Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гималтдинова, Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа в специальной области, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 1(), 46–52

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:31:33

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А. А. Гималтдинова

¹ Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, Россия, 443099, Самара, ул. М. Горького, 65/67.

² Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал, Россия, 453103, Стерлитамак, ул. Ленина, 47 а.

E-mail: g_alfira@mail.ru

Получены условия на комплексный параметр, при которых единственно решение задачи Трикоми для уравнения с двумя перпендикулярными линиями изменения типа.

Ключевые слова: задача Трикоми, уравнение смешанного типа, единственность решения.

При изучении краевых задач для уравнений смешанного типа важными являются вопросы единственности решения и расположения спектра соответствующих спектральных задач.

Многими авторами изучалась задача Трикоми для модельного уравнения Лаврентьева—Бицадзе

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0. \quad (1)$$

В работе [1] А. В. Бицадзе установил принцип экстремума для уравнений смешанного типа и на его основе доказал единственность решения задачи Трикоми для уравнения (1) при $\lambda = 0$, а также существование решения.

Т. Ш. Кальменов в работе [2] на основе принципа экстремума А. В. Бицадзе и теории положительных решений операторных уравнений М. А. Красносельского доказал существование хотя бы одного собственного значения однородной задачи Трикоми для уравнения (1).

С. М. Пономарев [3] доказал единственность решения задачи Трикоми для уравнения (1) при $\lambda = \alpha + i\beta$ таких, что $\alpha > 0$ и $|\beta| \leq 2\sqrt{2}\alpha$.

Е. И. Моисеев [4] для уравнения (1) с комплексным параметром $\lambda = \mu^2$ установил единственность решения задачи Трикоми при $|\arg \mu| \leq \operatorname{arctg} k_0$, где k_0 — корень уравнения $2k = 2k^2 - 1 + 2k\sqrt{2k^2 - 1}$, $k_0 > 1/\sqrt{2}$.

К. Б. Сабитов [5] изучил единственность решения задачи Трикоми для уравнения (1) с кусочно-постоянным параметром $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$, $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$.

В данной работе рассматривается смешанное эллиптико-гиперболическое уравнение с двумя линиями изменения типа

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot u_{yy} - \lambda u = 0, \quad (2)$$

где λ — комплексный параметр, в области D , ограниченной следующими линиями:

Альфира Авкалевна Гималтдинова (к.ф.-м.н., доц.), докторант, каф. математики и методики обучения¹; доцент, каф. математического анализа².

- 1) гладкой кривой Γ , лежащей в первой четверти плоскости (x, y) с концами в точках $A_1(l_1, 0)$ и $A_2(0, l_2)$, $l_1, l_2 > 0$;
- 2) характеристиками OC_1 ($x + y = 0$) и C_1A_1 ($x - y = l_1$) уравнения (2) при $x > 0, y < 0$;
- 3) характеристиками OC_2 ($x + y = 0$) и C_2A_2 ($y - x = l_2$) при $x < 0, y > 0$, где $C_1 = (l_1/2, -l_1/2)$, $C_2 = (-l_2/2, l_2/2)$, $O = (0, 0)$.

Введём обозначения: $D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$. В области D для уравнения (2) поставим следующую задачу Трикоми.

ЗАДАЧА Т. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \quad (3)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \quad (4)$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$u(x, y)|_{C_1C_2} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in C_1C_2,$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под регулярным решением уравнения (2) в области D понимается функция $u(x, y)$, удовлетворяющая условиям (3), (4) и имеющая непрерывные частные производные u_x и u_y в $\overline{D}_0$, за исключением, быть может, точек O, A_1, A_2 , где они могут иметь степенную особенность порядка меньше единицы.

В областях D_1 и D_2 для уравнения (2) рассмотрим следующие задачи.

ВТОРАЯ ЗАДАЧА ДАРБУ.

- 1) Найти в области D_1 решение $u(x, y)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям:

$$u_y(x, 0) = \nu_1(x), \quad x \in (0, l_1), \quad (5)$$

$$u(x, -x) = 0, \quad x \in [0, l_1/2], \quad (6)$$

где $\nu_1(x)$ — заданная функция.

- 2) Найти в области D_2 решение $u(x, y)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям:

$$u_x(0, y) = \nu_2(y), \quad y \in (0, l_2), \quad (7)$$

$$u(y, -y) = 0, \quad y \in [0, l_2/2], \quad (8)$$

где $\nu_2(y)$ — заданная функция.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.

- 1) Если $\nu_1(x) \in C^1(0, l_1) \cap L_1[0, l_1]$, то существует единственное решение задачи (2), (5) и (6) и оно определяется формулой

$$u(x, y) = \int_0^{x+y} \nu_1(t) J_0 \left[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-t)} \right] dt, \quad (9)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

2) Если $\nu_2(x) \in C^1(0, l_2) \cap L_1[0, l_2]$, то существует единственное решение задачи (2), (7) и (8) и оно определяется формулой

$$u(x, y) = \int_0^{y+x} \nu_2(t) J_0 \left[\sqrt{\lambda(y+x-t)(y-x-t)} \right] dt. \quad (10)$$

Доказательство теоремы 1.1) приведено в [6], а формула (10) получается из (9) заменой x на y , y на x в силу симметричности уравнения (2) относительно $y = x$.

Полагая в формулах (9) и (10) соответственно $y = 0$ и $x = 0$, найдем:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tau_1(x) = \int_0^x J_0 \left[\sqrt{\lambda}(x-t) \right] \nu_1(t) dt, \quad 0 \leq x \leq l_1, \\ u(0, y) &= \tau_2(y) = \int_0^y J_0 \left[\sqrt{\lambda}(y-t) \right] \nu_2(t) dt, \quad 0 \leq y \leq l_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть комплексное число $\lambda = \mu^2$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$. Тогда $u(x, y) = u_1(x, y) + iu_2(x, y)$, $\bar{u}(x, y) = u_1(x, y) - iu_2(x, y)$.

ЛЕММА 1. Если $u|_{AC_1} = 0$, то для любого регулярного решения уравнения (2) имеет место при любом $x \in [0, l_1]$ неравенство

$$\operatorname{Re} J_{1a} = \operatorname{Re} \int_0^x e^{-2at} \bar{u}(t, 0) u_y(t, 0) dt \geq 0, \quad a = \operatorname{const} \geq |\mu_2|.$$

Доказательство. На основании формулы (11) и интегрального представления функции Бесселя

$$J_q(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(q+1/2)} \left(\frac{z}{2} \right)^q \int_0^1 (1-\xi^2)^{q-1/2} \cos(z\xi) d\xi$$

вычислим интеграл

$$\begin{aligned} J_{1a} &= \int_0^x e^{-2at} \nu_1(t) \bar{\tau}_1(t) dt = \int_0^x e^{-2at} \nu_1(t) \int_0^t J_0[\bar{\mu}_1(t-s)] \bar{\nu}_1(s) ds dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^x e^{-2at} \nu_1(t) \int_0^t \bar{\nu}_1(s) ds \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} e^{i\bar{\mu}(t-s)\xi} d\xi dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi \int_0^x e^{-2at} \int_0^t \nu_1(t) \bar{\nu}_1(s) e^{(\mu_2+i\mu_1)(t-s)\xi} ds dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Предварительно найдем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\nu_1(t) \bar{\nu}_1(s) e^{i\mu_1(t-s)\xi}] &= \\ &= \operatorname{Re} \left([\nu_{11}(t) \nu_{11}(s) + \nu_{12}(t) \nu_{12}(s) + i(\nu_{12}(t) \nu_{11}(s) - \nu_{11}(t) \nu_{12}(s))] \times \right. \\ &\quad \left. \times [\cos \mu_1(t-s)\xi + i \sin \mu_1(t-s)\xi] \right) = \\ &= [\nu_{11}(t) \nu_{11}(s) + \nu_{12}(t) \nu_{12}(s)] \cos \mu_1(t-s)\xi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\nu_{12}(t)\nu_{11}(s) - \nu_{11}(t)\nu_{12}(s) \right] \sin \mu_1(t-s) \xi = \\
 & = [\nu_{11}(t) \cos \mu_1 t \xi - \nu_{12}(t) \sin \mu_1 t \xi] [\nu_{11}(s) \cos \mu_1 s \xi - \nu_{12}(s) \sin \mu_1 s \xi] + \\
 & + [\nu_{11}(t) \sin \mu_1 t \xi + \nu_{12}(t) \cos \mu_1 t \xi] [\nu_{11}(s) \sin \mu_1 s \xi - \nu_{12}(s) \cos \mu_1 s \xi]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Введём в рассмотрение вспомогательные функции:

$$\begin{aligned}
 P_1(t, \xi) &= [\nu_{11}(t) \cos \mu_1 t \xi - \nu_{12}(t) \sin \mu_1 t \xi] e^{-\mu_2 t \xi}; \\
 P_2(t, \xi) &= [\nu_{11}(t) \sin \mu_1 t \xi + \nu_{12}(t) \cos \mu_1 t \xi] e^{-\mu_2 t \xi}; \\
 F_i(t, \xi) &= \int_0^t P_i(s, \xi) ds, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Тогда на основании формул (12) и (13) получим неравенство

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} J_{a_1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-1/2} \int_0^x e^{-2t(a-\mu_2 \xi)} \times \\
 & \times \left[P_1(t, \xi) \int_0^t P_1(s, \xi) ds + P_2(t, \xi) \int_0^t P_2(s, \xi) ds \right] dt d\xi = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-1/2} \int_0^x e^{-2t(a-\mu_2 \xi)} \frac{d}{dt} [F_1^2(t, \xi) + F_2^2(t, \xi)] dt d\xi = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-1/2} \left([F_1^2(x, \xi) + F_2^2(x, \xi)] e^{-2x(a-\mu_2 \xi)} + \right. \\
 & \quad \left. + 2(a - \mu_2 \xi) \int_0^x [F_1^2(t, \xi) + F_2^2(t, \xi)] e^{-2t(a-\mu_2 \xi)} dt \right) d\xi \geq 0,
 \end{aligned}$$

которое доказывает лемму 1. $\square$

ЛЕММА 2. Если $u|_{AC_2} = 0$, то для любого регулярного решения уравнения (2) имеет место при любом $y \in [0, l_2]$ неравенство

$$\operatorname{Re} J_{2a} = \operatorname{Re} \int_0^y e^{-2at} \bar{u}(0, t) u_x(0, t) dt \geq 0.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

ЛЕММА 3. Если $u|_{\Gamma} = 0$, то справедливо неравенство

$$\iint_{D_0} u^2 dx dy \leq 9 \operatorname{mes} D_0 \iint_{D_0} |\nabla u|^2 dx dy,$$

где $\operatorname{mes} D_0$ — площадь области D_0 .

Доказательство. Отобразим область D_0 симметрично относительно оси Ox и полученную область обозначим D_0^* . Затем область $Q_1 = D_0 \cup D_0^* \cup OA_1$ отобразим относительно оси Oy , получим область Q_2 . Теперь в области $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup A_2B_2$, где $B_2(0, -l_2)$ — точка, симметричная точке A_2 , доопределим функцию $u(x, y)$ чётным образом по обоим переменным, т. е. получим функцию $\tilde{u}(x, y) \in \overset{\circ}{W}^{\frac{1}{2}}(Q)$. Используя оценку [7, с.71]

$$\|u\|_{2, \Omega} \leq \frac{3}{2} (\operatorname{mes} \Omega)^{1/2} \|\nabla u\|_{2, \Omega},$$

получим

$$\iint_Q \tilde{u}^2 dx dy \leq \frac{9}{4} \text{mes } Q \iint_Q |\nabla \tilde{u}|^2 dx dy,$$

откуда после возвращения к области D_0 и следует справедливость доказываемой оценки. $\square$

ТЕОРЕМА 2. *Если в классе регулярных решений уравнения (2) существует решение задачи Трикоми, то оно единственно при всех λ , удовлетворяющих неравенству*

$$|\lambda| < 2\text{Re } \lambda + p, \quad p = 1/(9 \text{mes } D_0). \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $w(x, y) = \exp(-a(x + y)) u(x, y)$, где $a = |\mu_2| = |\text{Im } \mu|$, $u(x, y)$ — решение однородной задачи Т, тогда $w(x, y)$ в области D_0 является решением уравнения

$$Mw = w_{xx} + w_{yy} + 2aw_x + 2aw_y + (2a^2 - \lambda)w = 0.$$

Рассмотрим равенство

$$\overline{w} Mw = (\overline{w} w_x)_x + (\overline{w} w_y)_y - \overline{w}_x w_x - \overline{w}_y w_y + 2a \overline{w} w_x + 2a \overline{w} w_y + (2a^2 - \lambda)|w|^2 = 0$$

и проинтегрируем его по области $D_0^{\varepsilon\delta}$, полученной из D_0 при отходе внутрь нее на расстояние $\varepsilon > 0$ от кривой Γ и на расстояние $\delta > 0$ от отрезков OA_1 и OA_2 . У полученного равенства выделим вещественную часть:

$$\begin{aligned} \iint_{D_0^{\varepsilon\delta}} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} |w|^2 + a|w|^2 \right)_x + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} |w|^2 + a|w|^2 \right)_y \right] dx dy - \\ - \iint_{D_0^{\varepsilon\delta}} \left[|\nabla w|^2 - \text{Re} (2a^2 - \lambda)|w|^2 \right] dx dy = 0. \end{aligned}$$

Применяя здесь формулу Грина, в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ с учётом граничного условия $w|_{\Gamma} = 0$ получим

$$\begin{aligned} \iint_{D_0} |\nabla w|^2 dx dy + (\text{Re } \lambda - 2a^2) \iint_{D_0} |w|^2 dx dy + \\ + \text{Re} \int_0^{l_1} e^{-2ax} \overline{u}(x, 0) u_y(x, 0) dx + \text{Re} \int_0^{l_2} e^{-2ay} \overline{u}(0, y) u_x(0, y) dy = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

В силу лемм 1 и 2 при $\text{Re } \lambda \geq 2(\text{Im } \mu)^2$ из равенства (15) следует единственность решения задачи Трикоми. А если $-p < \text{Re } \lambda - 2(\text{Im } \mu)^2$, то в силу равенства (15) и леммы 3 получим

$$\begin{aligned} \iint_{D_0} |\nabla w|^2 dx dy \leq -(\text{Re } \lambda - 2a^2) \iint_{D_0} |w|^2 dx dy \leq \\ \leq -\frac{\text{Re } \lambda - 2a^2}{p} \iint_{D_0} |\nabla w|^2 dx dy, \end{aligned}$$

откуда следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D .

Запишем неравенство $-p < \operatorname{Re} \lambda - 2(\operatorname{Im} \mu)^2$ в другом виде. Так как $\lambda = \mu^2 = (\mu_1 + i\mu_2)^2$, то $\mu_1^2 = \frac{1}{2}(|\lambda| + \operatorname{Re} \lambda)$, $\mu_2^2 = \frac{1}{2}(|\lambda| - \operatorname{Re} \lambda)$, поэтому получим неравенство

$$|\lambda| < 2\operatorname{Re} \lambda + p,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Неравенство (14) можно привести к виду

$$\frac{(\operatorname{Re} \lambda + 2p/3)^2}{(p/3)^2} - \frac{(\operatorname{Im} \lambda)^2}{(p/\sqrt{3})^2} > 1, \quad \operatorname{Re} \lambda > -p/2,$$

т. е. на плоскости (λ) получится внутренность правой ветви гиперболы с вершиной в точке $(-2p/3, 0)$.

Таким образом, решение задачи Трикоми для уравнения (2) единственно при всех λ из указанной области.

Отметим, что в работе [8] была доказана единственность решения задачи Трикоми для уравнения (2) при $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $|\operatorname{Im} \lambda / \operatorname{Re} \lambda| \leq 2\sqrt{2}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А. В. Бицадзе, "О некоторых задачах для уравнений смешанного типа" // *Докл. Акад. наук СССР*, 1950. Т. 70, № 4. С. 561–564. [A. V. Bicadze, "On some problems for mixed type equations" // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1950. Vol. 70, no. 4. Pp. 561–564].
2. Т. Ш. Кальменов, "О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева—Бицадзе" // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 8. С. 1418–1425. [T. Sh. Kal'menov, "The spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bicadze equation" // *Differ. Uravn.*, 1977. Vol. 13, no. 8. Pp. 1418–1425].
3. С. М. Пономарев, "К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева—Бицадзе" // *Докл. Акад. наук СССР*, 1978. Т. 238, № 6. С. 1299–1302. [S. M. Ponomarev, "On the eigenvalue problem for the Lavrent'ev-Bicadze equation" // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978. Vol. 238, no. 6. Pp. 1299–1302].
4. Е. И. Моисеев, Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с. [E. I. Moiseev, *Equations of mixed type with a spectral parameter*. Moscow: Moscow State Univ., 1988. 150 pp.]
5. К. Б. Сабитов, "О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева—Бицадзе со спектральным параметром" // *Диффер. уравн.*, 1986. Т. 22, № 11. С. 1977–1984; англ. пер.: K. B. Sabitov, "Tricomi problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation with a spectral parameter" // *Differ. Equ.*, 1986. Vol. 22. Pp. 1380–1386.
6. К. Б. Сабитов, "Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I" // *Диффер. уравн.*, 1990. Т. 26, № 6. С. 1023–1032; англ. пер.: K. B. Sabitov, "Construction in explicit form of solutions of the Darboux problems for the telegraph equation and its application in the inversion of integral equations. I" // *Differ. Equ.*, 1990. Vol. 26, no. 6. Pp. 747–755.
7. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралъцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с. [O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva, *Linear and quasilinear equations of elliptic type*. Moscow: Nauka, 1973. 576 pp.]
8. Ю. У. Талмирзаев, К теории краевых задач для уравнений смешанного типа с негладкой линией вырождения: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Ташкент: АН Уз.ССР. Ин-т математики, 1980. 16 с. [Yu. U. Talmirzaev, *On the theory of boundary value problems for equations of mixed type with a smooth line of degeneracy*: Ph.D. Thesis (Phys. & Math.). Tashkent: AN Uz.SSR. In-t matematiki, 1980. 16 pp.]

Поступила в редакцию 15/XI/2012;
в окончательном варианте — 17/I/2013.

MSC: 35M10, 35M12

TRICOMI PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION WITH TWO LINES OF TYPE CHANGING IN A SPECIAL AREA

A. A. Gimaltdinova

¹ Samara State Academy of Social and Humanities,
65/67, M. Gorky st., Samara, 443099, Russia.

² Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
47 a, Lenin st., Sterlitamak, 453103, Russia.

E-mail: *g_alfira@mail.ru*

We obtain conditions on the complex parameter, when there is an unique solution of the Tricomi problem for an equation with two perpendicular lines of degeneracy.

Key words: *Tricomi problem, mixed type equation, uniqueness of solution.*

Original article submitted 15/XI/2012;
revision submitted 17/I/2013.

Alfira A. Gimaltdinova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Doctoral Candidate, Dept. of Mathematics and Teaching Methods¹; Associate Professor, Dept. of Mathematical Analysis².