова²¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.² Институт космических и информационных технологий Сибирского федерального университета, Россия, 660074, Красноярск, ул. Киренского 26.

E-mails: nemirov@itam.nsc.ru, feodorova.natalia@mail.ru

На основе структурной модели решена задача рационального армирования криволинейными волокнами осесимметричной кольцевой пластины в полярной системе координат. Изучено влияние структурных параметров на предельное нагружение конструкции.

Ключевые слова: структурная модель, криволинейное армирование.

1. Постановка задачи. Напряжённно-деформированное состояние армированной пластины в полярной системе координат (ρ, θ) относительно компонент тензоров деформаций ε_ρ , ε_θ , $\varepsilon_{\rho\theta}$ и напряжений σ_ρ , σ_θ , $\sigma_{\rho\theta}$ в осесимметрическом случае (искомые функции не зависят от полярного угла θ) описывается приводимыми ниже соотношениями.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} \sigma_{\rho\theta} = 0. \quad (1)$$

Пусть армирование выполнено m семействами волокон ($m = 1, 2, 3$), φ_m — углы армирования, ε_m — деформация в волокне, σ_m — напряжение в волокне, ω_m — интенсивность армирования m -тым семейством волокон. Деформации в волокне в полярной системе определим по структурной модели [1]

$$\varepsilon_\rho \cos^2 \varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2 \varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta} \cos \varphi_m \sin \varphi_m = \varepsilon_m.$$

Соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформаций и компоненты вектора смещений u_ρ , u_θ , в условиях осесимметричной деформации имеют вид

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{\rho\theta} = \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho} \right). \quad (2)$$

Пусть m^* — некоторое фиксированное число семейств армирующих волокон. Закон Гука для неоднородного армированного материала с числом се-

Юрий Владимирович Немировский (д.ф.-м.н., проф.), главный научный сотрудник, лаб. физики быстропротекающих процессов.

Наталья Александровна Фёдорова (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и компьютерной безопасности.

мейств армирующих волокон m^* запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \Omega \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\rho + \nu \varepsilon_\theta) + \sum_{m=1}^{m^*} \sigma_m \omega_m \cos^2 \varphi_m, \\ \sigma_\theta &= \Omega \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\rho) + \sum_{m=1}^{m^*} \sigma_m \omega_m \sin^2 \varphi_m, \\ \sigma_{\rho\theta} &= \Omega \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\rho\theta} + \sum_{m=1}^{m^*} \sigma_m \omega_m \cos \varphi_m \sin \varphi_m, \quad \Omega = 1 - \sum_{m=1}^{m^*} \omega_m,\end{aligned}\tag{3}$$

где E, ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона связующего материала.

При наложении дополнительных условий постоянства сечений волокон [2] интенсивность армирования ω_m m -тым семейством волокон удовлетворяет следующим условиям в полярной системе координат [3]:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \omega_m \cos \varphi_m) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\omega_m \sin \varphi_m) = 0.\tag{4}$$

В рассматриваемой задаче интенсивность ω_m найдём из (4) после задания уравнений конкретных траекторий армирования $\rho = \rho(\theta)$, введения углов армирования φ_m и начальных условий выхода арматуры.

2. Разрешающая система уравнений. Сформулируем задачу об осесимметричной деформации армированной пластины в перемещениях u_ρ, u_θ . Для этого соотношения (3) подставим в уравнения равновесия (1), предварительно напряжения σ_m в волокнах найдём по формулам

$$\sigma_m = E_m (\varepsilon_\rho \cos^2 \varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2 \varphi_m + \varepsilon_{\rho\theta} \cos \varphi_m \sin \varphi_m),$$

где E_m — модуль Юнга материала m -того семейства волокон.

Напряжения $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\theta}$ с учётом структурных характеристик примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= m_1 (\varepsilon_\rho + \nu \varepsilon_\theta) + \sum_{m=1}^{m^*} E_m \omega_m (\varepsilon_\rho \cos^2 \varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2 \varphi_m + \\ &\quad + \varepsilon_{\rho\theta} \sin \varphi_m \cos \varphi_m) \cos^2 \varphi_m, \\ \sigma_\theta &= m_1 (\varepsilon_\rho + \nu \varepsilon_\theta) + \sum_{m=1}^{m^*} E_m \omega_m (\varepsilon_\rho \cos^2 \varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2 \varphi_m + \\ &\quad + \varepsilon_{\rho\theta} \sin \varphi_m \cos \varphi_m) \sin^2 \varphi_m, \\ \sigma_{\rho\theta} &= m_2 \varepsilon_{\rho\theta} + \sum_{m=1}^{m^*} E_m \omega_m (\varepsilon_\rho \cos^2 \varphi_m + \varepsilon_\theta \sin^2 \varphi_m + \\ &\quad + \varepsilon_{\rho\theta} \sin \varphi_m \cos \varphi_m) \sin \varphi_m \cos \varphi_m.\end{aligned}$$

Соотношения для напряжений σ_ρ , σ_θ , $\sigma_{\rho\theta}$ запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= a_{11}\varepsilon_\rho + a_{12}\varepsilon_\theta + a_{13}\varepsilon_{\rho\theta}, & \sigma_\theta &= a_{12}\varepsilon_\rho + a_{22}\varepsilon_\theta + a_{23}\varepsilon_{\rho\theta}, \\ \sigma_{\rho\theta} &= a_{13}\varepsilon_\rho + a_{23}\varepsilon_\theta + a_{33}\varepsilon_{\rho\theta} & \left(m_1 = \Omega \frac{E}{1-\nu^2}, m_2 = \Omega \frac{E}{1+\nu} \right),\end{aligned}\quad (5)$$

где введены коэффициенты

$$\begin{aligned}a_{11} &= m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m \omega_m \cos^4 \varphi_m, & a_{12} &= \nu m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m \omega_m \cos^2 \varphi_m \sin^2 \varphi_m, \\ a_{13} &= \sum_{m=1}^{m^*} E_m \omega_m \cos^3 \varphi_m \sin \varphi_m, & a_{22} &= m_1 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m \omega_m \sin^4 \varphi_m, \\ a_{23} &= \sum_{m=1}^{m^*} E_m \omega_m \cos \varphi_m \sin^3 \varphi_m, & a_{33} &= m_2 + \sum_{m=1}^{m^*} E_m \omega_m \cos^2 \varphi_m \sin^2 \varphi_m.\end{aligned}$$

После подстановки (5) в уравнения равновесия (1) с учётом (2) получим относительно компонент перемещений следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}a_{11} \frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + a_{13} \frac{d^2 u_\theta}{d\rho^2} + \left(\frac{da_{11}}{d\rho} + \frac{a_{11}}{\rho} \right) \frac{du_\rho}{d\rho} + \left(-\frac{a_{23}}{\rho} + \frac{da_{13}}{d\rho} \right) \frac{du_\theta}{d\rho} + \\ + \left(\frac{1}{\rho} \frac{da_{12}}{d\rho} - \frac{a_{22}}{\rho^2} \right) u_\rho + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{da_{13}}{d\rho} + \frac{a_{23}}{\rho^2} \right) u_\theta = 0, \\ a_{13} \frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + \frac{a_{33}}{2} \frac{d^2 u_\theta}{d\rho^2} + \left(\frac{da_{13}}{d\rho} + \frac{a_{23}}{\rho} + \frac{2a_{13}}{\rho} \right) \frac{du_\rho}{d\rho} + \\ + \left(-\frac{a_{33}}{\rho} + \frac{da_{33}}{d\rho} + \frac{2a_{33}}{\rho} \right) \frac{du_\theta}{d\rho} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{da_{23}}{d\rho} + \frac{a_{23}}{\rho^2} \right) u_\rho + \\ + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{da_{33}}{d\rho} - \frac{a_{33}}{\rho^2} \right) u_\theta = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

К системе (6) присоединим четыре граничных условия на внешнем и внутреннем контурах кольцевой пластины. Пусть на внутреннем контуре при $\rho = \rho_1$ заданы перемещения:

$$u_\rho = C_1^*, \quad u_\theta = C_2^* \quad (7)$$

(при $C_1^* = 0$, $C_2^* = 0$ имеем жёстко закреплённый вал, при $C_1^* = 0$, $C_2^* \neq 0$ — возможно скручивание вала).

На внешнем контуре $\rho = \rho_2$ заданы радиальное и касательное усилия p_n , p_τ . С учётом соотношений (5) и (2) условия на внешнем контуре примут вид

$$\begin{aligned}a_{11} \frac{du_\rho}{d\rho} + a_{12} \frac{u_\rho}{\rho} + a_{13} \left(\frac{du_\theta}{d\rho} - \frac{u_\theta}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_2} &= p_n, \\ a_{13} \frac{du_\rho}{d\rho} + a_{23} \frac{u_\rho}{\rho} + a_{33} \left(\frac{du_\theta}{d\rho} - \frac{u_\theta}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_2} &= p_\tau.\end{aligned}\quad (8)$$

Возможны следующие комбинации в граничных условиях: на внутреннем контуре задано одно из усилий и одно из перемещений, на внешнем —

оставшееся усилие и перемещение. Система (6) и граничные условия (7), (8) представляют собой обобщённую двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В граничные условия (7), (8) для общего случая армирования входят как обе неизвестные функции u_ρ , u_θ , так и их производные. Коэффициенты системы содержат полный набор структурных характеристик материала: число m^* семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокна, интенсивность ω_m и тригонометрические функции углов армирования φ_m .

3. Армирование по спиральям. Выполним в рамках поставленной задачи армирование кольцевой пластины по криволинейным траекториям, которые являются семействами логарифмических и алгебраических спиралей [4]. Для построения разрешающей системы необходимо определить коэффициенты a_{ij} системы (6). В каждом конкретном случае заданных семейств спиралей вычислим интенсивность ω_m и углы армирования φ_m .

1. Армирование по семействам логарифмических спиралей. Пусть дано семейство логарифмических спиралей вида $\rho = Cb^\theta$, C — параметр семейства, b — параметр спирали, при $b > 1$ спираль разворачивается вокруг полюса против хода часовой стрелки (рис. 1), если $b < 1$, то спираль закручивается по часовой стрелке (рис. 2). Вычислим угол армирования

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{\ln b},$$

то есть для логарифмической спирали угол армирования — некоторая константа. Определим интенсивность армирования $\omega_1(\rho)$ из уравнения (4) при заданных углах армирования, в нем производную по θ вычисляем по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

с учётом уравнения траектории $\rho = Cb^\theta$. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \omega_1) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}(\omega_1) = 0. \quad (9)$$

Рис. 1

Рис. 2

В (9) частную производную заменяем обычной производной по ρ , так как исключили зависимость от окружной координаты. Интегрируя (9) с учётом заданной интенсивности армирования ω_0 на внутреннем контуре $\rho = \rho_1$, получим следующее выражение для интенсивности армирования по логарифмической спирали

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\rho_1 / \rho}.$$

2. Армирование по семействам спиралей Архимеда. Зададим спираль Архимеда $\rho = a\theta$, a — коэффициент пропорциональности [4]. Иллюстрация кривой приведена на рис. 3. Угол армирования находим из соотношения $\operatorname{tg} \varphi = \theta = \rho/a$, вычисляем $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ через $\operatorname{tg} \varphi$, после подстановки в (4) получаем следующее уравнение для интенсивности армирования $\omega_1(\rho)$:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \omega_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right) = 0,$$

оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования равен

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = a \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Тогда интенсивность армирования в произвольной точке кольцевой пластины найдем по формуле

$$\omega_1 = C \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} / \rho.$$

Пусть на внутреннем контуре $\rho = \rho_1$ задан угол вхождения арматуры φ_0 и задана интенсивность армирования ω_0 , что соответствует условиям технологического процесса. После вычисления константы интегрирования из условий на внутреннем контуре пластины интенсивность армирования имеет вид

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 \sqrt{\rho_1^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}{\rho \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Для тангенса угла армирования получим выражение $\operatorname{tg} \varphi = (\rho/\rho_1) \operatorname{tg} \varphi_0$.

3. Спираль Ферма. Спираль Ферма задается уравнением $\rho^2 = a^2 \theta$, a — коэффициент пропорциональности. Для тангенса угла армирования получим выражение $\operatorname{tg} \varphi = 2\rho^2/a^2$. С учётом условий на внутреннем контуре определяем параметр a^2 : $a^2 = 2\rho_1/\operatorname{tg} \varphi_0$, ограничение на условия на внутреннем контуре $\operatorname{tg} \varphi_0 > 0$.

Оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования определим по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{a^2}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Тогда уравнение для интенсивности армирования $\omega(\rho)$ в произвольной точке кольцевой пластины примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho \omega}{\sqrt{a^4 + 4\rho^4}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho^2 \omega}{\sqrt{a^4 + 4\rho^4}} = 0. \quad (10)$$

Найдём решение уравнения (10):

$$\omega = C_1 \frac{\sqrt{a^2 + 2a\rho + 2\rho^2} \sqrt{a^2 - 2a\rho + 2\rho^2}}{\sqrt{\rho^3}}.$$

Сформулированные выше условия на внутреннем контуре дают соотношения для определения константы интегрирования, и окончательно для интенсивности армирования по спирали Ферма имеем

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{\rho_1^3}}{\sqrt{a^2 + 2a\rho_1 + 2\rho_1^2} \sqrt{a^2 - 2a\rho_1 + 2\rho_1^2}} \frac{\sqrt{a^2 + 2a\rho + 2\rho^2} \sqrt{a^2 - 2a\rho + 2\rho^2}}{\sqrt{\rho^3}},$$

где $a^2 = 2\rho_1 / \operatorname{tg} \varphi_0$.

Вид траектории армирования по спирали Ферма приведен на рис. 4.

Рис. 3

Рис. 4

4. «Велоколесо». Спицы велоколеса в полярной системе координат представляют семейство прямых, заданных уравнением $\rho = a / \sin \theta$, где a — константа, параметр велоколеса, $-\pi < \theta < 0$, $\theta \neq \pi/2$. Вычислим ρ'_θ , найдём θ через ρ из уравнения траектории: $\theta = \arcsin a/\rho$, получим выражение тангенса угла армирования $\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \theta$ через полярный радиус

$$\operatorname{tg} \varphi = \mp \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}.$$

Оператор дифференцирования по окружной координате вдоль траектории армирования равен

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

В результате условие постоянства сечений волокон примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\omega_1 \sqrt{\rho^2 - a^2} \right) + \rho \sqrt{\rho^2 - a^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\omega_1}{\rho} \right) = 0.$$

Пусть ρ_1 — внутренний радиус кольцевой пластины, θ_0 — заданный угол выхода, тогда $a = \rho_1 \sin \theta_0$. С учетом условий на внутреннем контуре $\omega_1|_{\rho=\rho_1} = \omega_0$ получим интенсивность армирования

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 \sqrt{\rho} (\rho_1^2 - (\rho_1 \sin \theta_0)^2)^{1/4}}{\sqrt{\rho_1} (\rho^2 - (\rho_1 \sin \theta_0)^2)^{1/4}}.$$

Армирование вдоль спиц велосипеда для кольцевой пластины находит применение в современной промышленности. В настоящей работе рассматривается армирование по траекториям, представляющим комбинации спиц велосипеда и семейств рассмотренных выше спиралей.

5. Изогональное армирование. Наряду с криволинейными структурами армирования по спиральям, рассматриваемыми в кольцевых пластинах, строим изогональные траектории армирования (т.е. линии, пересекающие кривые данного однопараметрического семейства под одним и тем же заданным углом $\alpha = \arctg k$) [5]. Процедура нахождения изогональных траекторий к данным координатным линиям криволинейной ортогональной системы координат описана в монографии [6].

Для семейства логарифмических спиралей семейство изогональных к ним траекторий описывается уравнением вида

$$\rho = C_1 \exp\left(\frac{1-k}{1+k}\theta\right),$$

где C_1 — произвольная константа, $k = \tg \alpha$. Иллюстрации армирования концентрического кольца по логарифмическим спиральям и изогональным им траекториям для значений $k = 3$, $k = 0,7$ приведены на рис. 5, 6, где параметр семейств траекторий принимает три значения, изогональные траектории изображены пунктирными линиями.

Для семейств спиралей Архимеда уравнение изогональных траекторий имеет вид

$$\rho = C_2 e^{-k\theta} (1 + k\theta)^{2/k},$$

Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

где C_2 — произвольная константа. Армирование по спиральям Архимеда и изогональным им траекториям в кольцевой пластине для значений $k = 0, 7$, $k = 1, 4$ приведены на рис. 7, 8.

Коэффициенты системы (6) учитывают способы армирования семейства волокон в направлении любых изогональных траекторий, что дает широкое разнообразие структур армирования и позволяет в рамках единой схемы решения (6) получать композиционную конструкцию с заранее заданными свойствами.

4. Условия прочности армированного материала. Проверка условий разрушения упруго армированного материала имеет свои особенности [7]. Сформулируем кратко условия прочности армированного материала. Пусть материал изотропного связующего имеет различные пределы прочности при растяжении σ_c^+ и сжатии σ_c^- . Тогда в случае плоского напряжённого состояния условие прочности Баландина для неоднородного материала через напряжения σ_ρ^c , σ_θ^c , $\sigma_{\rho\theta}^c$ в связующем для полярной системы координат имеют вид

$$(\sigma_\rho^c)^2 + (\sigma_\theta^c)^2 - \sigma_\rho^c \sigma_\theta^c + 3(\sigma_{\rho\theta}^c)^2 + (\sigma_c^- - \sigma_c^+)(\sigma_\rho^c + \sigma_\theta^c) < \sigma_c^+ \sigma_c^-. \quad (11)$$

Левую часть соотношения (11) назовём функцией Баландина.

Для семейств армирующих волокон предполагаем, что пределы прочности (текучести) m -го семейства волокон при растяжении σ_m^+ и сжатии σ_m^- различны. Армирующие семейства волокон остаются упругими, если выполняются неравенства [8]

$$-\sigma_m^- < E_m(\varepsilon_\rho l_{1m}^2 + 2\varepsilon_{\rho\theta} l_{1m} l_{2m} + \varepsilon_\theta l_{2m}^2) < \sigma_m^+. \quad (12)$$

В (12) использованы обозначения $l_{m1} = \cos(\varphi_m)$, $l_{m2} = \sin(\varphi_m)$, где m — число семейств армирующих волокон, E_m — модуль Юнга m -го семейства волокон. Таким образом, для проверки прочности армированного материала необходимо анализировать два условия: условие на прочность материала связующего (11) и условие на прочность армирующих волокон (12).

На основании вышеизложенного следует ввести понятие предельного упругого состояния в некоторой точке рассматриваемой конструкции, по достижении которого хотя бы в одной точке либо в связующем, либо в волокне происходит выход за пределы упругости (напряжение превышает предел текучести). В данной точке может возникнуть микроразрушение.

5. Численное решение задачи. Численную схему строим относительно обезразмеренных переменных: линейный размер пластины относим к внешнему радиусу, в соотношениях для напряжений все величины относим к максимальному модулю Юнга армирующих семейств волокон. Система (6) и сформулированные граничные условия представляют собой обобщенную двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты в (6) содержат полный набор структурных характеристик: число семейств армирующих волокон, механические характеристики материалов связующего и волокон, интенсивность и тригонометрические функции углов армирования.

Для численного решения обезразмеренная система (6) сводилась к системе четырёх дифференциальных уравнений первого порядка, затем строилась разностная схема, аппроксимирующая систему дифференциальных уравнений и краевые условия со вторым порядком точности. Полученная при этом система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов решается методом ортогональной прогонки [9].

Постановка задачи свелась к реализации единой схемы, которая учитывает её разнообразные механические формулировки и различные способы армирования.

В численном эксперименте рассмотрена кольцевая пластина с тремя типами структур армирования: траекториями армирования являются семейства спиралей Архимеда и логарифмических спиралей (I) (рис. 9), семейство спиралей Архимеда и «спицы велосипеда» (II), семейство логарифмических спиралей и «спицы велосипеда» (III) (рис. 10). В качестве материала связующего выбран алюминий, армирование производится стальными волокнами. Механические характеристики металлокомпозита [10] и за-

Рис. 9

Рис. 10

Таблица 1

Механические и геометрические характеристики композита							
Amp	ν	E , ГПа	E_1 , ГПа	E_2 , ГПа	ω_{01}	ω_{02}	$\operatorname{tg} \varphi_0$
-2,0	0,3	70,0	200,0	200,0	0,3	0,3	0,7
-1,5	0,3	70,0	200,0	200,0	0,05	0,04	0,7
0,5	0,3	70,0	200,0	200,0	0,32	0,1	0,7
2,0	0,3	70,0	200,0	200,0	0,51	0,18	0,7

Рис. 11. Структура I

Рис. 12. Структура II

Рис. 13. Структура III

даваемые геометрические параметры конструкции представлены в табл. 1. Значения средней прочности для материала связующего σ_c^+ составляет 0,29 ГПа, для стальных волокон пределы прочности при растяжении $\sigma_1^+ = 0,8$ ГПа, при сжатии $\sigma_1^- = 0,4$ ГПа. На внутреннем контуре ставятся условия жесткой заделки. На внешнем контуре задаются нормальное и тангенциальное усилия p_n, p_τ . В граничных условиях примем $p_n/p_\tau = Amp$, число Amp назовём амплитудой внешней нагрузки, полагаем величину усилия $p_n = 1$ МПа. Изучаем, как влияет изменение

амплитуды на достижение предельной нагрузки согласно критериям (11), (12) для трёх рассматриваемых структур армирования.

На рис. 11–13 для четырёх типов начальных интенсивностей армирования ω_{01}, ω_{02} при фиксированной внешней нагрузке показаны значения функции Баландина в безразмерных переменных. Как видим, структура III допускает значительное увеличение внешней нагрузки для всех начальных значений интенсивностей армирования, в отличие от двух других структур, в которых происходит приближение к предельному состоянию. Можем сделать вывод, что при фиксированном материале и уровне нагружения при заданных граничных условиях наиболее предпочтительной является структура армирования III.

Для анализа рассматриваемых структур армирования (I–III) введём характеристику, которую назовём степенью нагружения волокна P , определив её как отношение напряжений в волокне к пределу прочности соответствующего материала, выраженную в процентах. Задавшись значениями амплитуды внешней нагрузки и начальными условиями выхода арматуры, получим следующие зависимости P для названных структур армирования (табл. 2).

Численные эксперименты показали, что за счёт управления геометрическими параметрами пластины и криволинейной укладкой семейств армирующих волокон можно получить конструкцию с заранее заданными свойствами.

Таблица 2

Степень нагружения волокна P , выраженная в процентах

структура	$\omega_{01} = 0,3,$ $\omega_{02} = 0,3$	$\omega_{01} = 0,05,$ $\omega_{02} = 0,0376$	$\omega_{01} = 0,1,$ $\omega_{02} = 0,318$
I	6	40	6
II	9	70	10
III	14	80	22

Предложенная методика позволяет прогнозировать поведение композита при различных вариантах механических свойств связующего и волокна, начальных стадий технологического процесса, выбора различных криволинейных траекторий армирования и их количества, размера внутреннего отверстия кольцевой пластины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Yu. V. Nemirovsky, "On the elastic-plastic behaviour of a reinforced layer" // *Int. J. Mech. Sci.*, 1970. Vol. 12, no. 10. Pp. 898–903.
2. С. Б. Бушманов, Ю. В. Немировский, "Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения" // *Мех. композ. матер.*, 1983. № 2. С. 278–284; англ. пер.: S. B. Bushmanov, Yu. V. Nemirovskii, "Design of plates reinforced with equally stressed fibers of constant cross section" // *Mech. Compos. Mater.*, 1983. Vol. 19, no. 2. Pp. 207–213.
3. Ю. В. Немировский, Н. А. Фёдорова, "Армирование плоских конструкций по криволинейным ортогональным траекториям" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 96–104. [Yu. V. Nemirovsky, N. A. Feodorova, "Reinforcement of Planar Structures along Orthogonal Curvilinear Trajectories" // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 5(21). Pp. 96–104].
4. А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Линии и поверхности. Минск: Выш. школа, 1985. 220 с. [A. A. Gusak, G. M. Gusak, Lines and surfaces. Minsk: Vysh. shkola, 1985. 220 pp.]
5. Н. А. Фёдорова, "Моделирование изогонально армированных кольцевых пластин в полярной системе координат" // *Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ.*, 2011. Т. 4, № 3. С. 400–405. [N. A. Feodorova, "Modeling for reinforced with isogonal trajectories ring-shaped lamels in polar coordinate system" // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2011. Vol. 4, no. 3. Pp. 400–405].
6. Ю. В. Немировский, Н. А. Фёдорова, Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов. Красноярск: СВУ, 2010. 136 с. [Yu. V. Nemirovskiy, N. A. Feodorova, Mathematical modeling of flat structures made of reinforced fiber materials. Krasnoyarsk: Sib. Fed. Univ., 2010. 136 pp.]
7. Ю. В. Немировский, Б. С. Резников, Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 165 с. [Yu. V. Nemirovskii, B. S. Reznikov, Strength of Structural Elements Made of Composite Materials. Novosibirsk: Nauka, 1986. 165 pp.]
8. Ю. В. Немировский, "Об упруго-пластическом поведении армированного слоя" // *ПМТФ*, 1969. Т. 10, № 6. С. 81–89. [Yu. V. Nemirovskii, "Elastoplastic behavior of a reinforced layer" // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1969. Vol. 10, no. 6. Pp. 914–921].
9. J. M. Ortega, V. G. Pool, An introduction to Numerical Methods of Solving Differential Equations. New York: Pitman Publishing Inc., 1981; русск. пер.: Дж. Ортега, У. Пул, Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
10. В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др., Композиционные материалы: Справочник. Москва: Машиностроение, 1990. 510 с. [V. V. Vasiliev, V. D. Protasov,

V. V. Bolotin, et al., Composite Materials: A Handbook. Moscow: Mashinostroenie, 1990. 510 pp.]

Поступила в редакцию 14/XI/2012;
в окончательном варианте — 04/II/2013.

MSC: 74K99, 74E30

STUDY OF CURVILINEAR REINFORCEMENT RATIONAL STRUCTURES IN POLAR COORDINATE SYSTEM

Yu. V. Nemirovsky¹, N. A. Feodorova²

¹ Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russia.

² Institute of Space and Information Technologies,
Siberian Federal University,
26, Kirensky st., Krasnoyarsk, 660074, Russia.

E-mails: nemirov@itam.nsc.ru, feodorova.natalia@mail.ru

The problem of curvilinear fibers rational reinforcement for axially symmetric ring-shaped lamel in polar coordinate system is solved by reference to the structural model. The effect of structural parameters for a construction limit stressing is studied.

Key words: *structural model, curvilinear reinforcement.*

Original article submitted 14/XI/2012;
revision submitted 04/II/2013.

Yuriy V. Nemirovsky (Dr.Sci. (Phys. & Math.)), Chief Scientist, Lab. of Fast Processes Physics. *Nataliya A. Feodorova* (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Security.