Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Посеряев, А. П. Чуриков, Исследование процесса хаотизации в динамических системах, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 181–183

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:32:11

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ХАОТИЗАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Численными методами рассматривается процесс хаотизации в системах, моделируемых разностным уравнением $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$. Построена зависимость показателя Ляпунова от параметра r и показана мультифрактальная структура этой функции. Найдены острова метастабильности в области хаоса и определено значение числа Фейгенбаума для этих островов.

Большой интерес для нелинейной динамики представляет одномерное отображение

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (1)$$

где F – произвольная непрерывная функция, определенная на некотором интервале. В частном случае разностное уравнение (1) принимает вид

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n), \quad (2)$$

где r – параметр. Если предположить, что индексы n и $n+1$ отвечают двум последовательным моментам времени, то уравнение (2) задаёт эволюционный процесс. Например, аналогичное уравнение использовалось как модель зависимости численности $(n+1)$ -го поколения популяции насекомых от численности предыдущего n -ного поколения [1]. Уравнение (2), в котором зависимость от x_n квадратична, исключительно просто. Тем не менее при различных значениях параметра r последовательности, генерируемые при его итерациях, могут быть стационарными (при $r < 3$), обнаруживать поведение, аналогичное переходу к турбулентности типа Ландау [2] (при увеличении r до $r_c \approx 3,56994571869$), и хаотическое поведение при $r > r_c$ [3]. Будем считать, что r лежит в диапазоне $0 < r \leq 4$, так что интервал $[0,1]$ отображается в себя.

Р и с. 1. Каскад бифуркаций при переходе к хаосу

Р и с. 2. Каскад бифуркаций в области хаоса при $r \in [3,825; 3,860]$

Область $r < r_c$ достаточно хорошо изучена как аналитически, так и численно [2, 4]. На рис.1 показаны результаты численного расчёта зависимости предельного значения x_{lim} , получающегося в результате многократных итераций уравнения (2), от параметра r для наиболее интересной с исследовательской точки зрения области $r \in [2,95; 4]$.

Анализ результатов расчёта показывает, что существует последовательность значений параметра: $(r_1, r_2, \dots)$, такая, что при переходе через r_n происходит бифуркация удвоения периода. Легко показать аналитически (см. [4]), что $r_1 = 3$. Многократное повторение бифуркаций удвоения периода открывает один из возможных путей возникновения турбулентности (сценарий Ландау). В этом сценарии число бифуркаций бесконечно, причём они следуют друг за другом по мере увеличения r через всё убывающие интервалы; последовательность бифуркационных значений $r_1, r_2, \dots$ стремится к конечному пределу r_c , за которым периодичность исчезает и в пространстве возникает сложный аperiодический аттрактор, ассоциируемый в этом сценарии с возникновением турбулентности. Оказывается, что существует в пределе $n \rightarrow \infty$ закономерность в последовательности бифуркационных значений, имеющая вид [4]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = d = 4,6692. \quad (3)$$

Это число носит название числа Фейгенбаума. Далее, оказывается, что несмотря на хаос, свойственный турбулентности, в области $r > r_c$ (при $r = 3,83$) численно была обнаружена устойчивая периодическая траектория периода 3 [5].

Более подробное рассмотрение турбулентной области $r > r_c$ показывает существование в ней островов метастабильности, что наглядно демонстрирует рис.1. Наиболее выразительным из них является остров в области $r \in [3,825; 3,860]$, изображённый подробно на рис.2.

Видно, что при $r = 3,83$ существует устойчивая траектория периода 3. Интересно отметить, что структуры рис.1 и рис.2 в известном смысле аналогичны. Возникает естественный вопрос о значении параметра d_2 в этой области, а также в других островах метастабильности (см. рис.1 и 2).

Одним из возможных путей исследования турбулентной области является анализ значений показателя Ляпунова [3], определяющего экспоненциальный рост элемента фазового объёма динамической системы. Если значение меньше нуля, то система стабильна, в противном случае она способна проявлять хаотическое поведение. Показатель Ляпунова вычислялся следующим образом. Предварительно для фиксированного значения r формула (2) применяется до тех пор, пока последовательность чисел не сойдётся к тому аттрактору, которым обладает система. После того, как числа установились, используется алгоритм:

$$\begin{aligned} & total \leftarrow 0; \text{ for } n \leftarrow 1 \text{ to } m; x \leftarrow rx(1-x); \\ & total \leftarrow total + ((\log|r - 2rx|) / \log 2); lyap \leftarrow total / m, \end{aligned} \quad (4)$$

где m подбирается в соответствии с периодом устойчивой траектории (т.е. количеством точек x_{lim} , соответствующих данному r). Результаты численных расчётов показателя Ляпунова по алгоритму (4) приведены на рис.3.

Р и с. 3. Зависимость показателя Ляпунова от параметра r

Р и с. 4. Зависимость показателя Ляпунова от параметра r в области $r \in [3,625; 3,635]$

Р и с. 5. Зависимость показателя Ляпунова от параметра r в области $r \in [3,842; 3,857]$

Из свойств показателя Ляпунова и из рис.3 следует, что область $r < r_c$ является устойчивой, а значения параметра r , соответствующие локальным максимумам в этой области, равны бифуркационным значениям. Структура турбулентной области ($r > r_c$), как видно из рис.3, чрезвычайно сложна и представляет собой мультифрактал [6]. Например, область 1, изображённая в увеличенном масштабе на рис.4, подобна изображённой на рис.3.

Особо отметим, что область 2 (см. рис.3), зависимость показателя Ляпунова для которой от параметра r представлена на рис.5, соответствует острову стабильности на рис.2. Численное определение бифуркационных значений для островов метастабильности позволяет получить согласно формуле (3) значение

чисел Фейгенбаума δ_n в этих областях. Оказывается, что они совпадают с определённым ранее значением числа Фейгенбаума δ в основной области: $d_n = d = 4,6692$.

Итак, можно сделать вывод об универсальности постоянной d .

Таким образом, построив зависимость показателя Ляпунова от параметра r , мы установили, что она имеет мультифрактальную структуру. Как известно, размерность даже простейших мультифракталов не определяется однозначно. Эта проблема обсуждалась ранее в работе Мандельброта [7] и представляет собой отдельную задачу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *May R.M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature*. 261. 459. 1976.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733с.
3. *Дьюдни А.К.* Прыжок в пространство Ляпунова // *В мире науки*. 1991. №.11. С. 108-111.
4. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368с.
5. *Йорк Дж.А., Йорк Э.Д. и др.* Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. 344с.
6. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 262с.
7. *Мандельброт Б.Б.* Фракталы в физике/ Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тазатти. М.: Мир, 1988.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта учёного совета СамГТУ за 2001 г.