Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Б. Сабитов, Г. Ю. Удалова, Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с условиями периодичности, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 3(), 29–45

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:54:00

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ

К. Б. Сабитов¹, Г. Ю. Удалова²¹ Институт прикладных исследований,
453103, Россия, Стерлитамак, ул. Одесская, 68.² Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mails: sabitov_fmfm@mail.ru, yeyeg@yandex.ru

Исследуется задача с двумя нелокальными граничными условиями для уравнения смешанного типа третьего порядка, сводящаяся к обратной задаче для уравнения эллиптико-гиперболического типа с неизвестными правыми частями. Установлен критерий единственности. Решение построено в явном виде как суммы ортогональных рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Дано обоснование сходимости рядов в соответствующих классах функций при определённых ограничениях на данные задачи. Доказана устойчивость решения по граничным данным.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа третьего порядков, прямая и обратная задачи, спектральный метод, единственность, существование, устойчивость.

Введение. Рассмотрим уравнение третьего порядка смешанного типа

$$\frac{\partial}{\partial y} (Lu) = \frac{\partial}{\partial y} (u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - b^2 u) = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β, b — заданные положительные постоянные, и следующую задачу.

ЗАДАЧА 1. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}), u_y(x, y) \in C^1(D), u_{xx}, u_{yy} \in C(D_- \cup D_+); \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (Lu) = 0, \quad (x, y) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (3)$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (4)$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

где $\psi(x), \varphi(x), g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\psi(0) = \psi(1)$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$.

Уравнение (1) в области D равносильно уравнению эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестной правой частью

$$Lu = f(x, y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда задача 1 сводится к следующей обратной задаче.

ЗАДАЧА 2. Найти в области D функции $u(x, y)$ и $f(x, y)$, удовлетворяющие условиям (2), (3)–(5) и

$$Lu = f(x, y), \quad (x, y) \in D_- \cup D_+; \quad (7)$$

$$f_i(x) \in C(0, 1) \cap L_2[0, 1], \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка изучались многими авторами (см. работы [1–3] и приведенную там библиографию). В [1, 2] исследуются краевые задачи для уравнения (1) при $b = 0$ аналитическими методами в области, где гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник. Решение найдено в классе функций, представимых в виде $u(x, y) = \omega(x, y) + \omega(x)$, где $\omega(x, y)$ — произвольное регулярное решение уравнения $Lu = 0$ при $b = 0$, $y \neq 0$, $\omega(x)$ — произвольная функция из класса $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, удовлетворяющая условиям $\omega(0) = \omega(1) = 0$. В [3] получены теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных нечётного порядка в цилиндрических областях. В работах [4, 5] доказаны единственность и существование решения краевых задач для уравнений парабола-гиперболического типа третьего порядка в прямоугольной области.

В данной работе, как и в работах [4, 5], предлагается метод решения задачи для дифференциального уравнения третьего порядка путём сведения к обратной задаче для дифференциального уравнения смешанного типа второго порядка с неизвестными правыми частями. Ранее обратные задачи для различных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались многими авторами [6–13]. Обратные задачи для уравнений смешанного типа второго порядка с неизвестными правыми частями рассматривались в работах [14–20]. В работах [18–20] для уравнения (6) при $f_1(x) = f_2(x)$ и $f_1(x) \neq f_2(x)$ изучены обратные задачи с граничными условиями второго рода $u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0$, $-\alpha \leq y \leq \beta$, когда $b = 0$ и $b > 0$.

В этой работе изучены задачи 1 и 2 с условиями периодичности (3). Установлен критерий единственности. Решение указанных задач построено в виде суммы рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При определенных ограничениях на данные задачи (2)–(5) дано обоснование сходимости рядов в классах (2) и (8). Установлена устойчивость решения по граничным данным.

1. Формальное построение решения задач 1 и 2. Поставленную задачу будем решать методом разделения переменных $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Соответствующая спектральная задача относительно $X(x)$ имеет следующую систему собственных чисел и собственных функций: $\sqrt{\mu_k} = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$$X_0(x) = 1, \quad X_{2k-1}(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi kx, \quad X_{2k} = \sqrt{2} \cos 2\pi kx, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Система (9) ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2[0, 1]$.

Пусть существует решение задачи 2. Будем искать его в виде суммы ортогональных рядов:

$$u(x, y) = u_0(y) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k-1}(y) \sin 2\pi kx + u_{2k}(y) \cos 2\pi kx), \quad (10)$$

$$f_i(x) = f_{i,0} + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (f_{i,2k-1} \sin 2\pi kx + f_{i,2k} \cos 2\pi kx), \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} u_0(y) &= \int_0^1 u(x, y) dx, \quad u_{2k-1}(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \sin 2\pi kx dx, \\ u_{2k}(y) &= \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \cos 2\pi kx dx, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} f_{i,0} &= \int_0^1 f_i(x) dx, \quad f_{i,2k-1} = \sqrt{2} \int_0^1 f_i(x) \sin 2\pi kx dx, \\ f_{i,2k} &= \sqrt{2} \int_0^1 f_i(x) \cos 2\pi kx dx, \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (13)$$

Следуя [18], получим, что функции $u_k(y)$, $k \in \mathbb{N}_0$, являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_k''(y) - (\operatorname{sgn} y) \lambda_k^2 u_k(y) = (\operatorname{sgn} y) f_{i,k}, \quad (14)$$

где $\lambda_k^2 = \sqrt{(2\pi k)^2 + b^2}$, $i = 1$ при $y > 0$, $i = 2$ при $y < 0$.

Дифференциальные уравнения (14) имеют общие решения

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - f_{1,k}/\lambda_k^2, & y > 0, \\ c_k \cos \lambda_k y + d_k \sin \lambda_k y - f_{2,k}/\lambda_k^2, & y < 0, \end{cases} \quad (15)$$

здесь $k \in \mathbb{N}_0$, a_k , b_k , c_k , d_k — произвольные постоянные.

В силу условий (2) функции $u_k(y)$, определяемые формулами (15), удовлетворяют условиям сопряжения:

$$u_k(0-0) = u_k(0+0), \quad u_k'(0-0) = u_k'(0+0), \quad u_k''(0-0) = u_k''(0+0), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Удовлетворяя их этим условиям, получим

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + \left(\frac{f_{1,k} - f_{2,k}}{2\lambda_k^2} - a_k \right) e^{-\lambda_k y} - \frac{f_{1,k}}{\lambda_k^2}, & y > 0, \\ \frac{f_{2,k} - f_{1,k}}{2\lambda_k^2} \cos \lambda_k y + \left(2a_k + \frac{f_{2,k} - f_{1,k}}{2\lambda_k^2} \right) \sin \lambda_k y - \frac{f_{2,k}}{\lambda_k^2}, & y < 0. \end{cases} \quad (16)$$

На основании (4), (5) и (12) имеем

$$u_k(-\alpha) = \psi_k, \quad u_k(\beta) = \varphi_k, \quad u_k'(-\alpha) = g_k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (17)$$

где ψ_k , φ_k , g_k — коэффициенты разложения функций $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ соответственно в ряд по системе (9), т. е.

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \int_0^1 \psi(x) dx, \quad \psi_{2k-1} = \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \sin 2\pi kx dx, \\ \psi_{2k} &= \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \cos 2\pi kx dx, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \int_0^1 \varphi(x) dx, & \varphi_{2k-1} &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin 2\pi kx dx, \\ \varphi_{2k} &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \cos 2\pi kx dx,\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}g_0 &= \int_0^1 g(x) dx, & g_{2k-1} &= \sqrt{2} \int_0^1 g(x) \sin 2\pi kx dx, \\ g_{2k} &= \sqrt{2} \int_0^1 g(x) \cos 2\pi kx dx.\end{aligned}\tag{20}$$

Удовлетворим решения (16) условиям (17). Тогда относительно неизвестных $a_k, b_k, f_{1,k}, f_{2,k}$ получим системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2} \cos \lambda_k \alpha - \left(2a_k + \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\right) \sin \lambda_k \alpha - \frac{f_{2,k}}{\lambda_k^2} = \psi_k, \\ a_k e^{\lambda_k \beta} + \left(-a_k - \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\right) e^{-\lambda_k \beta} - \frac{f_{1,k}}{\lambda_k^2} = \varphi_k, \\ \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2} \sin \lambda_k \alpha + \left(2a_k + \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\right) \cos \lambda_k \alpha = \frac{g_k}{\lambda_k}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0.\tag{21}$$

Определители систем (21) такие:

$$\frac{\Delta_{\alpha\beta b}(k)}{\lambda_k^4} = \frac{\sin \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta + \cos \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta - 2 \cos \lambda_k \alpha + 1}{\lambda_k^4}.$$

Тогда при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0,\tag{22}$$

системы (21) имеют единственные решения:

$$a_k = \frac{-(\sin \lambda_k \alpha + \cos \lambda_k \alpha) \psi_k + \varphi_k + (\cos \lambda_k \alpha - \sin \lambda_k \alpha - 2) g_k / \lambda_k}{2 \Delta_{\alpha\beta b}(k)},\tag{23}$$

$$\begin{aligned}f_{1,k} &= \frac{-\lambda_k^2 [(\sin \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta + \cos \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta) \psi_k + (2 \cos \lambda_k \alpha - 1) \varphi_k]}{\Delta_{\alpha\beta b}(k)} - \\ &\quad - \frac{\lambda_k (\sin \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta - \cos \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta + 2 \operatorname{sh} \lambda_k \beta) g_k}{\Delta_{\alpha\beta b}(k)},\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}f_{2,k} &= \frac{\lambda_k^2 [(2 \cos \lambda_k \alpha - \sin \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta - \cos \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta) \psi_k - \varphi_k]}{\Delta_{\alpha\beta b}(k)} + \\ &\quad + \frac{\lambda_k (2 \sin \lambda_k \alpha - \sin \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta + \cos \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta) g_k}{\Delta_{\alpha\beta b}(k)}.\end{aligned}\tag{25}$$

Таким образом, функции (16) построены однозначно.

2. Единственность решения задач 1 и 2. Пусть $\psi(x) = \varphi(x) = g(x) \equiv 0$ и выполнены условия (22). Тогда в силу (18)–(20) коэффициенты $\psi_k = \varphi_k = g_k \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, а значит, системы (21) имеют нулевые решения: $a_k = f_{1,k} = f_{2,k} \equiv 0$ при $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда из равенств (12) и (13), учитывая (16), получаем, что при всех $y \in [-\alpha, \beta]$

$$\int_0^1 u(x, y) dx = 0, \quad \int_0^1 u(x, y) \sin 2\pi kx dx = 0, \quad \int_0^1 u(x, y) \cos 2\pi kx dx = 0, \\ \int_0^1 f_i(x) dx = 0, \quad \int_0^1 f_i(x) \sin 2\pi kx dx = 0, \quad \int_0^1 f_i(x) \cos 2\pi kx dx = 0, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда в силу полноты системы (9) в пространстве $L_2[0, 1]$ и условий (2), (8) следует, что $u(x, y) \equiv 0$ и $f(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$.

Пусть для некоторых $\alpha, \beta, b, k = p \in \mathbb{N}$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(p) = 0$, тогда задачи 1 и 2, где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$, имеют ненулевые решения:

$$u_p(x, y) = u_0(y) + u_p(y)(A_p \sin 2\pi px + B_p \cos 2\pi px), \quad f_i(x) = f_{i,p}, \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

$$u_p(y) = \begin{cases} \left(\frac{\bar{\Delta}_{\alpha y b}(p)}{\bar{\Delta}_{\alpha\beta b}(p)} - 1 \right) \frac{f_{2,p}}{\lambda_p^2}, & y > 0, \\ \left(\frac{\cos \lambda_p(y+\alpha)}{\bar{\Delta}_{\alpha\beta b}(p)\lambda_p^2} - 1 \right) \frac{f_{2,p}}{\lambda_p^2}, & y < 0, \end{cases} \quad p \in \mathbb{N}_0, \\ f_{1,p} = \left(1 - \frac{2 \cos \lambda_p \alpha}{\bar{\Delta}_{\alpha\beta b}(p)} \right) f_{2,p},$$

$$\bar{\Delta}_{\alpha\beta b}(p) = 2 \cos \lambda_p \alpha - \sin \lambda_p \alpha \operatorname{sh} \lambda_p \beta - \cos \lambda_p \alpha \operatorname{ch} \lambda_p \beta,$$

где $A_p, B_p, f_{2,p}$ — произвольные постоянные.

Теперь рассмотрим вопрос, при каких α, β и b выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$. Представим $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k) = \sqrt{2(\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 1)^2 + 1} \sin(\lambda_k \alpha + \theta_k) + 1, \quad (27)$$

где

$$\theta_k = \arcsin \frac{\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 2}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 1)^2 + 1}} \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad k \rightarrow +\infty.$$

Решая уравнение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ относительно α , получаем серию корней

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_k} \left((-1)^{n+1} \gamma_k - \theta_k + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (28)$$

где $\gamma_k = \arcsin \left(2(\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 1)^2 + 1 \right)^{-1/2}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Если существует решение задач 1 и 2, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия (22) при всех $k \in \mathbb{N}_0$.

3. Обоснование существования решения задач 1 и 2. Решение задач 1 и 2 при условии (22) построено формально в виде сумм ортогональных рядов (10), (11). Поскольку в числители коэффициентов этих рядов входит экспонента $\exp(\lambda_k \beta)$, а в знаменатель — выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$, для обоснования существования решения задачи необходимо существование таких чисел α , чтобы $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ при достаточно больших k возрастало не медленнее, чем $\exp(\lambda_k \beta)$. При этом в силу (28) возникает проблема малых знаменателей [4, 22].

3.1. Оценка малых знаменателей.

ЛЕММА 1. *Если $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$, β, b — любые фиксированные положительные числа, то существуют положительные постоянные k_0 ($k_0 \in \mathbb{N}$) и C_0 , вообще говоря, зависящие от α, β и b , такие, что при любом $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k)| > C_0 e^{2\pi k \beta}. \quad (29)$$

Доказательство. Представим выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta b}(k) &= (\sin \lambda_k \alpha + \cos \lambda_k \alpha) \operatorname{sh} \lambda_k \beta + \cos \lambda_k \alpha e^{-\lambda_k \beta} + 1 - 2 \cos \lambda_k \alpha = \\ &= \sqrt{2} \operatorname{sh} \lambda_k \beta \sin \left(\lambda_k \alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \lambda_k \alpha \left(e^{-\lambda_k \beta} - 2 \right) + 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Из выражения (30) при $b = 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| &= \left| \sqrt{2} \operatorname{sh} 2\pi k \beta \sin \left(2\pi k \alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 2\pi k \alpha \left(e^{-2\pi k \beta} - 2 \right) + 1 \right| \geq \\ &\geq \sqrt{2} \operatorname{sh} 2\pi k \beta \left| \sin \left(2\pi k \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \left| \cos 2\pi k \alpha \left(e^{-2\pi k \beta} - 2 \right) + 1 \right| \geq \\ &\geq \sqrt{2} \operatorname{sh} 2\pi k \beta \left| \sin \left(2\pi k \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \left| \cos 2\pi k \alpha \left(e^{-2\pi k \beta} - 2 \right) \right| - 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Оценим первое слагаемое из правой части неравенства (31):

$$\sqrt{2} \operatorname{sh} 2\pi k \beta \left| \sin \left(2\pi k \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| \geq C_1 e^{2\pi k \beta} \left| \sin \left(2\pi k \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \quad (32)$$

Здесь и в дальнейшем C_i — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, β и b .

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \sin \left(2\pi k n + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и тогда из (32) имеем

$$\sqrt{2} \operatorname{sh} 2\pi k \beta \left| \sin \left(2\pi k \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| > \frac{C_1}{\sqrt{2}} e^{2\pi k \beta}.$$

Пусть теперь $\alpha = p/q$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$. Разделив в этом случае $2kp$ на q с остатком ($2kp = sq + r$, $0 \leq r < q$), получим

$$\left| \sin \left(\frac{2\pi kp}{q} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \left| \sin \left(\frac{\pi r}{q} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = C_2 > 0. \quad (33)$$

Из оценок (31), (32) и (33) имеем

$$|\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| > C_3 e^{2\pi k\beta} - \left| \left(e^{-2\pi k\beta} - 2 \right) \cos 2\pi k\alpha \right| - 1 > \\ > e^{2\pi k\beta} \left(C_3 - 3e^{-2\pi k\beta} \right) > \frac{C_3}{2} e^{2\pi k\beta} \quad (34)$$

при $k > k_1 = (2\pi\beta)^{-1} \ln(6/C_3)$. Здесь $C_3 = \min\{C_1/\sqrt{2}, C_1 \cdot C_2\}$.

Теперь рассмотрим разность

$$\begin{aligned} |\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| &= \left| \frac{e^{\lambda_k\beta} - e^{2\pi k\beta}}{2} (\sin \lambda_k\alpha + \cos \lambda_k\alpha) - \right. \\ &- \frac{1}{2} e^{2\pi k\beta} (-\sin \lambda_k\alpha - \cos \lambda_k\alpha + \sin 2\pi k\alpha + \cos 2\pi k\alpha) + \frac{1}{2} e^{-\lambda_k\beta} (\cos \lambda_k\alpha - \sin \lambda_k\alpha) - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} e^{-2\pi k\beta} (\cos 2\pi k\alpha - \sin 2\pi k\alpha) + 2(\cos 2\pi k\alpha - \cos \lambda_k\alpha) \right| \leq \\ &\leq \frac{e^{\lambda_k\beta} - e^{2\pi k\beta}}{2} |\sin \lambda_k\alpha + \cos \lambda_k\alpha| + \frac{1}{2} e^{2\pi k\beta} (|\sin \lambda_k\alpha - \sin 2\pi k\alpha| + \\ &\quad + |\cos \lambda_k\alpha - \cos 2\pi k\alpha|) + \frac{1}{2} e^{-\lambda_k\beta} |\cos \lambda_k\alpha - \sin \lambda_k\alpha| + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-2\pi k\beta} |\cos 2\pi k\alpha - \sin 2\pi k\alpha| + 2|\cos 2\pi k\alpha - \cos \lambda_k\alpha| \leq \\ &\leq e^{2\pi k\beta} \left(\frac{e^{(\lambda_k - 2\pi k)\beta} - 1}{2} \sqrt{2} + \left| \sin \frac{(\lambda_k - 2\pi k)\alpha}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{(\lambda_k + 2\pi k)\alpha}{2} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \sin \frac{(\lambda_k - 2\pi k)\alpha}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(\lambda_k + 2\pi k)\alpha}{2} \right| \right) + \sqrt{2} e^{-2\pi k\beta} + 4 \left| \sin \frac{(2\pi k - \lambda_k)\alpha}{2} \right|. \end{aligned}$$

Учитывая неравенства

$$0 \leq e^x - 1 \leq 2x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad |\sin x| \leq |x|,$$

получим

$$\begin{aligned} |\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| &\leq e^{2\pi k\beta} \left[\sqrt{2}(\lambda_k - 2\pi k)\beta + (\lambda_k - 2\pi k)\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}e^{-4\pi k\beta} + 2e^{-2\pi k\beta} |\lambda_k - 2\pi k|\alpha \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу оценки $0 < \lambda_k - 2\pi k < b^2/(2\pi k)$ при любых $k \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$\begin{aligned} |\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| &\leq \frac{e^{2\pi k\beta}}{2\pi k} \left(\sqrt{2}b^2\beta + b^2\alpha + 2\sqrt{2}\pi k e^{-4\pi k\beta} + 2\alpha b^2 e^{-2\pi k\beta} \right) \leq \\ &\leq \frac{e^{2\pi k\beta}}{2\pi k} \left[\sqrt{2}b^2\beta + b^2\alpha + 2\pi k e^{-4\pi k\beta} + 2\alpha b^2 \right] < \\ &< \frac{e^{2\pi k\beta}}{2\pi k} \left[\sqrt{2}b^2\beta + 3\alpha b^2 + \frac{1}{2\beta} \right] = \frac{C_4 e^{2\pi k\beta}}{k}. \end{aligned}$$

Из последней оценки и неравенства (34) будем иметь

$$\begin{aligned} |\Delta_{\alpha\beta b}(k)| &= |\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k) + \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| \geq \\ &\geq |\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| - |\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| > \frac{C_3}{2} e^{2\pi k\beta} - \frac{C_4 e^{2\pi k\beta}}{k} = \\ &= e^{2\pi k\beta} \left(\frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{k} \right) = C_0 e^{2\pi k\beta} \end{aligned}$$

при $k > k_0 \geq \max\{k_1, k_2\}$, где $k_2 = 2C_4/C_3$, $C_0 = C_3/4$. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > 0$ является любым иррациональным алгебраическим числом степени $n = 2$. Тогда существуют положительные постоянные β_0 , b_0 и C_0 , вообще говоря, зависящие от α , такие, что при всех $\beta > \beta_0$, $b < b_0$ и $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| \geq e^{\lambda_k \beta} \frac{C_0}{k}. \quad (35)$$

Доказательство. Первый множитель выражения (27) имеет оценку

$$\begin{aligned} \sqrt{2(\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 1)^2 + 1} &\geq \frac{1}{2} \left[\sqrt{2}(\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 1) + 1 \right] = \\ &= \frac{e^{\lambda_k \beta}}{2\sqrt{2}} \left[1 + \sqrt{2}e^{-2\lambda_k \beta} - (2 - \sqrt{2})e^{-\lambda_k \beta} \right] > \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} e^{\lambda_k \beta}. \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим теперь второй множитель выражения (27). При $b < 2\pi$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sqrt{(2\pi k)^2 + b^2} = 2\pi k \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2\pi k} \right)^2} = \\ &= 2\pi k \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\pi k} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{b}{2\pi k} \right)^4 + \dots \right] = 2\pi k + \sigma_k, \end{aligned}$$

При этом для σ_k справедлива оценка [15]

$$\frac{b^2}{2\pi k} < \sigma_k < \frac{b^2}{4\pi k}. \quad (37)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} |\sin(\lambda_k \alpha + \theta_k)| &= |\sin(2\pi k \alpha + \sigma_k \alpha + \theta_k)| = \\ &= |\sin(\pi k \alpha_1 + \tilde{\sigma}_k + \theta_k)| = |\sin(\pi k \alpha_1 - \pi n + \tilde{\sigma}_k + \theta_k)|, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\tilde{\sigma}_k = \sigma_k \alpha$, $\alpha_1 = 2\alpha$. Для $\tilde{\sigma}_k$ с учётом (37) имеем оценку

$$\frac{b^2 \alpha}{8\pi k} < \tilde{\sigma}_k < \frac{b^2 \alpha}{4\pi k}. \quad (39)$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что имеет место неравенство [14]

$$\left| \alpha_1 - \frac{n}{k} \right| < \frac{1}{2k}, \quad (40)$$

с другой стороны, по теореме Лиувилля [21, с. 60] известно, что для любого алгебраического числа степени $n = 2$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при любых целых p и q ($q > 0$) справедлива оценка

$$\left| \alpha_1 - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\delta}{q^2}. \quad (41)$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ такое, что выполняется неравенство (40). Тогда, учитывая оценку (41), имеем

$$\frac{\pi\delta}{k} \leq \pi k \left| \alpha_1 - \frac{m}{k} \right| < \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая, что $\theta_k \rightarrow \pi/4$ при $k \rightarrow \infty$, в силу возрастания функций

$$y = \arcsin u \quad \text{и} \quad u = \frac{\operatorname{ch} x - 2}{\sqrt{2(\operatorname{ch} x - 1)^2 + 1}}$$

имеем

$$\theta_1 \leq \theta_k < \frac{\pi}{4}. \quad (42)$$

Тогда при всех $b < b_1 = \pi/\sqrt{2\alpha}$ выполнено $\tilde{\sigma}_k < \pi/8$, а следовательно, с учётом (42),

$$\tilde{\sigma}_k + \theta_k < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

Возможны два случая:

- 1) $\pi/2 < |\pi k \alpha_1 - \pi n + \tilde{\sigma}_k + \theta_k| < 7\pi/8$,
- 2) $0 < |\pi k \alpha_1 - \pi n + \tilde{\sigma}_k + \theta_k| < \pi/2$.

В первом случае

$$|\sin(\pi k \alpha_1 - \pi n + \tilde{\sigma}_k + \theta_k)| > \sin \frac{7\pi}{8}. \quad (43)$$

Во втором случае, учитывая неравенство

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

получим

$$\begin{aligned} |\sin(\pi k \alpha_1 - \pi n + \tilde{\sigma}_k + \theta_k)| &> \frac{2}{\pi} |\pi k \alpha_1 - \pi n + \tilde{\sigma}_k + \theta_k| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \pi k \left(\alpha_1 - \frac{4n-1}{4k} \right) + \tilde{\sigma}_k - \varepsilon_k \right| \geq \\ &\geq \frac{2}{\pi} \left(\pi k \left| \alpha_1 - \frac{4n-1}{4k} \right| - |\tilde{\sigma}_k| - |\varepsilon_k| \right), \end{aligned} \quad (44)$$

где $\varepsilon_k = \pi/4 - \theta_k > 0$.

Применяя формулу разности арксинусов

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), \quad xy > 0,$$

и учитывая неравенство $\arcsin x < \pi x/2$, $0 < x < 1$, а также оценки (36), при

$$\beta > \beta_1 = \frac{\ln \frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{b^2 + (2\pi)^2}}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \theta_k - \frac{\pi}{4} \right| &= \left| \arcsin \frac{\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 2}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 1)^2 + 1}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \\ &= \arcsin \frac{2 - e^{-\lambda_k \beta}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2(\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 1)^2 + 1}} \leq \\ &\leq \frac{\pi (2 - e^{-\lambda_k \beta})}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2(\operatorname{ch} \lambda_k \beta - 1)^2 + 1}} \leq \frac{2\pi}{(\sqrt{2} - 1)e^{\lambda_k \beta}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Из неравенства (45) следует, что

$$0 < \varepsilon_k < \frac{2\pi}{(\sqrt{2} - 1)e^{\lambda_k \beta}} < \frac{2\pi}{(\sqrt{2} - 1)\lambda_k \beta} \leq \frac{2\pi}{(\sqrt{2} - 1)2\pi k \beta} = \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)\beta k}. \quad (46)$$

Тогда из (44) с учётом (39) и (46) получим

$$|\sin(\pi k \alpha_1 - \pi n + \tilde{\sigma}_k + \theta_k)| > \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi \delta}{4k} - \frac{b^2 \alpha}{4\pi k} - \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)\beta k} \right) > \frac{C_9}{k} \quad (47)$$

при

$$b < b_2 = \pi \sqrt{\frac{1}{\alpha} \left(\delta - \frac{4}{\pi \beta (\sqrt{2} - 1)} \right)}, \quad \beta > \beta_2 = \frac{4}{\pi \delta (\sqrt{2} - 1)}.$$

Из выражений (36), (43) и (47) следует справедливость леммы при $\beta > \beta_0 = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ и $b < b_0 = \min\{2\pi, b_1, b_2\}$. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha > 0$ является любым иррациональным алгебраическим числом степени $n = 2$. Тогда существует $k_0 \in \mathbb{N}$, зависящее, вообще говоря, от α , β и b , такое, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка (35).

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 с той разницей, что необходимые ограничения для выполнения неравенств накладываются не на параметры β и b , а на номер k_0 .

3.2. Существование решения задач 1 и 2 при выполнении условий леммы 1. Для доказательства существования решения задач 1 и 2 из ряда (10) формально почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{xx}(x, y) = -\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 (u_{2k-1}(y) \sin 2\pi k x + u_{2k}(y) \cos 2\pi k x), \quad (48)$$

$$u_{yy}(x, y) = u_0''(y) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k-1}''(y) \sin 2\pi kx + u_{2k}''(y) \cos 2\pi kx), \quad (49)$$

$$u_{xy}(x, y) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 (-u_{2k-1}'(y) \cos 2\pi kx + u_{2k}'(y) \sin 2\pi kx), \quad (50)$$

$$u_{yyy}(x, y) = u_0'''(y) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k-1}'''(y) \sin 2\pi kx + u_{2k}'''(y) \cos 2\pi kx). \quad (51)$$

ЛЕММА 4. Пусть выполнено неравенство (29) при $k > k_0$. Тогда при таких k для любых $y \in [-\alpha, \beta]$ справедливы оценки

$$|u_k(y)| \leq C_4 (|\psi_k| + |\varphi_k| + |g_k|/k), \quad (52)$$

$$|u_k''(y)| \leq C_5 k (k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|), \quad (53)$$

$$|u_k'''(y)| \leq C_6 k^2 (k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|), \quad (54)$$

$$|f_{1,k}| \leq C_7 k (k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|), \quad (55)$$

$$|f_{2,k}| \leq C_8 k (k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|). \quad (56)$$

Доказательство. На основании формул (16) найдём

$$\begin{aligned} |u_k(y)| &\leq e^{2\pi k\beta} e^b |a_k| + \frac{3|f_{1,k}|}{2\lambda_k^2} + \frac{2|f_{2,k}|}{\lambda_k^2} \leq e^b \cdot e^{2\pi k\beta} |a_k| + \\ &+ \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{|f_{1,k}|}{k^2} + \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{|f_{2,k}|}{k^2} \leq C_9 \left(e^{2\pi k\beta} |a_k| + \frac{|f_{1,k}|}{k^2} + \frac{|f_{2,k}|}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

На основании формул (16) вычислим

$$u_k''(y) = \begin{cases} \lambda_k^2 a_k e^{\lambda_k y} + \frac{1}{2} (-2a_k \lambda_k^2 - f_{2,k} + f_{1,k}) e^{-\lambda_k y}, & y > 0, \\ \frac{1}{2} (f_{1,k} - f_{2,k}) \cos \lambda_k y - \frac{1}{2} (4a_k \lambda_k^2 + f_{2,k} - f_{1,k}) \sin \lambda_k y, & y < 0, \end{cases} \quad (58)$$

$$u_k'''(y) = \begin{cases} \lambda_k [\lambda_k^2 a_k e^{\lambda_k y} + \frac{1}{2} (2a_k \lambda_k^2 + f_{2,k} - f_{1,k}) e^{-\lambda_k y}], & y > 0, \\ \lambda_k [\frac{1}{2} (f_{2,k} - f_{1,k}) \sin \lambda_k y - \\ - \frac{1}{2} (4\lambda_k^2 a_k + f_{2,k} - f_{1,k}) \cos \lambda_k y], & y < 0. \end{cases} \quad (59)$$

Аналогично, исходя из равенств (58) и (59), получим

$$|u_k''(y)| \leq C_{10} \left(k^2 e^{2\pi k\beta} |a_k| + |f_{1,k}| + |f_{2,k}| \right), \quad (60)$$

$$|u_k'''(y)| \leq C_{11} k \left(k^2 e^{2\pi k\beta} |a_k| + |f_{1,k}| + |f_{2,k}| \right). \quad (61)$$

Далее на основании равенств (23)–(25) в силу оценки (29) найдём

$$|a_k| \leq \frac{\sqrt{2}|\psi_k| + |\varphi_k| + (\sqrt{2} + 2)|g_k|/\lambda_k}{2C_0 e^{2\pi k\beta}} \leq \frac{C_{12}}{e^{2\pi k\beta}} \left(|\psi_k| + |\varphi_k| + \frac{|g_k|}{k} \right), \quad (62)$$

$$|f_{1,k}| \leq C_{13}k \left(k|\psi_k| + k \frac{|\varphi_k|}{e^{2\pi k\beta}} + |g_k| \right), \quad (63)$$

$$|f_{2,k}| \leq C_{14}k \left(k|\psi_k| + k \frac{|\varphi_k|}{e^{2\pi k\beta}} + |g_k| \right). \quad (64)$$

Тогда из соотношений (62)–(64) и (57)–(61) получим непосредственно оценки (52)–(56). $\square$

В силу (52), (53), (55), (56) ряды (10), (11), (48), (49) мажорируются рядом

$$C_{15} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|), \quad (65)$$

а ряды (50) и (51) — рядом

$$C_{16} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^2(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|). \quad (66)$$

ЛЕММА 5. Пусть $\psi(x), \varphi(x) \in C^3[0, 1]$, $g(x) \in C^2[0, 1]$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $g(0) = g(1)$, $g'(0) = g'(1)$. Тогда справедливы представления

$$\begin{aligned} \psi_{2k-1} &= -\frac{\psi_{2k}^{(3)}}{(2\pi k)^3}, & \psi_{2k} &= -\frac{\psi_{2k-1}^{(3)}}{(2\pi k)^3}, & \varphi_{2k-1} &= -\frac{\varphi_{2k}^{(3)}}{(2\pi k)^3}, \\ \varphi_{2k} &= -\frac{\varphi_{2k-1}^{(3)}}{(2\pi k)^3}, & g_{2k-1} &= -\frac{g_{2k-1}^{(2)}}{(2\pi k)^2}, & g_{2k} &= \frac{g_{2k}^{(2)}}{(2\pi k)^2}, \end{aligned} \quad (67)$$

где $\psi_k^{(3)}, \varphi_k^{(3)}, g_k^{(2)}$ ($k \in \mathbb{N}$) — коэффициенты разложения в ряд по системе (9) функций $\psi^{(3)}(x), \varphi^{(3)}(x), g^{(2)}(x)$, для которых справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}|^2 &\leq \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2[0,1]}^2, & \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2 &\leq \|\varphi^{(3)}(x)\|_{L_2[0,1]}^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(2)}|^2 &\leq \|g^{(2)}(x)\|_{L_2[0,1]}^2. \end{aligned} \quad (68)$$

Доказательство. Интегрируя вторые и третьи интегралы равенств (18), (19) по частям три раза, а равенства (20) — два раза, получим непосредственно выражения (67). Поскольку система функций (9) ортонормирована в пространстве $L_2[0, 1]$, справедливость оценок (68) следует из неравенства Бесселя по этой системе. $\square$

ЛЕММА 6. Пусть $\psi(x), \varphi(x) \in C^4[0, 1]$, $g(x) \in C^3[0, 1]$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $g(0) = g(1)$, $g'(0) = g'(1)$, $g''(0) = g''(1)$. Тогда справедливы представления

$$\begin{aligned} \psi_{2k-1} &= \frac{\psi_{2k-1}^{(4)}}{(2\pi k)^4}, & \psi_{2k} &= \frac{\psi_{2k}^{(4)}}{(2\pi k)^4}, & \varphi_{2k-1} &= \frac{\varphi_{2k}^{(4)}}{(2\pi k)^4}, \\ \varphi_{2k} &= \frac{\varphi_{2k}^{(4)}}{(2\pi k)^4}, & g_{2k-1} &= -\frac{g_{2k-1}^{(3)}}{(2\pi k)^3}, & g_{2k} &= -\frac{g_{2k}^{(3)}}{(2\pi k)^3}, \end{aligned}$$

где $\psi_k^{(4)}, \varphi_k^{(4)}, g_k^{(3)}$ ($k \in \mathbb{N}$) — коэффициенты разложения в ряд по системе (9) функций $\psi^{(4)}(x), \varphi^{(4)}(x), g^{(3)}(x)$, для которых справедливы следующие оценки:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 \leq 16 \|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2[0,1]}^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(4)}|^2 \leq 16 \|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2[0,1]}^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(3)}|^2 \leq 16 \|g^{(3)}(x)\|_{L_2[0,1]}^2.$$

Доказательство леммы 6 проводится аналогично доказательству леммы 5.

При выполнении условий леммы 5 ряд (65), а значит и ряды (10), (11), (48), (49), мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_{23} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} (|\psi_k^{(3)}| + |\varphi_k^{(3)}| + |g_k^{(2)}|).$$

При выполнении условий леммы 6 ряд (66), а значит и ряды (50), (51), мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_{24} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} (|\psi_k^{(4)}| + |\varphi_k^{(4)}| + |g_k^{(4)}|).$$

Тогда, по признаку Вейерштрасса, при выполнении условий леммы 5 ряд (10) сходится равномерно в области $\bar{D}$, ряд (11) — на отрезке $[0, 1]$, а при выполнении условий леммы 6 ряды (48)–(51) сходятся равномерно в области D . Следовательно, функции $u(x, y)$ и $f(x, y)$ удовлетворяют условиям (2), (8). Подставляя ряды (48), (49) в (10), (11), убеждаемся, что эти функции удовлетворяют условию (7).

Если для указанных в лемме 1 чисел α при некоторых $k = l = k_1, k_2, \dots, k_p \leq k_0$, где k_i и p — заданные натуральные числа, выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(l) = 0$, то для разрешимости задачи (2)–(5) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\psi_l = \varphi_l = g_l = 0, \quad l = k_1, k_2, \dots, k_p. \quad (69)$$

Тогда решение задачи (2)–(5) определяется в виде

$$u(x, y) = (\operatorname{sgn} k_1) u_0(y) + \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \dots + \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p-1} + \sum_{k=k_p+1}^{+\infty} \right) \times \\ \times (u_{2k-1}(y) \sin 2\pi kx + u_{2k} \cos 2\pi kx) + \sum_l M_l u_l(x, y), \quad (70)$$

$$f_i(x) = (\operatorname{sgn} k_1) f_{i,0} + \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \dots + \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p-1} + \sum_{k=k_p+1}^{+\infty} \right) \times \\ \times (f_{i,2k-1} \sin 2\pi kx + f_{i,2k} \cos 2\pi kx) + \sum_l M_l u_l(x, y), \quad (71)$$

где $u_l(x, y)$ определяется по формуле (26), M_l — произвольные постоянные, в сумме $\sum_l$ индекс l принимает значения $k_1, k_2, \dots, k_p$; $\operatorname{sgn} k_1 = 0$ при $k_1 = 0$ и $\operatorname{sgn} k_1 = 1$ при $k_1 \geq 1$. В случае, когда в конечных суммах верхний предел меньше нижнего, соответствующую сумму следует считать равной нулю.

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5 и имеет место оценка (29) при $k > k_0$. Тогда, если при всех $k \leq k_0$ выполнены условия (22), то существует единственное решение задачи 2, которое определяется рядами (10), (11). Если при некоторых $k \leq k_0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$, то решение задачи 2 существует тогда, когда выполнены условия (69), и определяется рядами (70), (71).

ТЕОРЕМА 3. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы 6 и имеет место оценка (29) при $k > k_0$. Тогда, если при всех $k \leq k_0$ выполнены условия (22), то существует единственное решение задачи 1, которое определяется рядом (10). Если при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_p \leq k_0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$, то решение задачи 1 существует тогда, когда выполнены условия (69), и определяется рядом (70).

3.3. Существование решения задач 1 и 2 при выполнении условий лемм 2 и 3. Доказывая леммы, подобные леммам 2 и 3, можно обосновать справедливость следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы 6 и имеет место оценка (35) при всех $b < b_0$ и $\beta > \beta_0$. Тогда существует единственное решение задачи 2, которое определяется рядами (10), (11).

ТЕОРЕМА 5. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы 6 и имеет место оценка (35) при $k > k_0$. Тогда, если при всех $k \leq k_0$ выполнены условия (22), то существует единственное решение задачи 2, которое определяется рядами (10), (11). Если при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_p \leq k_0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$, то решение задачи 2 существует тогда, когда выполнены условия (69), и определяется рядами (70), (71).

ТЕОРЕМА 6. Пусть функции $\psi(x)$, $\varphi(x) \in C^5[0, 1]$, $g(x) \in C^4[0, 1]$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $\psi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(1)$, $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1)$, $g(0) = g(1)$, $g'(0) = g'(1)$, $g''(0) = g''(1)$, $g'''(0) = g'''(1)$ и имеет место оценка (35) при всех $b < b_0$ и $\beta > \beta_0$. Тогда существует единственное решение задачи 1, которое определяется рядом (10).

ТЕОРЕМА 7. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 6 и имеет место оценка (35) при $k > k_0$. Тогда, если при всех $k \leq k_0$ выполнены условия (22), то существует единственное решение задачи 1, которое определяется рядом (10). Если при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_p \leq k_0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$, то решение задачи 1 существует тогда, когда выполнены условия (69), и определяется рядом (70).

4. Устойчивость решения задач 1 и 2. Рассмотрим известные нормы

$$\|u(x, y)\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 u^2(x, y) dx \right)^{1/2}, \quad -\alpha \leq y \leq \beta,$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x, y)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n |f^{(k)}(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

ТЕОРЕМА 8. Если выполнены условия теоремы 2 и $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ при $k = 1, 2, \dots, k_0$, то для решения (10), (11) задач 1 и 2 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_{L_2} &\leq C_{17}(\|\psi(x)\|_{L_2} + \|\varphi(x)\|_{L_2} + \|g(x)\|_{L_2}), \\ \|u(x, y)\|_{C(\overline{D})} &\leq C_{18}(\|\psi(x)\|_{W_2^1} + \|\varphi(x)\|_{W_2^1} + \|g(x)\|_{L_2}), \\ \|f_i(x)\|_{L_2} &\leq C_{19}(\|\psi(x)\|_{W_2^2} + \|\varphi(x)\|_{W_2^2} + \|g(x)\|_{W_2^1}), \\ \|f_i(x)\|_{C(\overline{D})} &\leq C_{20}(\|\psi(x)\|_{W_2^3} + \|\varphi(x)\|_{W_2^3} + \|g(x)\|_{W_2^2}). \end{aligned}$$

Здесь C_i — положительные постоянные, не зависящие от φ , ψ и g .

ТЕОРЕМА 9. Если выполнены условия теоремы 3, то для решения (10), (11) задач 1 и 2 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_{L_2} &\leq C_{21}(\|\psi(x)\|_{W_2^1} + \|\varphi(x)\|_{W_2^1} + \|g(x)\|_{L_2}), \\ \|u(x, y)\|_{C(\overline{D})} &\leq C_{22}(\|\psi(x)\|_{W_2^2} + \|\varphi(x)\|_{W_2^2} + \|g(x)\|_{W_2^1}), \\ \|f_i(x)\|_{L_2} &\leq C_{23}(\|\psi(x)\|_{W_2^3} + \|\varphi(x)\|_{W_2^3} + \|g(x)\|_{W_2^2}), \\ \|f_i(x)\|_{C(\overline{D})} &\leq C_{24}(\|\psi(x)\|_{W_2^4} + \|\varphi(x)\|_{W_2^4} + \|g(x)\|_{W_2^3}). \end{aligned}$$

Здесь C_i — положительные постоянные, не зависящие от φ , ψ и g .

Доказательство теорем 8 и 9 проводится аналогично работе [19].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А. В. Бицадзе, М. С. Салахитдинов, “К теории уравнений смешанно-составного типа” // *Сиб. матем. журн.*, 1961. Т. 2, № 1. С. 7–19. [A. V. Bitsadze, M. S. Salakhitdinov, “On the theory of equations of mixed-composite type” // *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1961. Vol. 2, no. 1. Pp. 7–19].
2. Т. Д. Джураев, Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 239 с. [T. D. Dzhuraev, Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types. Tashkent: Fan, 1979. 239 pp.]
3. А. И. Кожанов, Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: НГУ, 1990. 150 с. [A. I. Kozhanov, Boundary Value Problems for Odd-Order Equations of Mathematical Physics. Novosibirsk: Novosibirsk Univ., 1990. 150 pp.]
4. К. Б. Сабитов, “Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка” // *Докл. РАН*, 2009. Т. 427, № 5. С. 593–596; англ. пер.: K. B. Sabitov, “A boundary value problem for a third-order equation of mixed type” // *Dokl. Math.*, 2009. Vol. 80, no. 1. Pp. 565–568.
5. К. Б. Сабитов, “Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области” // *Дифф. урав.*, 2011. Т. 47, № 5. С. 705–713; англ. пер.: K. B. Sabitov, “The Dirichlet problem for a third-order equation of mixed type in a rectangular domain” // *Differ. Equ.*, 2011. Vol. 47, no. 5. Pp. 706–714.

6. А. Н. Тихонов, "Об устойчивости обратных задач" // *Докл. АН СССР*, 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198; англ. пер.: A. N. Tikhonov, "On the stability of inverse problems" // *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 1943. Vol. 39, no. 5. Pp. 176–179.
7. М. М. Лаврентьев, "Об одной задаче для волнового уравнения" // *Докл. АН СССР*, 1964. Т. 157, № 3. С. 520–521. [англ. пер.: М. М. Lavrent'ev, "On an inverse problem for the wave equation" // *Soviet Math. Dokl.*, 1964. Vol. 5, no. 3. Pp. 970–972].
8. М. М. Лаврентьев, К. Г. Резницкая, В. Г. Яхно, Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, Сибирск. отдел., 1982. 88 с. [М. М. Lavrent'ev, K. G. Reznitskaya, V. G. Yakhno, One-dimensional inverse problems of mathematical physics. Novosibirsk: Nauka, Sibirsk. Otdel., 1982. 88 pp.]
9. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П., Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с. [V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana, Theory of linear ill-posed problems and its applications. Moscow: Nauka, 1978. 206 pp.]
10. А. И. Прилепко, Д. С. Ткаченко, "Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением" // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2003. Т. 43, № 4. С. 562–570; англ. пер.: A. I. Prilepko, D. S. Tkachenko, "Properties of solutions of a parabolic equation and the uniqueness of the solution of the inverse source problem with integral overdetermination" // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003. Vol. 43, no. 4. Pp. 537–546.
11. А. В. Баев, "Единственность решения обратной задачи для уравнения акустики и обратная спектральная задача" // *Матем. заметки*, 1990. Т. 47, № 2. С. 149–151. [A. V. Baev, "Uniqueness of a solution of an inverse problem for an equation in acoustics, and an inverse spectral problem" // *Mat. Zametki*, 1990. Vol. 47, no. 2. Pp. 149–151].
12. А. М. Денисов, Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 285 с. [A. M. Denisov, Introduction to the theory of inverse problems. Moscow: Moscow State Univ., 1994. 285 pp.]
13. А. И. Кожанов, "Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи" // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716; англ. пер.: A. I. Kozhanov, "Nonlinear loaded equations and inverse problems" // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004. Vol. 44, no. 4. Pp. 657–675.
14. К. Б. Сабитов, Э. М. Сафин, "Обратная задача для уравнения смешанного парабологиперболического типа" // *Матем. заметки*, 2010. Т. 87, № 6. С. 907–918; англ. пер.: K. B. Sabitov, E. M. Safin, "The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type" // *Math. Notes*, 2010. Vol. 87, no. 6. Pp. 880–889.
15. К. Б. Сабитов, Н. В. Мартемьянова, "Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа" // *Изв. вузов. Матем.*, 2011. № 2. С. 71–85; англ. пер.: K. B. Sabitov, N. V. Martem'yanova, "A nonlocal inverse problem for a mixed-type equation" // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011. Vol. 55, no. 2. Pp. 61–74.
16. К. Б. Сабитов, Н. В. Мартемьянова, "Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием" // *Сиб. матем. журн.*, 2012. Т. 53, № 3. С. 633–647; англ. пер.: K. B. Sabitov, N. V. Martem'yanova, "An inverse problem for an equation of elliptic-hyperbolic type with a nonlocal boundary condition" // *Siberian Math. J.*, 2012. Vol. 53, no. 3. Pp. 507–519.
17. К. Б. Сабитов, И. А. Хаджи, "Краевая задача для уравнения Лаврентьева—Бицадзе с неизвестной правой частью" // *Изв. вузов. Матем.*, 2011. № 5. С. 44–52; англ. пер.: K. B. Sabitov, I. A. Khadzi, "The boundary-value problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation with unknown right-hand side" // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011. Vol. 55, no. 5. Pp. 35–42.
18. Г. Ю. Удалова, "Обратная задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа" // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010. № 4(78). С. 89–97. [G. Yu. Udalova, "Inverse problem for equation of mixed elliptic-hyperbolic type" // *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2010. no. 4(78). Pp. 89–97].
19. Г. Ю. Удалова, "Обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева—Бицадзе" // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2012. Т. 14,

- № 1. С. 98–111. [G. Yu. Udalova, “Inverse problem for equation with Lavrentev–Bitsadze operator” // *Doklady AdygsКОЙ (Cherkessкой) Mezhdunarodnoy Akademii Nauk*, 2012. Vol. 14, no. 1. Pp. 98–111].
20. Г. Ю. Удалова, “Краевая задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью” // *Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика. Физика*, 2012. Т. 26, № 5. С. 209–225. [G. Yu. Udalova, “The boundary-value problem for the Lavrent’ev–Bitsadze equation with unknown right-hand side” // *Nauchnyye Vedomosti Belgorodskogo Gos. Un-ta. Ser. Matematika. Fizika*, 2012. Vol. 26, no. 5. Pp. 209–225].
21. А. Я. Хинчин, Цепные дроби. М.: Наука, 1978. 112 с. [A. Ja. Hinchin, Continued fractions. Moscow: Nauka, 1978. 112 pp.]
22. В. И. Арнольд, “Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике” // *УМН*, 1963. Т. 18, № 6(114). С. 91–192; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics” // *Russian Math. Surveys*, 1963. Vol. 18, no. 6. Pp. 85–191.
23. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с. [A. Zigmund, Trigonometric series. Vol. 1. Moscow: Mir, 1965. 616 pp.]

Поступила в редакцию 08/IV/2013;
в окончательном варианте — 20/VII/2013.

MSC: 35M12; 35M10, 35A02

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH PERIODIC CONDITIONS

K. B. Sabitov¹, G. Yu. Udalova²

¹ Institute of Applied Research,
68, Odesskaya st., Sterlitamak, Russia, 453103.

² Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mails: sabitov_fmfm@mail.ru, yeyeg@yandex.ru

The problem for the equation of the mixed elliptic-hyperbolic type with nonlocal boundary conditions is viewed. This problem is reduced to the inverse problem for elliptic-hyperbolic equation with unknown right-hand parts. The criterion of the uniqueness is established. The explicit solution is constructed as the sum of orthogonal trigonometric series of the one-dimensional spectral problem eigenfunctions. The argumentation of the series convergence under some restrictions is given. The stability of the solution by the boundary functions is proved.

Key words: equations of the mixed type of third order, direct and inverse problems, spectral method, uniqueness, existence, stability.

Original article submitted 08/IV/2013;
revision submitted 20/VII/2013.

Kamil B. Sabitov (Dr. Phys. & Math. Sci.), Director. Galina Yu. Udalova, Postgraduate Student, Dept. of Higher Mathematics.