Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, Решения анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью в неограниченных областях, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 1(), 82–89

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:55:35

УДК 517.957

РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ
ОБЛАСТЯХ

Л. М. Кожеевникова, А. А. Леонтьев

Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал,
Россия, 453103, Стерлитамак, ул. Ленина, 47 а.

E-mails: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

Работа посвящена некоторому классу анизотропных параболических уравнений высокого порядка с двойной нелинейностью, представителем которого является модельное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u|^{k-2}u) = \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{m_\alpha-1} \frac{\partial^{m_\alpha}}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \left[\left| \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right|^{p_\alpha-2} \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right],$$

$$m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}, \quad p_n \geq \dots \geq p_1 > k, \quad k > 1.$$

*Для решений первой смешанной задачи в цилиндрической области $D = (0, \infty) \times \Omega$ с неограниченной областью $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$, с однородным краевым условием Дирихле и финитной начальной функцией установлена максимальная скорость убывания при $t \rightarrow \infty$. Ранее авторами были получены оценки сверху для анизотропных уравнений второго порядка и доказана их точность.***Ключевые слова:** анизотропное уравнение, параболическое уравнение с двойной нелинейностью, существование решения, скорость убывания решения.**Введение.** Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для анизотропного квазилинейного параболического уравнения высокого порядка рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{m_\alpha-1} \frac{\partial^{m_\alpha}}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \left[a_\alpha \left(\left(\frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right)^2 \right) \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right], \quad (t, \mathbf{x}) \in D, \quad (1)$$

где $k > 1$, $m_\alpha \in \mathbb{N}$;

$$D_{x_\alpha}^j u(t, \mathbf{x})|_S = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m_\alpha - 1, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad (2)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega). \quad (3)$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s \geq 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, подчиняются следующим условиям: $a_\alpha(0) = 0$, $a_\alpha(s) \in C^1(0, \infty)$,

$$\bar{a}_s^{(p_\alpha-2)/2} \leq a_\alpha(s) \leq \hat{a}_s^{(p_\alpha-2)/2}, \quad (4)$$

$$\frac{p_1}{2} a_\alpha(s) \leq a_\alpha(s) + a'_\alpha(s)s \leq \hat{b}_\alpha(s),$$

Лариса Михайловна Кожеевникова (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математического анализа. Алексей Александрович Леонтьев, аспирант, каф. математического анализа.

с положительными константами $\hat{a} \geq \bar{a}$, $2\hat{b} \geq p_1 > k$ ($p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$). Например, $a_\alpha(s) = s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\hat{b} = p_n/2$.

Исследованию поведения решений смешанных задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений второго и высокого порядков при $t \rightarrow \infty$ посвящены работы А. К. Гущина, В. И. Ушакова, Ф. Х. Мукминова, А. Ф. Тедеева, Л. М. Кожевниковой, Р. Х. Каримова, В. Ф. Гилимшиной и др. Обзоры соответствующих результатов можно найти в [1–3].

В настоящей работе исследуется допустимая скорость стабилизации решения задачи (1)–(3). Будем рассматривать области, расположенные вдоль выделенной оси Ox_s , $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ (область Ω лежит в полупространстве $\mathbb{R}_n^+[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid x_s > 0\}$, сечение $\gamma_r[s] = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Ниже будет использовано следующее обозначение:

$$\Omega_a^b[s] = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid a < x_s < b\},$$

при этом значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются.

Предполагается, что начальная функция имеет ограниченный носитель, так что

$$\text{supp } \varphi \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие (5), тогда найдутся положительные числа κ , $\mathcal{M}(p_s, m_s, k, \bar{a}, \hat{a})$ такие, что ограниченное решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (1)–(3) при всех $t \geq 0$, $r \geq 2R_0$ удовлетворяет оценке

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega_r)} \leq \mathcal{M} \exp \left(-\kappa \left[\frac{r^{p_s m_s}}{t} \right]^{1/(p_s m_s - 1)} \right) \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}. \quad (6)$$

На основе неравенства (6) устанавливается оценка снизу скорости убывания решения задачи (1)–(3) при $t \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено условие (5), тогда существует положительное число $C(\varphi, k, p_1, \hat{a}, \hat{b})$ такое, что ограниченное решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (1)–(3) при всех $t \geq 0$ подчиняется оценке

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} (C(\varphi)t + 1)^{-1/(p_1 - k)}.$$

Показано, что наилучшая скорость убывания решений достигается в сужающихся неограниченных областях, именно (см. замечание) для решений задачи (1)–(3) в области Ω , удовлетворяющей условию

$$\mu_1 = \inf \left\{ \left\| \frac{\partial^{m_1} g}{\partial x_1^{m_1}} \right\|_{L_{p_1}(\Omega)} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega)} = 1 \right\} > 0, \quad (7)$$

справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-1/(p_1 - k)}, \quad t > 0. \quad (8)$$

1. Вспомогательные утверждения. Пусть $\|\cdot\|_{p,Q}$ — норма в $L_p(Q)$, $p \geq 1$, причём значение $Q = \Omega$ опускается. Через $D_a^b = (a, b) \times \Omega$ обозначим цилиндр, значения $a = 0$ и $b = \infty$ могут отсутствовать.

Банахово пространство $\overset{\circ}{W}_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^n \left\| \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right\|_{p_\alpha} + \|u\|_k.$$

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, соответственно, по нормам

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)} &= \|u\|_{k,D^T} + \sum_{\alpha=1}^n \left\| \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right\|_{p_\alpha, D^T}, \\ \|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)} &= \|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)} + \|u_t\|_{k,D^T}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщённым решением задачи (1)–(3) назовём функцию $u(t, \mathbf{x})$ такую, что при всех $T > 0$ $u(t, \mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$, при $k \in (1, 2)$ $u_t(t, \mathbf{x}) \in L_k(D^T)$, а при $k \geq 2$ $|u|^{k-2}u_t \in L_{k'}(D^T)$, $k' = k/(k-1)$, и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{D^T} \left(-|u|^{k-2}uv_t + \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \left(\left(\frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right)^2 \right) \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \frac{\partial^{m_\alpha} v}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right) d\mathbf{x}dt + \\ + \int_{\Omega} |u(T, \mathbf{x})|^{k-2}u(T, \mathbf{x})v(T, \mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^{k-2}\varphi(\mathbf{x})v(0, \mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (9) \end{aligned}$$

для любой функции $v(t, \mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)$, $p_1 \geq k$, $k > 1$, тогда существует обобщённое решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (1)–(3). При этом справедливы неравенства

$$(k-1)\|u(t)\|_k^k + k\bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t \left\| \frac{\partial^{m_\alpha} u(\tau)}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} d\tau \leq (k-1)\|\varphi\|_k^k, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

$$(k-1)\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k + k\bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \left\| \frac{\partial^{m_\alpha} u(t)}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leq 0, \quad t > 0. \quad (11)$$

Решение задачи (1)–(3) строится методом галёркинских приближений, который ранее был предложен Ф. Х. Мукминовым, Э. Р. Андрияновой (см. [4]) для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью и обобщён авторами статьи на некоторый класс анизотропных уравнений (см. [5, 6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любой функции $g(x) \in L_p(\mathbb{R}_1^+)$, $D^m g(x) \in L_p(\mathbb{R}_1^+)$ справедливо неравенство

$$\|D^j g\|_{p, \mathbb{R}_1^+} \leq C \|D^m g\|_{p, \mathbb{R}_1^+}^{\frac{j}{m}} \|g\|_{p, \mathbb{R}_1^+}^{1-\frac{j}{m}}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (12)$$

где постоянная C зависит от p, m, j .

Доказательство. Для произвольной функций $h(x) \in L_p(\mathbb{R}_1)$, $D^m h \in L_p(\mathbb{R}_1)$ справедливо одномерное неравенство Ниренберга—Гальярдо [7], которое запишем в частном случае:

$$\|D^j h\|_{p, \mathbb{R}_1} \leq c_1 \|D^m h\|_{p, \mathbb{R}_1}^{\frac{j}{m}} \|h\|_{p, \mathbb{R}_1}^{1-\frac{j}{m}}, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Пусть функция $h(x)$ — продолжение функции $g(x)$ такое, что

$$\|D^j h\|_{p, \mathbb{R}_1} \leq c_2 \|D^j g\|_{p, \mathbb{R}_1^+}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Соединяя эти неравенства, получаем неравенство (12). $\square$

2. Доказательство теорем. Будем предполагать, что решение задачи (1)–(3) ограничено, а именно, справедливо неравенство

$$\operatorname{vrai} \sup_D |u(t, \mathbf{x})| \leq B < \infty. \quad (13)$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\theta(x)$, $x > 0$ — гладкая неотрицательная функция, равная единице при $x \geq 1$, нулю при $x \leq 0$. Тогда для функции $\xi(x_s) = \theta((x_s - r)/\rho)$ справедливы соотношения

$$\left| \frac{d^j \xi}{dx_s^j} \right| \leq C_1 / \rho^j, \quad x \in (r, r + \rho), \quad \frac{d^j \xi}{dx_s^j} = 0, \quad x \notin (r, r + \rho), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Для $k \in (1, 2)$ в (9) можно взять $v = u\xi$, тогда, пользуясь равенством

$$\int_{\Omega} |u|^{k-2} u u_{\tau} d\mathbf{x} = \frac{1}{k} \frac{d}{d\tau} \left(\int_{\Omega} |u|^k d\mathbf{x} \right),$$

получим тождество

$$\frac{k-1}{k} \int_{\Omega} |u|^k \xi \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} d\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^n \int_{D^t} a_{\alpha} \left(\left(\frac{\partial^{m_{\alpha}} u}{\partial x_{\alpha}^{m_{\alpha}}} \right)^2 \right) \frac{\partial^{m_{\alpha}} u}{\partial x_{\alpha}^{m_{\alpha}}} \frac{\partial^{m_{\alpha}} (u\xi)}{\partial x_{\alpha}^{m_{\alpha}}} d\mathbf{x} d\tau = 0. \quad (15)$$

Для $k \geq 2$ можно выполнить интегрирование по частям в первом интеграле тождества (9), в результате получим равенство

$$\int_{D^{\tau}} \left((|u|^{k-2} u)_{\tau} v + \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \left(\left(\frac{\partial^{m_{\alpha}} u}{\partial x_{\alpha}^{m_{\alpha}}} \right)^2 \right) \frac{\partial^{m_{\alpha}} u}{\partial x_{\alpha}^{m_{\alpha}}} \frac{\partial^{m_{\alpha}} v}{\partial x_{\alpha}^{m_{\alpha}}} \right) d\mathbf{x} d\tau = 0.$$

Положим $v = u\xi$, тогда, ввиду справедливости равенства

$$\int_{\Omega} (|u|^{k-2} u)_{\tau} u d\mathbf{x} = \frac{k-1}{k} \frac{d}{d\tau} \left(\int_{\Omega} |u|^k d\mathbf{x} \right),$$

выводим соотношение (15).

Далее, применяя (4), из (15) получаем (с учётом того, что $\xi\varphi = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{k} \int_{\Omega} |u(t, \mathbf{x})|^k \xi(x_s) d\mathbf{x} + \bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \int_{D^t} \xi \left| \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right|^{p_\alpha} d\mathbf{x} d\tau \leq \\ \leq \hat{a} \int_{D^t} \sum_{j=1}^{m_s} \left| \frac{\partial^{m_s} u}{\partial x_s^{m_s}} \right|^{p_s-1} C_{m_s}^j \left| \frac{\partial^{m_s-j} u}{\partial x_s^{m_s-j}} \right| \left| \frac{d^j \xi}{dx_s^j} \right| d\mathbf{x} d\tau \equiv I^t. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя (14), оценим интеграл

$$I^t \leq \sum_{j=1}^{m_s} \frac{C_2}{\rho^j} \int_0^t \int_{\Omega_{r+\rho}} \left| \frac{\partial^{m_s} u}{\partial x_s^{m_s}} \right|^{p_s-1} \left| \frac{\partial^{m_s-j} u}{\partial x_s^{m_s-j}} \right| d\mathbf{x} d\tau.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число такое, что $\varepsilon\rho \geq 1$. Тогда, последовательно применяя неравенства Гёльдера, неравенство (12) и Юнга, получаем соотношения

$$\begin{aligned} I^t &\leq \sum_{j=1}^{m_s} \frac{C_2}{\rho^j} \int_0^t \int_{\mathbb{R}_{n-1}} \left\| \frac{\partial^{m_s} u}{\partial x_s^{m_s}} \right\|_{p_s, (r, r+\rho)}^{p_s-1} \left\| \frac{\partial^{m_s-j} u}{\partial x_s^{m_s-j}} \right\|_{p_s, (r, r+\rho)} d\mathbf{x}'_s d\tau \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{m_s} \frac{C_3}{\rho^j \varepsilon^j} \int_0^t \int_{\mathbb{R}_{n-1}} \left\| \frac{\partial^{m_s} u}{\partial x_s^{m_s}} \right\|_{p_s, (r, \infty)}^{p_s-j/m_s} \|u\|_{p_s, (r, \infty)}^{j/m_s} \varepsilon^j d\mathbf{x}'_s d\tau \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{m_s} \frac{C_3}{\rho^j \varepsilon^j} \int_0^t \int_{\mathbb{R}_{n-1}} \left[\frac{m_s p_s - j}{m_s p_s} \left\| \frac{\partial^{m_s} u}{\partial x_s^{m_s}} \right\|_{p_s, (r, \infty)}^{p_s} + \varepsilon^{m_s p_s} \frac{j}{m_s p_s} \|u\|_{p_s, (r, \infty)}^{p_s} \right] d\mathbf{x}'_s d\tau \leq \\ &\leq \frac{C_4}{\rho \varepsilon} \int_0^t \int_{\Omega_r} \left[\left| \frac{\partial^{m_s} u}{\partial x_s^{m_s}} \right|^{p_s} + \varepsilon^{m_s p_s} |u|^{p_s} \right] d\mathbf{x} d\tau, \end{aligned}$$

из которых с учётом (13) имеем

$$I^t \leq \frac{C_4}{\rho \varepsilon} \left(\int_0^t \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial^{m_s} u}{\partial x_s^{m_s}} \right|^{p_s} d\mathbf{x} d\tau + \varepsilon^{m_s p_s} B^{p_s-k} \int_0^t \int_{\Omega_r} |u|^k d\mathbf{x} d\tau \right). \quad (17)$$

Соединяя (16), (17), выводим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{k} \|u(t)\|_{k, \Omega_{r+\rho}}^k + \bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t \left\| \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right\|_{p_\alpha, \Omega_{r+\rho}}^{p_\alpha} d\tau \leq \\ \leq \frac{C_5}{\rho \varepsilon} \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial^{m_s} u}{\partial x_s^{m_s}} \right\|_{p_s, \Omega_r}^{p_s} d\tau + \varepsilon^{m_s p_s} \int_0^t \|u\|_{k, \Omega_r}^k d\tau \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Введём обозначение

$$F_r(t) = \|u(t)\|_{k, \Omega_r}^k + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t \left\| \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right\|_{p_\alpha, \Omega_r}^{p_\alpha} d\tau,$$

тогда (18) можно переписать в виде

$$F_{r+\rho}(t) \leq \frac{C_6}{\varepsilon \rho} \left(F_r(t) + \varepsilon^{p_s m_s} \int_0^t F_r(\tau) d\tau \right). \quad (19)$$

Отметим, что если $\varepsilon \rho < 1$, то неравенство (19) также выполняется, так как в этом случае

$$F_{r+\rho}(t) \leq F_r(t) \leq \frac{1}{\varepsilon \rho} F_r \leq \frac{C_6}{\varepsilon \rho} \left(F_r(t) + \varepsilon^{p_s m_s} \int_0^t F_r(\tau) d\tau \right).$$

Таким образом, (19) доказано для произвольного $\varepsilon > 0$.

Далее индукцией по $l = 0, 1, \dots$ установим неравенство

$$F_{R_0+l\rho}(t) \leq C_7 \left(\frac{2C_6}{\rho} \right)^l t^{l/(p_s m_s)} \left\{ \prod_{i=0}^{l-1} (1 + i/(p_s m_s)) \right\}^{-1/(p_s m_s)} \|\varphi\|_k^k. \quad (20)$$

В качестве нулевого шага индукции из неравенства (10) для любого $t > 0$ имеем неравенство $F_{R_0}(t) \leq C_7 \|\varphi\|_k^k$. Предположим, что (20) справедливо для некоторого целого $l \geq 0$. Подставляя в (19)

$$\varepsilon = \left[\frac{1 + l/(p_s m_s)}{t} \right]^{1/(p_s m_s)}, \quad r = R_0 + l\rho,$$

с учётом (20) получаем

$$\begin{aligned} F_{R_0+(l+1)\rho}(t) &\leq C_7 2^l \left(\frac{C_6}{\rho} \right)^{l+1} t^{1/(p_s m_s)} \left\{ \prod_{i=0}^l (1 + i/(p_s m_s)) \right\}^{-1/(p_s m_s)} \|\varphi\|_k^k \times \\ &\times \left\{ t^{l/(p_s m_s)} + \frac{1 + l/(p_s m_s)}{t} \int_0^t \tau^{l/(p_s m_s)} d\tau \right\} = \\ &= C_7 \left(\frac{2C_6}{\rho} \right)^{l+1} t^{(l+1)/(p_s m_s)} \left\{ \prod_{i=0}^l (1 + i/(p_s m_s)) \right\}^{-1/(p_s m_s)} \|\varphi\|_k^k. \end{aligned}$$

Неравенство (20) доказано.

Положим $\rho = (r - R_0)/l$. Используя неравенство Стирлинга, из (20) нетрудно получить

$$F_r(t) \leq C_9 \exp \left(-\frac{l}{p_s m_s} \ln \frac{(r - R_0)^{p_s m_s}}{C_8 t^{p_s m_s - 1}} \right) \|\varphi\|_k^k. \quad (21)$$

Полагая l равным целой части выражения

$$\left[\frac{(r - R_0)^{p_s m_s}}{e C_8 t} \right]^{1/(p_s m_s - 1)},$$

из неравенства (21) получим

$$F_r(t) \leq C_{11} \exp \left(-C_{10} \left[\frac{(r - R_0)^{p_s m_s}}{t} \right]^{1/(p_s m_s - 1)} \right) \|\varphi\|_k^k. \quad (22)$$

В итоге при $r \geq 2R_0$ из (22) следует оценка (6). $\square$

Доказательство теоремы 2 осуществляется аналогично доказательству для случая уравнения второго порядка (подробнее см. [5, 6]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если выполнено условие (7), то для решения $u(t, \mathbf{x})$ задачи (1)–(3) справедлива оценка (8).

Доказательство. Из (11) следует, что

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_k^k \leq -\frac{\bar{a}k}{k-1} \sum_{\alpha=1}^n \left\| \frac{\partial^{m_\alpha} u(t)}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leq -\frac{\bar{a}k}{k-1} \left\| \frac{\partial^{m_1} u(t)}{\partial x_1^{m_1}} \right\|_{p_1}^{p_1} \leq -\frac{\bar{a}k}{k-1} \mu_1^{p_1} \|u\|_k^{p_1}.$$

Решая это дифференциальное неравенство, получим оценку

$$\|u(t)\|_k \leq t^{-1/(p_1-k)} \left(\frac{(p_1-k)\bar{a}}{k-1} \mu_1^{p_1} \right)^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0,$$

из которой следует неравенство (8). $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-0081-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Л. М. Кожевникова, Ф. Х. Мукминов, “Оценки скорости стабилизации при $t \rightarrow \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка” // *Матем. сб.*, 2000. Т. 191, № 2. С. 91–131; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, F. Kh. Mukminov, “Estimates of the stabilization rate as $t \rightarrow \infty$ of solutions of the first mixed problem for a quasilinear system of second-order parabolic equations” // *Sb. Math.*, 2000. Vol. 191, no. 2. Pp. 235–273.
2. Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения” // *Матем. сб.*, 2005. Т. 196, № 7. С. 67–100; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of a solution of the first mixed problem for a quasi-elliptic evolution equation” // *Sb. Math.*, 2005. Vol. 196, no. 7. Pp. 999–1032.
3. Р. Х. Каримов, Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами” // *Матем. сб.*, 2010. Т. 201, № 9. С. 3–26; англ. пер.: R. Kh. Karimov, L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of solutions of quasilinear second order parabolic equations in domains with non-compact boundaries” // *Sb. Math.*, 2010. Vol. 201, no. 9. Pp. 1249–1271.
4. Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов, “Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью” // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 3. С. 3–14. [E. R. Andriyanova, F. Kh. Mukminov, “The lower estimate of decay rate of solutions for doubly nonlinear parabolic equations” // *Ufmsk. Mat. Zh.*, 2011. Vol. 3, no. 3. Pp. 3–14].
5. Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, “Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью” // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 4. С. 64–85. [L. M. Kozhevnikova, A. A. Leontiev, “Estimates of solutions of an anisotropic doubly nonlinear parabolic equation” // *Ufmsk. Mat. Zh.*, 2011. Vol. 3, no. 4. Pp. 64–85].
6. Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, “Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях” // *Уфимск. матем. журн.*, 2013. Т. 5, № 1. С. 65–83. [L. M. Kozhevnikova, A. A. Leontiev, “Decay of solution of anisotropic doubly nonlinear parabolic equation in unbounded domains” // *Ufmsk. Mat. Zh.*, 2013. Vol. 5, no. 1. Pp. 65–83].
7. L. Nirenberg, “On elliptic partial differential equations” // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser.*, 1959. Vol. 13. Pp. 115–162.

Поступила в редакцию 15/XI/2012;
в окончательном варианте — 10/III/2013.

MSC: 35K35, 35K61

SOLUTIONS OF ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATIONS WITH DOUBLE NON-LINEARITY IN UNBOUNDED DOMAINS

L. M. Kozhevnikova, A. A. Leontiev

Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
47 a, Lenin st., Sterlitamak, 453103, Russia.

E-mails: kosul@mail.ru, alexey_leontiev@inbox.ru

This work is devoted to some class of parabolic equations of high order with double nonlinearity which can be represented by a model equation

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{k-2}u) = \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{m_\alpha-1} \frac{\partial^{m_\alpha}}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \left[\left| \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right|^{p_\alpha-2} \frac{\partial^{m_\alpha} u}{\partial x_\alpha^{m_\alpha}} \right],$$
$$m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}, \quad p_n \geq \dots \geq p_1 > k, \quad k > 1.$$

For the solution of the first mixed problem in a cylindrical domain $D = (0, \infty) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$, with homogeneous Dirichlet boundary condition and finite initial function the highest rate of decay established as $t \rightarrow \infty$. Earlier upper estimates were obtained by the authors for anisotropic equation of the second order and prove their accuracy.

Key words: *anisotropic equation, doubly nonlinear parabolic equations, existence of strong solution, decay rate of solution.*

Original article submitted 15/XI/2012;
revision submitted 10/III/2013.